1.9 Soustavy DR

Soustava DR 1. řádu pro neznámé fce $x(t), y(t)$ má tvar

$$x' = a_{11}(t)\cdot x + a_{12}(t)\cdot y + b_1(t)$$
$$y' = a_{21}(t)\cdot x + a_{22}(t)\cdot y + b_2(t)$$

Řešením soustavy je dvojice fcí.

Př: Ověřte, že fce $x(t) = -e^t + 2e^{5t}$, $y(t) = e^t + 6e^{5t}$ jsou řešením soustavy

$$x' = 2x + y$$
$$y' = 3x + 4y$$

$$\left.\begin{aligned} (1):&\quad -e^t + 10e^{5t} = -2e^t + 4e^{5t} + e^t + 6e^{5t} \\ (2):&\quad e^t + 30e^{5t} = -3e^t + 6e^{5t} + 4e^t + 24e^{5t} \end{aligned}\right\} \text{platí}$$

Každou obyčejnou DR n-tého řádu lze převést na soustavu n rovnic prvního řádu.

Př: $y'' - 5y' + 6y = 0$, $?\, y(t)$

Označme: $y' = x$

DR lze přepsat do tvaru: $x' - 5x + 6y = 0$

Dostáváme tedy soustavu pro neznámé fce $x(t), y(t)$:
$$x' = 5x - 6y$$
$$y' = x$$

Př: $y'' + 2y' - 8y = 0$

$$\left.\begin{aligned} y' &= x \\ x' + 2x - 8y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x' &= -2x + 8y \\ y' &= x \end{aligned}$$

Analogicky lze soustavu n-rovnic převést na 1 rovnici n-tého řádu.

Př: $x' = -2x + 8y$

$y' = x$

(1) $\Rightarrow$ $x'' = -2x' + 8y' = -2x' + 8\underset{(2)}{x}$

$x'' + 2x' - 8x = 0$

Př: $x' = 6x + 3y - \sin t$

$y' = 3x + 2y + e^t$

(1) $\Rightarrow$ $x'' = 6x' + 3y' - \cos t$

$x'' = 6x' + 3\underbrace{(3x + 2y + e^t)}_{(2)} - \cos t$

(1) $\Rightarrow$ $3y = x' - 6x + \sin t$

$y = \dfrac{x' - 6x + \sin t}{3}$

$x'' = 6x' + 9x + 6 \cdot \dfrac{x' - 6x + \sin t}{3} + 3e^t - \cos t$

$x'' = 6x' + 9x + 2x' - 12x + 2\sin t - \cos t + 3e^t$

$x'' - 8x' - 3x = 2\sin t - \cos t + 3e^t$

Maticový zápis soustavy DR

Označme $\mathbb{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}$

$$\mathbb{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$$

Potom soustavu DR lze zapsat ve tvaru:

$$\mathbb{x}'(t) = A \cdot \mathbb{x}(t) + \mathbb{b}(t)$$

Př.: $x' = -2x + 8y$ $\qquad A(t) = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$y' = x$

$\qquad \mathbb{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Př.: $x' = 6x + 3y - \sin t$

$y' = 3x + 2y + e^t$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin t \\ e^t \end{bmatrix}$$

Vlastní číslo a vlastní vektor matice

Je-li číslo λ a vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ tak, že

$$A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

nazývá se číslo λ vlastní číslo matice A a $\vec{v}$ vlastní vektor příslušný vl. číslu λ.

Výpočet vl. čísla a vl. vektoru matice:

$$A\cdot\vec{v} = \lambda\cdot\vec{v}$$
$$A\vec{v} - \lambda\cdot\vec{v} = \vec{0}$$
$$(A-\lambda I)\cdot\vec{v} = \vec{0}$$

Aby mala rovnica netriviálne riešenie $\vec{v}$, musí byť splnená podmienka

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

– charakteristický polynóm. Jeho riešením dostaneme vl. čísla matice. Výpočet vl. vektoru – viď príkl.

Pr.: Nájdite vl. čísla a vl. vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \qquad A-\lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \lambda\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0$$
$$8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$
$$(\lambda-5)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 1$$

– vl. čísla m. A

Výpočet vl. vektoru:

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

Pre $\lambda_1 = 5$: $(A-\lambda_1\cdot I)\cdot\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 \\ 3 & 4-5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3v_1 + v_2 &= 0 \\ 3v_1 - v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Chceme nenulové řešení – každý nenulový vektor tvaru $(t, 3t)$, tedy např. $(1,3)$ – vl. vektor příslušný k vl. číslu $\lambda_1 = 5$.

Pro $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 0 \\ 3v_1 + 3v_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v} = (t, -t), \quad t \neq 0$$

vl. vektor $\vec{v} = (1, -1)$

Řešení soustav DR 1. řádu s konst. koef.:

Př.: $x' = 2x + y$
$y' = 3x + 4y$

1) Najdeme vl. čísla matice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(viz předchozí příklad)

$\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 1$

2) Najdeme příslušné vl. vektory
(viz předchozí příklad)

$\lambda_1 = 5 \longrightarrow \vec{v}_1 = (1,3)$

$\lambda_2 = 1 \longrightarrow \vec{v}_2 = (1,-1)$

3) Řešení soustavy:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot e^{5t}} + \underbrace{C_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{t}}$$

fund. systém řešení

Př: Řešte soustavu DR:

$\cancel{x' = 2x + y}$ $\quad x' = x - y$

$\cancel{y' = 3x + 4y}$ $\quad y' = y - 4x$

$\cancel{A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3, -1$$

$\lambda_1 = 3:$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} -2v_1 - v_2 &= 0 \\ -4v_1 - 2v_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_2 = -2v_1$$

$\Rightarrow \vec{v} = (1, -2)$

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2v_1 \\ -4v_1 + 2v_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{v} = (1, 2)$

Ob. řešení: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{3t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t}$

Pozn.: Případy dvojnásobného kořene a komplexních kořenů budeme řešit převedením soustavy LDR na jednu rovnici 2. řádu