1.5 Lineární DR 2. řádu – homogenní + nehomogenní

Homogenní LDR 2. ř. je rovnice tvaru

$$a_2(x)\cdot y''(x) + a_1(x)\cdot y'(x) + a_0(x)\cdot y(x) = 0,$$

kde $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ jsou koef. rovnice

Pozn.: Homogenní LDR má vždy nulové řešení $y(x) = 0$.

Vlastnosti řešení homogenní LDR:

a) jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě řešení HLDR na I, potom každá fce tvaru

$$y(x) = C_1\cdot y_1(x) + C_2\cdot y_2(x), \quad x \in I$$

C_1, C_2 – konst.

je také řešením HLDR na I

b) Jsou-li fce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ řešením HLDR a jsou-li lineárně nezávislé, tvoří fundamentální systém řešení DR.

Př.: e^x, e^{-x} – LN

$\sin x, \cos x$ – LN

$\sin^2 x, 1-\cos^2 x$ – LZ

$1, x$ – LN

x, x^2 – LN

Pro informaci: pokud Wronského determinant tj. $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$, jsou fce y_1, y_2 lin. nezávislé!

c) Jsou-li fce y_1, y_2 fce fundamentálního systému HDR, potom všechna řešení DR mají tvar
$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Př: $y'' - y = 0$ — najděte ob. řešení rovnice pro neznámou fci $y(x)$.

Odhadneme, že $\left.\begin{array}{l} y_1 = e^x \\ y_2 = e^{-x} \end{array}\right\} LN$

$\Rightarrow$ ob. řešení: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Př: $y'' + y = 0$

odhadem: $y_1(x) = \sin x$

$y_2(x) = \cos x$

Ob. řešení: $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

d) $\boxed{\text{Řešení nehomogenní LDR}}$

Obecné řešení: $y = y_h + y_p$,

kde y_h je obecné řešení h. rovnice

y_p je partikulární ř. neh. r.

Př: Najděte ob. ř. rovnice $y'' + y = x$

a) hom. rovnice $y'' + y = 0$

ob. ř. HR $y_h(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

part. ř. NR $y_p(x) = x$

ob. ř. NR:

$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x$

1.6. Lineární DR 2. řádu s konst. koef. – homogenní

LDR 2. ř. s konst. koef. je rovnice tvaru

$$a_2 \cdot y''(x) + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0,$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou konst.

Řešení hledáme ve tvaru $e^{\lambda t}$, kde λ je konst.:

$$a_2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + a_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + a_0 \cdot e^{\lambda t} = 0$$

$$a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$ – charakteristická rovnice

Řešením char. rovnice dostaneme kořeny, pro něž mohou nastat tyto tři případy:

1) λ_1, λ_2 – dva různé reálné kořeny char. rovnice
⇒ řešení DR mají tvar $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$
Tvoří fundamentální systém? Jsou LN?
ANO
⇒ obecné řešení: $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – jeden dvojnásobný kořen (reálný)
→ fundamentální systém je tvořen fcemi $e^{\lambda t}, t \cdot e^{\lambda t}$
⇒ ob. řešení $y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t \cdot e^{\lambda t}$

3) λ_1, λ_2 – dva různé komplexní kořeny
$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \ \lambda_2 = \alpha - \beta i$

$$\Rightarrow y_1 = e^{(\alpha+\beta i)t}, \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)t}$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$
$$y_2 = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

$$\frac{(y_1+y_2)}{2} = \frac{2e^{\alpha t}\cos\beta t}{2} = e^{\alpha t}\cos\beta t \text{ - řešení DR}$$

$$\frac{y_1-y_2}{2i} = \frac{i2e^{\alpha t}\sin\beta t}{2i} = e^{\alpha t}\sin\beta t \text{ - řešení DR}$$

Obě získaná řešení jsou LN $\Rightarrow$ tvoří fundamentální systém $\Rightarrow$

ob. řešení $y = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$

1.7 Řešení nehomogenní LDR 2. ř. s konst. koef. – metoda odhadu

Jde o DR typu:

$$a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x),\ x \in I$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou konst.

Postup:

1) Řešíme příslušnou homogenní rovnici, dostaneme obecné řešení y_h.
2) Provedeme odhad partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice. Parametry odhadu můžeme dosazením y_p do dané rovnice.
3) Obecné řešení nehomogenní rovnice má tvar $y = y_h + y_p$

Metoda odhadu

a) $f(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot P(x)$, $P(x)$ – polynom

odhad $y_p = x^k \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot p(x)$,

kde $p(x)$ je polynom stejného stupně jako je $P(x)$.

– k – násobnost ~~kořene~~ čísla α v char. rovnici – kritické číslo.
Pokud α není kořenem char. rovnice, je $k = 0$.

Př: $y'' + 2y' - 3y = 5x\, e^{2x}$, $?\ y(x)$

1) $y'' + 2y' - 3y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$

$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$

$$y_h = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-3x}$$

2) Odhad $y_p = (at+b)\cdot e^{2t}$

$y_p' = a\cdot e^{2t} + (at+b)\cdot e^{2t}\cdot 2$

$y_p'' = a\cdot e^{2t}\cdot 2 + 2a\cdot e^{2t}\cdot 2 + (at+b)\cdot e^{2t}\cdot 4$

$4ae^{2t} + 4(at+b)\cdot e^{2t} + 2ae^{2t} + 4e^{2t}\cdot(at+b) - 3(at+b)e^{2t} = 5te^{2t} \quad /:e^{2t}$

$6a + 5(at+b)\cancel{e^{2t}} = 5t\cdot\cancel{e^{2t}}$

Porovnáme koef. u stejných mocnin t:

t^1: $5a = 5 \Rightarrow a = 1$

t^0: $6a + 5b = 0 \Rightarrow b = -\frac{6}{5}\cdot 1 = -\frac{6}{5}$

$y_p = \left(t - \frac{6}{5}\right)\cdot e^{2t}$

$y = C_1 e^{t} + C_2\cdot e^{-3t} + \left(t-\frac{6}{5}\right)\cdot e^{2t}$

Př: Řešte poč. úlohu:

$y'' + 2y' - 3y = 5t\cdot e^{2t}, \; y(0) = \frac{4}{5}, \; y'(0) = \frac{8}{5}$

obecné řešení: $y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} + \left(t - \frac{6}{5}\right)\cdot e^{2t}$

poč. podmínky:

$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{6}{5}\cdot 1 = \frac{4}{5}$

$y'(t) = C_1 - 3C_2 e^{-3t} + e^{2t} + \left(t - \frac{6}{5}\right)\cdot 2e^{2t}$

$y'(0) = C_1 - 3C_2 + 1 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}$

Řešíme soustavu:

$C_1 + C_2 = 2$

$C_1 - 3C_2 = 3$

$2C_1 = 5 \Rightarrow C_1 = \frac{5}{2}$

$C_2 = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

Řešení poč. úlohy: $\boxed{y = \frac{5}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \left(t-\frac{6}{5}\right)e^{2t}}$

Př: $y'' + 2y' - 3y = 8t \cdot e^t$, $y(0) = 1$
$y'(0) = -\frac{1}{2}$

1) $y'' + 2y' - 3y = 0$
$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$
$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, -3$

$y_h = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$

2) Odhad $y_P = t^1 (at + b) \cdot e^t = (at^2 + bt) \cdot e^t$

$y_P' = (2at + b) e^t + (at^2 + bt) \cdot e^t$
$y_P'' = 2a \cdot e^t + (2at + b) e^t + (2at + b) \cdot e^t + (at^2 + bt) \cdot e^t$

$2ae^t + 2 \cdot (2at + b) \cdot e^t + \cancel{(at^2 + bt) \cdot e^t} + 2(2at + b) e^t + \cancel{2(at^2 + bt) \cdot e^t} - \cancel{3(at^2 + bt) \cdot e^t} = 8t \cdot e^t \quad / : e^t$

$2a + 4(2at + b) \cancel{e^t} = 8t$

$t^1: \quad 8a = 8 \Rightarrow a = 1$
$t^0: \quad 2a + 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$y_P = t \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) e^t$

Obecné řešení: $y = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} + t \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) e^t$

Při podmínkách: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$
$y' = C_1 e^t - 3C_2 e^{-3t} + \left(t - \frac{1}{2}\right) e^t + t e^t + t \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) e^t$

$y'(0) = C_1 - 3C_2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = 3C_2$
$4C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{4}$
$C_1 = \frac{3}{4}$

Řešení při. podm.: $\boxed{y(t) = \cancel{C_1}\, \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-3t} + t \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) e^t}$

b) $f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(M(x) \cos \beta x + N(x) \sin \beta x\right)$
~~odhad~~ $M(x)$, $N(x)$ polynomy

$$y_p = x^k \cdot e^{\alpha x}\left(m(x) \cos \beta x + n(x) \sin \beta x\right),$$
kde

$m(x)$, $n(x)$ – polynomy, jejichž stupeň je roven největšímu ze stupňů $M(x)$, $N(x)$
k – násobnost čísla $\alpha + \beta i$ v char. rovnici. Pokud $\alpha + \beta i$ není kořenem char. rovnice, je $k = 0$.

Př.: $y'' + y = \sin x$, $\quad ?\, y(x)$
$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

Př.: $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$
– princip superpozice

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

$$y_p^{(1)} = \frac{1}{8} \cos 2x$$

$$y_p^{(2)} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$

1.8 LDR s konst. koef. vyšších řádů

LDR s konst. koef. se řeší pomocí stejných pravidel jako u rovnic 2. řádu

Př: $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x$

1) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$

$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$\lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_{3,4} = 1$

$y_h = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 x \cdot e^{0\cdot x} + C_3 \cdot e^x + C_4 x e^x$

2) $y_p = x^2 a \cdot e^x$

$y' = 2ax \cdot e^x + ax^2 \cdot e^x$

$y'' = 2a e^x + 2ax \cdot e^x + 2ax \cdot e^x + ax^2 \cdot e^x$

$y''' = 2ae^x + 2ae^x + \underline{2ax \cdot e^x} + 2ae^x + \underline{2ax \cdot e^x} + \underline{2ax \cdot e^x} + ax^2 \cdot e^x =$

$= 6ae^x + 6axe^x + ax^2 e^x$

$y^{(4)} = 6ae^x + 6ae^x + \underline{6axe^x} + \underline{2axe^x} + ax^2 e^x =$

$= 12ae^x + 8axe^x + ax^2 e^{2x}$

$\underline{12ae^x} + 8axe^x + ax^2 e^{2x} \underline{- 12ae^x} - 12axe^x - 2ax^2e^x +$
$+ \underline{2ae^x} + 4axe^x + ax^2 e^x = e^x$

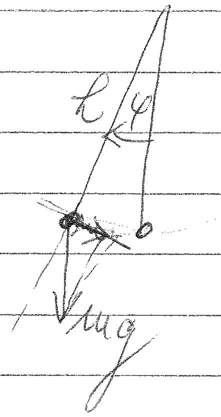
$2ae^x = e^x \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}x^2 e^x$

$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot e^x + C_4 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$

1.9. Okrajové úlohy

Rovnice kyvadla:



$$m \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} l = -mg \sin\varphi$$

$$l \cdot m \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg \sin\varphi = 0$$

Po linearizaci:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2} \cdot \cancel{\sin\varphi}\ \varphi = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \cdot \varphi = 0$$

Ob. řešení: $\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

Poč. úloha: např. $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

Okrajová úloha: $t \in \langle 0,1 \rangle$

Hledáme fci $\varphi(t)$ tak, aby

$$\varphi(0) = y_0, \quad \varphi(1) = y_1$$

např.: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$

$$\varphi(0) = A \cdot \cos 0 + B \sin 0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\varphi(1) = A \cdot \cos\omega + B \cdot \sin\omega = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\sin\omega}$$

řešení okrajové úlohy:

$$y = \frac{1}{\sin\omega}\sin\omega t$$

$$\sin\omega \neq 0 \Rightarrow \omega \neq k\pi$$

- tzv. Dirichletova úloha

Př: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$, $\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\varphi(0) = 0$, $\varphi'(1) = 1$ – smíšená úloha

$A = 0$

$\varphi'(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$\varphi'(1) = B\cdot\omega\cos\omega = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\omega\cos\omega}$

$\cos\omega \neq 0 \Rightarrow \omega \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$y = \frac{1}{\omega\cos\omega}\sin\omega t$

Př!: $\left.\begin{array}{l}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 1\end{array}\right\}$ Neumannova úloha

$\varphi(x) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\varphi'(x) = A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$\varphi'(0) = -A\omega\cdot 0 + B\cdot\omega\cdot 1 = 0$

$B = 0$

$\varphi'(1) = -A\omega\sin\omega = 1 \Rightarrow A = \frac{-1}{\omega\sin\omega}$

$\omega \neq k\pi$

$y = \frac{-1}{\omega\sin\omega}\cos\omega t$

Pozn.: Může nastat situace, kdy okrajová úloha nemá řešení!

$y'' + y = 0$

$y(0) = 1$, $y(\pi) = 2$

$y(x) = A\cos x + B\sin x$

$\left.\begin{array}{ll}y(0) = A\cdot 1 + B = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ y(\pi) = A\cdot(-1) + B\cdot 0 = 2 & \Rightarrow A = -2\end{array}\right\}$!!