1. Diferenciální rovnice

1.1. Základní pojmy

<u>Dif. rovnice</u> je rovnice, která obsahuje neznámou fci a její derivace.

<u>Obyčejná DR</u> – hledaná fce je fce 1 proměnné, tj. v DR se vyskytují pouze „obyčejné" derivace fce 1 prom.

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \text{ pro neznámou fci } y(x)$$

<u>Parciální DR</u> – hledaná fce je fce více proměnných, tj. v rovnici se vyskytují parc. derivace hledané fce.

<u>Řád DR</u> = řád nejvyšší derivace hledané fce.

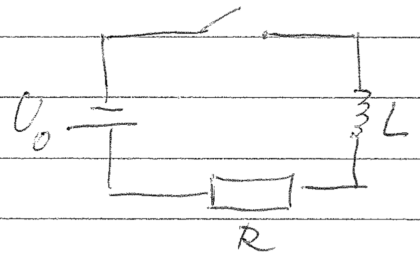
Př.: $y' + y = 1$ – obyč. DR 1. ř.

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \text{ pro hledanou fci } z(x,y) \text{ je}$$

PDR 1. ř.

$$y'' + y = \sin x \quad \text{– ODR 2. ř.}$$

Př: Chceme stanovit časový průběh proudu v LR-obvodu



Pomocí Kirchhoffova zákona:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U_0, \quad i(0)=0$$

(poč. úloha, DR 1. řádu)

1) $$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$L\cdot\frac{di}{dt} = -Ri$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\ln|i| = -\frac{R}{L}t + K_1$$

$$i = K\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

2) $$i(t) = u(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i'(t) = u'(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} + u(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\cdot\left(-\frac{R}{L}\right)$$

$$L\cdot u'(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} + (-R)\cdot u(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} + R\cdot u(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} = U_0$$

$$u'(t) = \frac{U_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}$$

$$u(t) = \frac{U_0}{L}\cdot e^{\frac{R}{L}t}\cdot\frac{L}{R} + K_2$$

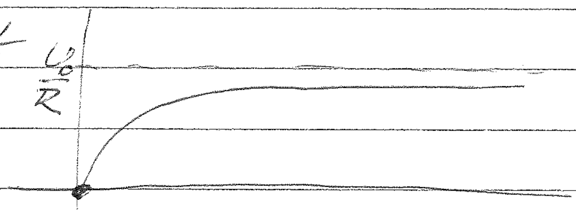
$$\| \; i(t) = \left(\frac{U_0}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t} + K_2\right)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} + K_2\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

– ob. řešení

$$i(0) = \frac{U_0}{R} + K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = -\frac{U_0}{R}$$

Řešení poč. úlohy:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$



Řešením DR je každá fce, která splňuje DR

Př!: Ukažte, že fce $y(x) = \sin 2x$ je řešením ODR 2. řádu $y'' + 4y = 0$.

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin 2x \\ y' &= 2\cos 2x \\ y'' &= -4\sin 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} L &= -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0 \\ P &= 0 \\ &\Downarrow \\ L &= P \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ fce $y(x) = \sin 2x$ je řešením rovnice $y'' + 4y = 0$

Př!: $y' = y$, řešením rovnice je fce $y = e^x$

$y'' = y$ — " — $y = e^x, e^{-x}$

$y' = -y$ — " — $y = e^{-x}$

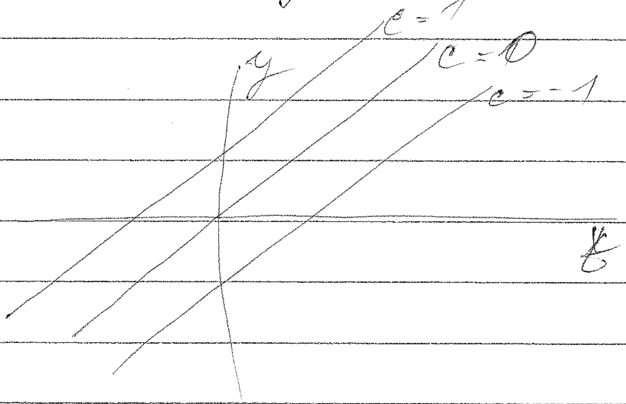
$y'' = -y$ — " — $y = \sin x, \cos x$

Př!: $y' = 1$ řešením je fce $y(x) = x$, $y(x) = x + 2$, atd. ...

$\Rightarrow$ řešením je každá fce $y = x + C$, C – lib. konst.

$\Rightarrow$ fce ~~f(x)~~ $y(x) = x + C$ se nazývá obecné řešení DR

Fce $y(x) = x, x+1, x+2, \ldots$ – partikulární řešení DR



Integrální křivka – graf řešení DR.

Řešit DR znamená najít všechna řešení DR, tj. najít všechny fce, které splňují DR

Počáteční úloha : $y' = 1$, $y(0) = 2$
(Cauchyova)

poč. podmínka

- u této poč. úlohy znamená najít to řešení, které vyhovuje poč. podmínce, tj. najít konst. C tak, aby $y(0) = 2$.

Řešení naší poč. úlohy : $y = x + 2$

Metody řešení DR:
- metoda přímé integrace
- pro DR 1. ř.
  - separace proměnných
  - metoda variace konstanty
- pro DR 2. a vyšších řádů
  - metoda charakt. rovnice – pro hom.
  - metoda odhadu
  - metoda variace konst.

1.2. Metoda přímé integrace

- používá se u rovnic typu $y^{(n)} = f(x)$,
$y(x) = ?$

Př.: $y' = \cos x$

$y'' = \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

1.3. Separace proměnných

Metodou separace proměnných se řeší rovnice typu

$$y' = f(t) \cdot g(y).$$

Tato DR se nazývá rovnice se separovatelnými proměnnými.

Postup:

$$y' = f(t) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot g(y) \quad / \cdot dt$$

$$dy = f(t) \cdot g(y)\, dt \quad / : g(y) \neq 0$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)\, dt$$

Vypočítáme prim. fci na levé i pravé straně a vyjádříme fci $y(t)$ (pokud to lze).

Dále vyřešíme případ $g(y) = 0$

Př.: Řešte rovnici $y' = 2\sqrt{y}$, pro neznámou fci $y(t)$.

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y} \quad / \cdot dt$$

$$dy = 2\sqrt{y}\, dt \quad / : \sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2dt$$

$$2\sqrt{y} = 2\cancel{t} + 2c$$

$$\sqrt{y} = \cancel{t} + c, \quad x \geq -c$$

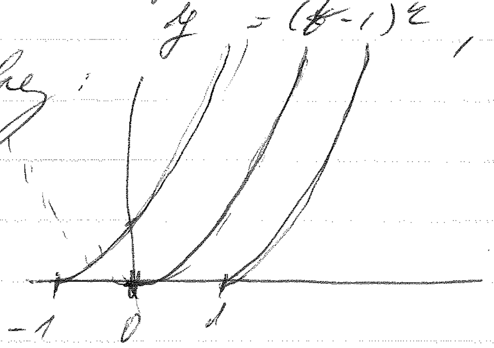
$$y = (\cancel{t} + c)^2, \quad x \geq -c$$

Partikulární řešení: $y = x^2, \; x \geq 0$

$y = (x+1)^2, \; x \geq -1$

$y = (x-1)^2, \; x \geq 1$

Integrální křivky:



Je fce $y = 0$ řešením DR? ANO

Lze fci $y = 0$ vyjádřit z obecného řeš.?

– NE $\Rightarrow$ $y = 0$ je singulární ř.

Pozn.:

Singulární řešení je řešení DR, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou parametru. V každém bodě singulárního řešení je porušena jednoznačnost řešení

Př: Řešte DR $ty' = y$ pro neznámou fci $y(t)$.

$$t \cdot \frac{dy}{dt} = y \quad | \cdot dt$$

$$t \cdot dy = y\,dt \quad | : t \quad | : y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$$

$$\ln|y| = \ln|t| + \ln C, \quad C > 0$$

$$|y| = C \cdot |t|, \quad C > 0, \; t \neq 0$$

Řešení lze psát ve tvaru $y = C \cdot t, \; C \neq 0, \; \forall t \in R$

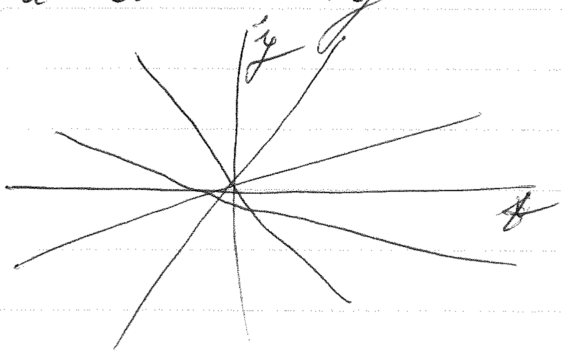
Je $y = 0$ řešení? ANO

Jde o singulární řešení? NE –

– volbou konst. $C = 0$ dostaneme řešení $y = 0$

$\Rightarrow$ $y = C \cdot t$ – ob. ř. $\forall C \in R, \forall t \in R$

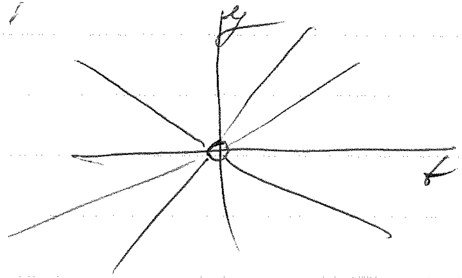
Integrální křivky:



Bodem [0,0] prochází nek. mnoho řešení => bod [0,0] je sing. bod

Pozn.: $y' = \frac{y}{x}$ – řešení této rovnice jsou fce $y = C\cdot x$, $x \neq 0$

int. křivky:



1.4. Lineární DR 1. řádu

LDR 1. ř. je rovnice tvaru

$$y' + a(x)\, y = f(x)$$

kde $a(x)$ se nazývá <u>koeficient</u> rovnice a fce $f(x)$ <u>pravá strana rovnice</u>.

Postup řešení:

1) Řešíme rovnici $y' + a(x)\cdot y = 0$

– tzv. <u>homogenní rovnice</u> neboli rovnice <u>bez pravé strany</u>

(pozor!! – co to je "pravá" strana)

Hom. rovnici řešíme "separací":

$$y' + a(t)\,y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -a(t)\cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = -a(t)\,dt$$

$$\ln|y| = \underbrace{-\int a(t)\,dt}_{\text{primit. fce k fci } a(t) \text{ označme } A(t)} + \ln C$$

$$y_h(t) = C\cdot e^{-A(t)}, \quad \forall C$$

(zdůvodnit) – OŘHR

2) Variace konst. – hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(t) = u(t)\cdot e^{-A(t)},$$

kde $u(t)$ je lib. fce, zatím neznámá! Hledáme ji dosazením y do původní nehomogenní rovnice (rovnice s pravou stranou).

3) Obecné řešení nehomogenní rovnice má tvar

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

Př: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}$

TRIAL

$$x\cdot y' - 2y = 2x^4$$

$$(2x+1)\cdot y' = 4x + 2y$$