1. Laplaceova transformace

1.1. Integrální transformace

Je daná fce $K(t,p)$, kde $t \in R$, $p \in C$ – tzv. jádro transformace

Fce $f(t)$, $t \in R$ je taková, že ex. integrál

$$\int_a^b f(t)\, K(t,p)\, dt \quad , \quad \forall p \in C$$

<u>Integrální transformace</u> s jádrem K je zobrazení, které každé fci f přiřazuje fci $\int_a^b f(t)\, K(t,p)\, dt$ (fce proměnné p)

Označení:

$K(t,p)$ – jádro transformace

$f(t)$ – vzor

$F(p)$ – obraz

Příklady:

1) $K(t,p) = e^{-ipt}$, $a = -\infty$, $b = -\infty$ – Fourierova transformace

2) $K(t,p) = \cos pt$ $a = 0$, $b = +\infty$ – Fourierova kosinová transformace

3) $K(t,p) = \sin pt$ $a = 0$, $b = +\infty$ – Fourierova sinová transformace

4) $K(t,p) = e^{-pt}$, $a = 0$, $b = +\infty$ – Laplaceova transformace

1.2. Laplaceova transformace – definice

V 2.1. budeme zobrazovat fce f (komplexní), které splňují tyto podmínky:

1) $f(t) = 0$ pro $t < 0$ – jednostranná fce

2) $f(t)$ má v každém konečném intervalu pouze konečný počet bodů nespojitosti 1. druhu (tj. existují vlastní limity zprava i zleva)

3) pro $\forall t_0 \geq 0$ je
$$f(t_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{t \to t_0-} f(t) + \lim_{t \to t_0+} f(t)\right]$$

4) $\exists x_1$ a $M > 0$ tak, že $|f(t)| < M e^{x_1 t}$ pro $\forall t \geq 0$.
– tzv. fce exponenciálního řádu

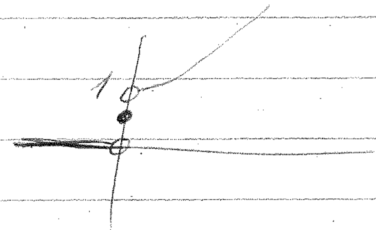
Fci, která splňuje uvedené čtyři podmínky, nazýváme <u>zobrazitelná fce</u>

Laplaceův obraz zobrazitelné fce je definován
$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt, \quad p \in \mathbb{C}.$$

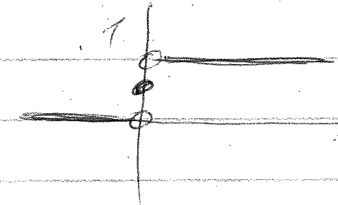
Omezíme se na $p \in \mathbb{R}$.

Poznámka: pro jednoduchost budeme označovat fce obvyklým zápisem, ale budeme rozumět fce splňující 1. a 3. podmínku, např.:

$$f(t) = e^t \quad \equiv \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^t & t>0 \\ \frac{1}{2} & t=0 \end{cases}$$



$$f(t) = 1 \quad \equiv \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \\ \frac{1}{2} & t=0 \end{cases}$$



Tuto fci označíme $\underline{1}(t)$ - jednotková fce

Př.: Určete L. obrazy fcí f:

1) $f(t) = \underline{1}(t)$

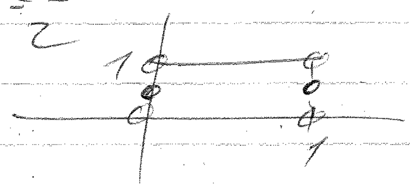
$$\mathcal{L}[\underline{1}(t)] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt}\, dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

pro $\underline{p>0}$

2) $f(t) = 1$ pro $t \in (0,1)$

$= 0$ pro $t>1$ (i pro $t<0$)

$= \frac{1}{2}$ pro $t=0$, $t=\frac{1}{2}$



$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \int_0^1 1 \cdot e^{-pt}\,dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^1 = \frac{e^{-p}}{-p} + \frac{1}{p} = \frac{1-e^{-p}}{p}$$

3) $f(t) = e^{at}$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-pt}\,dt = \left[\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{a-p} = \frac{1}{p-a}$$

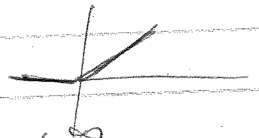
pro $a-p<0 \Rightarrow \underline{p>a}$ (v $\mathbb{C}$ je tato podmínka $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$)

4) $f(t)=\frac{1}{t}$ – není zobrazitelná, protože není spoj. v bodě 0, ale je to ~~bod~~ nespoj. 2. druhu

$f(t)=e^{t^2}$ – není zobrazitelná, protože není exp. řádu (roste rychleji než e^t)

X 5) $f(t)=t^n$, $n\in \mathbb{N}$

$f(t)=t$:



$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{+\infty} t\cdot e^{-pt}\,dt = \overbrace{\left[t\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}}^{=0} -$$

$u=t \quad u'=1$

$v'=e^{-pt} \quad v=\frac{e^{-pt}}{-p}$

$$-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{-p}\,dt = \frac{1}{p}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{p^2}(0-1) = \frac{1}{p^2}$$

$f(t)=t^2$:

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{+\infty} t^2 \cdot e^{-pt}\,dt = \overbrace{\left[t^2\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}}^{=0} - 2\int_0^{+\infty} t\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\,dt =$$

$$u = t^2 \qquad v' = e^{-pt}$$
$$u' = 2t \qquad v = \frac{e^{-pt}}{-p}$$

$$= \frac{2}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \frac{2}{p}\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^3}$$

$$\mathcal{L}[t^3] = \int_0^{+\infty} t^3\cdot e^{-pt}\,dt = \left[t^3\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} + \frac{3}{p}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}\,dt$$

$$u = t^3 \qquad v' = e^{-pt}$$
$$u' = 3t^2 \qquad v = \frac{e^{-pt}}{-p}$$

$$= \frac{3}{p}\cdot\frac{2}{p^3} = \frac{6}{p^4}$$

$\vdots$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Příklady ke zkoušce:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t > a,\ a > 0 \\ 1 & \text{pro } 0 \le t \le a \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t > a > 0 \\ t & \text{pro } 0 \le t \le a \end{cases}$$

1.3. Vlastnosti Laplaceovy transformace

① Linearita

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{L}[f_i(t)]$$

Př.

$$\mathcal{L}[\cosh t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{p^2-1} = \frac{p}{p^2-1}$$

$$\mathcal{L}[\sinh t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2-1} = \frac{1}{p^2-1}$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{p-i} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{p+i} =$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}$$

$$\mathcal{L}[\cos t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-i} + \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{p+i} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1}$$

~~Na cvičení: $\mathcal{L}[\cos^2 t] = \mathcal{L}[\frac{1}{2}(1+\cos$~~

② $$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{+\infty} f(at)\cdot e^{-pt}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)\,e^{-p\cdot\frac{u}{a}}\,du$$
$a>0$

$$at = u$$
$$a\cdot dt = du \Rightarrow dt = \frac{1}{a}du$$

$$= \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Př.: $$\mathcal{L}[\cosh \omega t] = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\frac{p}{\omega}}{\frac{p^2}{\omega^2}-1} = \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sinh \omega t] = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\frac{p^2}{\omega^2}-1} = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{p/\omega}{\frac{p^2}{\omega^2}+1} = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\frac{p^2}{\omega^2}+1} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

(3) $\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = F(p-a)$

$$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot f(t) \cdot e^{-pt}\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(p-a)t}\, dt = F(p-a)$$

Pr.:

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos\omega t] = \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin\omega t] = \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \cosh\omega t] = \frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \sinh\omega t] = \frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$$

(4) $\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{dF}{dp}$

Pr.:

$$\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2}$$

$$\mathcal{L}[t \cdot t] = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{2}{p^3}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Analogicky: $\mathcal{L}[t \cdot e^{at}] = -\frac{d\left(\frac{1}{p-a}\right)}{dp} = -\frac{-1}{(p-1)^2}$

⑤ $\mathcal{L}[f'(t)] = p \cdot F(p) - \overbrace{\lim_{t \to 0+} f(t)}^{f(0+)}$

$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0+) - f'(0+)$

$\vdots$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} \cdot f(0+) - p^{n-2} \cdot f'(0+) - p^{n-3} \cdot f''(0+) - \dots - p \cdot f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

1.4. Zpětná Laplaceova transformace

Budeme hledat fci $f(t)$, ze které vznikl daný Laplaceův obraz $F(p)$.

Označení: $\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t)$

Ve většině případů budeme hledat vzor k racionální lomené fci.

Postup:

1) jmenovatele rozložíme na součin kořenových činitelů nebo nerozložitelných kvadratických trojčlenů,
2) rac. fci rozložíme na součet parc. zl.
3) k parc. zlomkům najdeme vzory

Příklady: 1) Případ lineárních kořen. činitelů

1) $F(p) = \frac{1}{p-1} \Rightarrow f(t) = e^t$

$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2} \Rightarrow f(t) = t \cdot e^t$

$$\left[\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p-a)^n}\right] = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot e^{at}\ \right]$$

2) Případ nerozložitelných kvadratických kořenů

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+2^2} \Rightarrow f(t) = \cos 2t$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2+2^2} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4} = 2 \cdot \frac{p}{p^2+2^2} + \frac{2}{p^2+2^2} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = 2 \cdot \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2+4p+13} = \frac{1}{(p+2)^2+9} = \frac{3}{(p+2)^2+3^2} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{3} \cdot e^{-2t} \cdot \cos 3t$$

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4p+13} = \frac{p}{(p+2)^2+9} = \frac{p+2}{(p+2)^2+9} -$$

$$- \frac{2 \cdot 3}{(p+2)^2+3^2} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-2t} \cdot \cos 3t - \frac{2}{3} \cdot e^{-2t} \cdot \sin 3t$$

1.5. Užití L. transformace při řešení DR a soustav DR

Př. $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Označme $\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$

$$\mathcal{L}[y'(t)] = p \cdot Y - y(0) = pY - 0 = pY$$

$$\mathcal{L}[y''] = p^2 Y - p \cdot y(0) - y'(0) =$$
$$= p^2 Y - p \cdot 0 - 1 = p^2 Y - 1$$

Transformovaná rovnice:

$$p^2 Y - 1 + 3(p Y) + 2Y = 0$$
$$(p^2 + 3p + 2) Y = 1$$
$$Y = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}$$

$$\frac{1}{p^2+3p+2} = \frac{1}{(p+2)(p+1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+1}$$

$$1 = A(p+1) + B(p+2)$$

$p = -1 \quad 1 = B$

$p = -2 \quad 1 = -A \Rightarrow A = -1$

$$Y = \frac{-1}{p+2} + \frac{1}{p+1}$$

$$\boxed{y(t) = -e^{-2t} + e^{-t}}$$

Пр.: $x''' - x' = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 1$

Означиме: $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$

$$\mathcal{L}[x'(t)] = p \cdot X - x(0) = pX - 3$$

$$\mathcal{L}[x''(t)] = p^2 \cdot X - x(0) \cdot p - x'(0) = p^2 X - 3p + 1$$

$$\mathcal{L}[x'''(t)] = p^3 X - x(0) \cdot p^2 - x'(0) p - x''(0) =$$

$$= p^3 X - 3p^2 + p - 1$$

$$p^3 X - 3p^2 + p - 1 - pX + 3 = 0$$

$$(p^3 - p) X = 3p^2 - p - 2$$

$$X = \frac{3p^2 - p - 2}{p(p-1)(p+1)} =$$

$$= \frac{3\cancel{(p-1)}\left(p + \frac{2}{3}\right)}{p\cancel{(p-1)}(p+1)} = \frac{3p+2}{p(p+1)}$$

$$\frac{3p+2}{p(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1}$$

$$3p + 2 = A(p+1) + Bp$$

$p = 0$: $\quad 2 = A$

$p = -1$: $\quad -1 = -B \Rightarrow B = 1$

$$X = \frac{2}{p} + \frac{1}{p+1} \Rightarrow x(t) = 2 + e^{-t}$$

③ $y'' + 4y = \cos t$, $y(0) = y'(0) = 0$

$$\mathcal{L}[y] = Y$$

$$\mathcal{L}[y''] = p^2 \cdot Y - 0 \cdot p - 0$$

$$p^2 Y + 4Y = \frac{p}{p^2+1}$$

$$Y = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$$

$$\frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$$

$$p = (Ap+B)(p^2+1) + (Cp+D)(p^2+4)$$

p^3: $0 = A + C$
p^2: $0 = B + D$
p: $1 = A + 4C$
p^0: $0 = B + 4D$

$B = D = 0$

$1 = 3C$
$C = \frac{1}{3}$
$A = -\frac{1}{3}$

$$Y = \frac{-\frac{1}{3}p}{p^2+4} + \frac{\frac{1}{3}p}{p^2+1} \to y(t)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{p}{p^2+2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{p^2+1}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3} \cdot \cos 2t + \frac{1}{3} \cos t$$

(4) $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$

$\mathcal{L}[y] = Y$

$\mathcal{L}[y'] = pY - 0$

$\mathcal{L}[y''] = p^2 Y - p \cdot 0 - 3$

$$p^2 Y - 3 + 4pY + 13Y = 0$$

$$Y = \frac{3}{p^2 + 4p + 13} =$$

$$= \frac{3}{(p+2)^2 + 3^2}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{-2t} \cdot \sin 3t$$