Příklady na zápočet pro kombinované studium

1. Řešte počáteční úlohy

   (a) $y'' = -\dfrac{e^{2x}}{5}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

   (b) $y''' = 2\cos 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$,

   (c) $xy' = 1 + \frac{y}{x+1}$, $y(1) = 1$,

   (d) $y' - 2y = 2\cos x$, $y(0) = 0$.

   (e) $L \cdot \dfrac{di}{dt} + Ri = 0$, $i(0) = i_0$,

   (f) $y'' = -4y$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, kde y_0, y_1 jsou konstanty,

   (g) $y'' - y = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

   (h) $y'' + 4y = \cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2. Řešte soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $x(t), y(t)$

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= x\ . \end{aligned}$$

3. Řešte počáteční úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' + x - 8y &= 0, \\ y' - x - y &= 0, \quad x(0) = 0, \qquad y(0) = 3\ . \end{aligned}$$

4. Určete Laplaceův obraz $F(p)$ funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \text{ a pro } t > 4, \\ t & \text{pro } t \in \langle 0, 4 \rangle \end{cases}$$

5. Určete Laplaceův obraz $F(p)$ jednostranné funkce f:

   (a) $(t^2 + 1)^2$

   (b) $(\sin t - \cos t)^2$

6. Určete originál $f(t)$ k Laplaceovu obrazu $F(p)$

   (a) $\frac{3p-8}{4p^2+25}$

   (b) $\frac{5p+10}{9p^2-16}$

7. Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, je-li

   (a) $a_n = \dfrac{n+2}{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 4}}$;

(b) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$;

8. Uvažujme nekonečnou číselnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, kde $\quad a_n = \dfrac{2}{6^{n+1}}$.

   a) Určete předpis pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$.

   b) Vypočtěte součet nekonečné číselné řady.

9. Určete střed mocninné řady, poloměr konvergence a interval konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2}$.

10. Odvoďte rozvoj funkce $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, v mocninnou řadu. Najděte interval konvergence.

11. Odvoďte rozvoj funkce $f(x) = e^{-x}$, v mocninnou řadu. Najděte interval konvergence.

12. Je dána periodická funkce f, která na základním intervalu periodicity $(-\pi, \pi >$ je dána předpisem $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{pro } t \in (-\pi, 0 > \\ -\frac{\pi}{4} & \text{pro } t \in (0, \pi > . \end{cases}$.

    a) Nakreslete graf funkce f na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

    b) Najděte Fouriérovu řadu funkce f.

    c) Nakreslete graf funkce, ke které získaná Fouriérova řada konverguje.