2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094122

Příklad 1.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 1.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 1.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 1.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094122

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094123

Příklad 2.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 2.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 2.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 2.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094123

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094124

Příklad 3.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 3.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 3.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 3.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094124

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094125

Příklad 4.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 4.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 4.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 4.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094125

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094126

Příklad 5.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\vec{f}(M) = 3$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 5.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 5.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 5.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094126

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094127

Příklad 6.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 6.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 6.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 6.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094127

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094128

Příklad 7.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 7.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 7.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 7.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094128

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094129

Příklad 8.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 8.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 8.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 8.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094129

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094130

Příklad 9.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 9.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 9.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 9.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094130

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094131

Příklad 10.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 10.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 10.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 10.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094131

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094132

Příklad 11.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 11.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 11.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 11.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094132

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 12.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 12.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 12.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 12.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094133

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094134

Příklad 13.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 13.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 13.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 13.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094134

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094135

Příklad 14.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 14.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 14.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 14.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\vec{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094135

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094136

Příklad 15.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 15.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 15.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 15.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094136

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094137

Příklad 16.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 16.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 16.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 16.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094137

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094138

Příklad 17.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 17.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 17.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y^2)\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 17.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\overrightarrow{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094138

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094139

Příklad 18.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\vec{f}(M) = 3$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 18.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 18.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 18.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
11120941 39

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094140

Příklad 19.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 19.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 19.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 19.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094140

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094141

Příklad 20.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 20.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 20.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 20.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094141

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094142

Příklad 21.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 21.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 21.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 21.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
11120941 42

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094143

Příklad 22.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 22.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 22.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 22.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094143

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094144

Příklad 23.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 23.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\overrightarrow{i} - 2y\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 23.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 23.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094144

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094145

Příklad 24.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 24.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 24.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 24.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094145

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094146

Příklad 25.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 25.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 25.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 25.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094146

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094147

Příklad 26.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 26.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 26.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 26.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094147

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094148

Příklad 27.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 27.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 27.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 27.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094148

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094149

Příklad 28.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 28.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 28.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 28.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094149

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094150

Příklad 29.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 29.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 29.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 29.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094150

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094151

Příklad 30.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\vec{f}(M) = 3$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 30.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 30.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 30.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094151

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094152

Příklad 31.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 31.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 31.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 31.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094152

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094153

Příklad 32.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 32.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 32.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 32.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094153

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094154

Příklad 33.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 33.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 33.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 33.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094154

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094155

Příklad 34.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 34.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 34.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 34.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094155

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094156

Příklad 35.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 35.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 35.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 35.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (x^2 + y)\,\overrightarrow{i} + (x - 2y)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094156

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094157

Příklad 36.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 36.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 36.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 36.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094157

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094158

Příklad 37.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$**. Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 37.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2**. Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 37.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 37.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$**, kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$**. Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094158

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094159

Příklad 38.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 38.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 38.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 38.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\vec{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094159

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094160

Příklad 39.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 39.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 39.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 39.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot d\vec{r}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot d\vec{r} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094160

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094161

Příklad 40.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 40.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 40.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 40.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094161

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094162

Příklad 41.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$**. Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 41.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2**. Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 41.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 41.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$**, kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$**. Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094162

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094163

Příklad 42.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 42.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 42.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 42.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094163

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094164

Příklad 43.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 43.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 43.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 43.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\,\vec{i} + (x^2 + y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094164

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094165

Příklad 44.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 44.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 44.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 44.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094165

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094166

Příklad 45.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\vec{f}(M) = 3$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 45.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 45.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 45.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094166

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094167

Příklad 46.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\vec{f}(M) = 3$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 46.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 46.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\,\vec{i} + x\,\vec{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 46.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\,\vec{i} + (x^2 + y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094167

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094168

Příklad 47.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 47.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 47.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 47.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094168

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094169

Příklad 48.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 48.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 48.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 48.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094169

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094170

Příklad 49.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 49.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 49.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 49.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094170

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094171

Příklad 50.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 50.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 50.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 50.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094171

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094172

Příklad 51.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 51.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 51.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 51.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094172

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094173

Příklad 52.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 52.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 52.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 52.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094173

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094174

Příklad 53.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 53.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 53.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 53.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094174

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094175

Příklad 54.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 54.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 54.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 54.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094175

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094176

Příklad 55.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 55.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 55.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 55.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094176

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094177

Příklad 56.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 56.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 56.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 56.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094177

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094178

Příklad 57.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 57.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 57.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 57.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094178

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094179

Příklad 58.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 58.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 58.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 58.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094179

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094180

Příklad 59.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 59.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 59.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 59.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094180

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094181

Příklad 60.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 60.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 60.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 60.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

www.KMA.zcu.cz
SINCE 1954
1112094181

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094182

Příklad 61.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 61.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 61.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 61.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094182

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094183

Příklad 62.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 62.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 62.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 62.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094183

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094184

Příklad 63.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 63.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 63.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 63.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\overrightarrow{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094184

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094185

Příklad 64.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 64.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 64.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 64.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094185

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094186

Příklad 65.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 65.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 65.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 65.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094186

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094187

Příklad 66.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 66.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 66.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 66.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094187

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094188

Příklad 67.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 67.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 67.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 67.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094188

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094189

Příklad 68.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$**. Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 68.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2**. Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 68.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 68.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$**, kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$**. Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094189

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094190

Příklad 69.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 69.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 69.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 69.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094190

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094191

Příklad 70.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\vec{f}(M) = 3$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 70.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 70.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 70.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094191

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094192

Příklad 71.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\vec{f}(M) = 3$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 71.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 71.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 71.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094192

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094193

Příklad 72.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 72.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 72.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 72.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094193

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094194

Příklad 73.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 73.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 73.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 73.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (x^2 + y)\overrightarrow{i} + (x - 2y)\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094194

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094195

Příklad 74.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 74.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 74.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 74.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094195

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094196

Příklad 75.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 75.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 75.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 75.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094196

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094197

Příklad 76.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 76.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 76.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 76.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094197

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094198

Příklad 77.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 77.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 77.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 77.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094198

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094199

Příklad 78.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 78.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 78.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 78.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

www.KMA.zcu.cz
SINCE 1954
1112094199

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094200

Příklad 79.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 79.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 79.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 79.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094200

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094201

Příklad 80.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 80.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 80.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 80.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\,\vec{i} + (x^2 + y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094201

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094202

Příklad 81.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 81.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 81.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 81.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094202

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094203

Příklad 82.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 82.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 82.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 82.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094203

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094204

Příklad 83.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 83.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 83.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 83.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094204

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094205

Příklad 84.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 84.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 84.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 84.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094205

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094206

Příklad 85.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 85.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 85.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 85.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094206

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094207

Příklad 86.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 86.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 86.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 86.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094207

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094208

Příklad 87.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 87.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 87.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 87.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094208

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094209

Příklad 88.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$**. Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 88.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2**. Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 88.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 88.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$**, kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$**. Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094209

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094210

Příklad 89.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 89.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 89.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 89.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094210

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094211

Příklad 90.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 90.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 90.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 90.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\,\vec{i} + (x^2 + y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094211

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094212

Příklad 91.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$**. Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 91.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2**. Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$**.**

Příklad 91.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 91.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$**, kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$**. Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094212

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094213

Příklad 92.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 92.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 92.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 92.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094213

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094214

Příklad 93.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 93.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 93.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 93.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094214

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094215

Příklad 94.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 94.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 94.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 94.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094215

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094216

Příklad 95.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 95.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 95.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 95.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094216

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094217

Příklad 96.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 96.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 96.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 96.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094217

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094218

Příklad 97.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 97.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 97.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 97.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094218

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094219

Příklad 98.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 98.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 98.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 98.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094219

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094220

Příklad 99.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 99.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 99.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 99.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094220

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094221

Příklad 100.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 100.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 100.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 100.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094221

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094222

Příklad 101.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 101.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 101.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 101.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094222

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094223

Příklad 102.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 102.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 102.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 102.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\overrightarrow{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094223

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094224

Příklad 103.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 103.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 103.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 103.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\overrightarrow{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094224

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094225

Příklad 104.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 104.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 104.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 104.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094225

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094226

Příklad 105.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 105.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 105.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 105.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\overrightarrow{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094226

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094227

Příklad 106.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 106.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 106.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 106.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094227

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094228

Příklad 107.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 107.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 107.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 107.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094228

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 108.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 108.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 108.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 108.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094229

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094230

Příklad 109.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 109.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 109.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 109.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094230

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094231

Příklad 110.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\vec{f}(M) = 3$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 110.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 110.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 110.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094231

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094232

Příklad 111.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 111.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 111.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 111.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
11120942 32

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094233

Příklad 112.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 112.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 112.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 112.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\overrightarrow{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094233

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094234

Příklad 113.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\vec{f}(M) = 3$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 113.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 113.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 113.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094234

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094235

Příklad 114.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 114.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 114.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\ d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 114.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094235

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 115.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 115.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 115.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 115.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094236

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 116.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 116.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 116.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 116.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094237

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094238

Příklad 117.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 117.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 117.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 117.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
11120942 38

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094239

Příklad 118.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 118.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 118.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 118.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094239

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094240

Příklad 119.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 119.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 119.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 119.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094240

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094241

Příklad 120.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 120.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 120.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 120.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094241

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094242

Příklad 121.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 121.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 121.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 121.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\vec{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
11120942 42

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094243

Příklad 122.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 122.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 122.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 122.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094243

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094244

Příklad 123.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 123.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 123.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 123.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

---

www.KMA.zcu.cz SINCE 1954

1112094244

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094245

Příklad 124.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 124.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 124.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 124.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094245

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094246

Příklad 125.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\vec{f}(M) = 3$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 125.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 125.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 125.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094246

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 126.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 126.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 126.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 126.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094247

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094248

Příklad 127.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 127.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 127.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 127.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094248

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094249

Příklad 128.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 128.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 128.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y^2)\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 128.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094249

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094250

Příklad 129.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 129.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 129.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 129.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

---

www.KMA.zcu.cz SINCE 1954

1112094250

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094251

Příklad 130.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 130.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 130.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 130.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094251

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094252

Příklad 131.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 131.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 131.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y^2)\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 131.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\overrightarrow{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094252

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 132.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 132.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 132.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 132.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094253

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094254

Příklad 133.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 133.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 133.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 133.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094254

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094255

Příklad 134.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\vec{f}(M) = 3$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 134.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 134.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 134.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094255

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094256

Příklad 135.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 135.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 135.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 135.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094256

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094257

Příklad 136.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\vec{f}(M) = 3$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 136.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 136.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 136.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094257

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094258

Příklad 137.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 137.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 137.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 137.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094258

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094259

Příklad 138.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 138.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 138.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 138.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094259

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094260

Příklad 139.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 139.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 139.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 139.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094260

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094261

Příklad 140.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 140.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 140.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 140.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094261

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094262

Příklad 141.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$**. Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 141.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2**. Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 141.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 141.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$**, kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$**. Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094262

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094263

Příklad 142.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\vec{f}(M) = 3$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 142.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 142.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 142.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094263

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094264

Příklad 143.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 143.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 143.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 143.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094264

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094265

Příklad 144.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 144.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 144.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 144.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094265

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094266

Příklad 145.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 145.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 145.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 145.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094266

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094267

Příklad 146.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 146.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 146.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 146.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (x^2 + y)\,\overrightarrow{i} + (x - 2y)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094267

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 147.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{y}{x}\overrightarrow{i} + \frac{z}{y}\overrightarrow{j} + \frac{x}{z}\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 147.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 147.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 147.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094268

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094269

Příklad 148.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 148.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 148.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 148.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094269

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094270

Příklad 149.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 149.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 149.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 149.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094270

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094271

Příklad 150.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 150.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 150.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 150.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094271

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 151.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 151.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 151.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 151.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094272

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094273

Příklad 152.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 152.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 152.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 152.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\vec{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094273

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094274

Příklad 153.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 153.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 153.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 153.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094274

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 154.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 154.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 154.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 154.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094275

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094276

Příklad 155.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 155.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 155.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 155.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094276

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094277

Příklad 156.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 156.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 156.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 156.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\,\vec{i} + (x^2 + y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094277

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 157.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 157.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 157.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 157.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094278

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094279

Příklad 158.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 158.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 158.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 158.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094279

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094280

Příklad 159.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 159.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 159.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 159.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (x^2 + y)\,\overrightarrow{i} + (x - 2y)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094280

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094281

Příklad 160.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 160.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 160.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 160.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094281

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094282

Příklad 161.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 161.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 161.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 161.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094282

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094283

Příklad 162.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 162.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 162.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 162.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094283

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094284

Příklad 163.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 163.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 163.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y^2)\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 163.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\overrightarrow{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094284

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094285

Příklad 164.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 164.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 164.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 164.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094285

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094286

Příklad 165.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 165.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 165.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 165.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094286

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094287

Příklad 166.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 166.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 166.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 166.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094287

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094288

Příklad 167.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 167.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 167.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 167.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094288

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094289

Příklad 168.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 168.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 168.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 168.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094289

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094290

Příklad 169.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 169.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 169.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 169.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094290

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094291

Příklad 170.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 170.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 170.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 170.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094291

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094292

Příklad 171.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 171.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 171.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 171.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094292

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094293

Příklad 172.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 172.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 172.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 172.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\vec{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094293

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094294

Příklad 173.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 173.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 173.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 173.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094294

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094295

Příklad 174.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 174.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 174.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 174.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094295

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094296

Příklad 175.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 175.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 175.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 175.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int\limits_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int\limits_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094296

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094297

Příklad 176.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 176.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 176.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 176.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094297

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094298

Příklad 177.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 177.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 177.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 177.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\,\vec{i} + (x^2 + y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094298

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094299

Příklad 178.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 178.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 178.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 178.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094299

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094300

Příklad 179.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 179.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 179.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 179.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094300

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094301

Příklad 180.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 180.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 180.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 180.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094301

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094302

Příklad 181.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 181.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 181.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 181.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094302

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 182.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 182.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 182.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 182.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094303

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094304

Příklad 183.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 183.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 183.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y^2)\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 183.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094304

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094305

Příklad 184.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 184.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 184.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 184.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094305

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094306

Příklad 185.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 185.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 185.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 185.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094306

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094307

Příklad 186.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 186.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 186.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 186.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094307

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094308

Příklad 187.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 187.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 187.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 187.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094308

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094309

Příklad 188.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 188.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 188.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 188.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094309

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094310

Příklad 189.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 189.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 189.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 189.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\overrightarrow{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094310

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094311

Příklad 190.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 190.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 190.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 190.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
11120943 11

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094312

Příklad 191.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 191.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 191.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 191.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094312

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094313

Příklad 192.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 192.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 192.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 192.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094313

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094314

Příklad 193.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 193.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 193.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 193.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094314

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 194.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 194.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 194.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 194.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094315

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094316

Příklad 195.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 195.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 195.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 195.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094316

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094317

Příklad 196.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 196.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 196.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 196.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094317

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094318

Příklad 197.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 197.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 197.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 197.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094318

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094319

Příklad 198.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 198.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 198.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 198.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (x^2 + y)\,\overrightarrow{i} + (x - 2y)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094319

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094320

Příklad 199.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 199.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 199.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 199.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\vec{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094320

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094321

Příklad 200.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 200.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 200.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 200.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094321

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094322

Příklad 201.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 201.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 201.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 201.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094322

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094323

Příklad 202.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 202.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 202.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 202.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094323

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094324

Příklad 203.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 203.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 203.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 203.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094324

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094325

Příklad 204.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 204.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 204.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 204.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094325

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094326

Příklad 205.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 205.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 205.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 205.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094326

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094327

Příklad 206.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 206.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 206.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 206.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094327

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094328

Příklad 207.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 207.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 207.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 207.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094328

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094329

Příklad 208.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 208.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 208.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 208.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094329

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094330

Příklad 209.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 209.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 209.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 209.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (2xy + 2x)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094330

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094331

Příklad 210.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 210.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 210.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 210.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094331

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094332

Příklad 211.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin 2x\,\overrightarrow{i} + \cos 2y\,\overrightarrow{j} + 3z^2\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 211.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 211.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y^2)\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 211.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094332

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094333

Příklad 212.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\vec{f}(M) = 3$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 212.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 212.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 212.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094333

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 213.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 213.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 213.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 213.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094334

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094335

Příklad 214.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 214.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 214.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 214.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094335

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094336

Příklad 215.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\vec{f}(M) = 3$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 215.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 215.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 215.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094336

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094337

Příklad 216.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 216.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 216.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 216.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094337

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094338

Příklad 217.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 217.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 217.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 217.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094338

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094339

Příklad 218.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 218.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 218.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 218.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094339

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094340

Příklad 219.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 219.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 219.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 219.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094340

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094341

Příklad 220.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 220.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 220.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 220.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094341

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094342

Příklad 221.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 221.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 221.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 221.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094342

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094343

Příklad 222.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 222.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 222.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 222.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094343

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094344

Příklad 223.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. div $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 223.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 223.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 223.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094344

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094345

Příklad 224.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 224.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\overrightarrow{i} - 2y\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 224.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 224.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094345

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 225.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 225.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 225.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 225.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094346

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094347

Příklad 226.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 226.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 226.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 226.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\overrightarrow{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094347

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094348

Příklad 227.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 227.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 227.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 227.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094348

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094349

Příklad 228.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 228.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 228.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 228.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{2} - 2xy^2\right)\overrightarrow{i} + \left(-2x^2y + 3y^2\right)\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094349

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094350

Příklad 229.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. **div** $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. **rot** $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 229.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 229.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 229.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094350

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094351

Příklad 230.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 230.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 230.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\,\vec{i} + x\,\vec{j}$ **při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy** $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, **tj. vypočtěte** $\int_c \vec{F}\,d\vec{r}$, **kde** c **je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce** $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 230.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\,\vec{i} + (x^2 + y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \dfrac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \dfrac{197}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094351

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094352

Příklad 231.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 231.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 231.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 231.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094352

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094353

Příklad 232.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 232.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 232.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 232.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094353

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094354

Příklad 233.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 233.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 233.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 233.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 4$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094354

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094355

Příklad 234.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 234.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = -x\,\overrightarrow{i} - 2y\,\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 234.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 234.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (10x - 2xy)\,\overrightarrow{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-1, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094355

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094356

Příklad 235.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 235.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 235.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 235.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094356

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094357

Příklad 236.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 236.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 236.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 236.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = -x^2 + 1$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094357

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094358

Příklad 237.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \frac{x}{y}\overrightarrow{i} + \frac{y}{z}\overrightarrow{j} + \frac{z}{x}\overrightarrow{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = [1, 2, 1]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x}$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M)$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. **div** $\overrightarrow{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. **rot** $\overrightarrow{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 237.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = 4(x + K)$.

Příklad 237.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 237.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\overrightarrow{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\overrightarrow{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\overrightarrow{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094358

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094359

Příklad 238.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 238.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 238.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 238.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\,\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094359

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094360

Příklad 239.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 239.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 239.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 239.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094360

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094361

Příklad 240.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 240.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 240.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ **(tj. vypočtěte** $\int_c ds$**).**

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 240.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094361

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

Příklad 241.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 241.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 241.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 241.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094362

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094363

Příklad 242.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 242.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 242.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + x^2\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [-1, 1]$, $D = [-1, 0]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

2

Příklad 242.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094363

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094364

Příklad 243.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\dfrac{1}{y}, 0, -\dfrac{z}{x^2}\right]_M = \left[\dfrac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)_M = \dfrac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \dfrac{1}{4}\right]$.

Příklad 243.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 243.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 243.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (\frac{1}{2} - 2xy^2)\vec{i} + (-2x^2y + 3y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} - x^2y^2 + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, -3) - \varphi(1, 0) = -2 - 36 - 27 - \frac{1}{2} = -\frac{129}{2}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094364

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094365

Příklad 244.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 244.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 244.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \frac{t}{4}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + \frac{1}{16}}\, dt = \frac{\pi\sqrt{145}}{2}$$

Příklad 244.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094365

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094366

Příklad 245.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{f} = \sin^2 x\,\overrightarrow{i} + \cos^2 y\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\overrightarrow{f}(M)$
3. rot $\overrightarrow{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\overrightarrow{f}(M) = 3$
3. rot $\overrightarrow{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 245.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\overrightarrow{a} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 245.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\overrightarrow{F} = (x - y^2)\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 245.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\overrightarrow{a} = (1 + 2xy)\,\overrightarrow{i} + (x^2 + 9y^2)\,\overrightarrow{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\overrightarrow{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\overrightarrow{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 - 2$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2 y + 3y^3$

c) $\int_c \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094366

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

1112094367

Příklad 246.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin^2 x\,\vec{i} + \cos^2 y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = [0, -1, 0]$
2. div $\vec{f}(M) = 3$
3. rot $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 246.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 246.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \sqrt{6}$

Příklad 246.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\,\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\,\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2 y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094367

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094368

Příklad 247.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\frac{1}{x}, -\frac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\frac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{z}{y^2} - \frac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}\right]_M = \left[-\frac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 247.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 247.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ v 1. oktantu.

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 247.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (10x - 2xy)\vec{i} + (-x^2 + 6y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-1, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = 5x^2 - x^2y + y^3 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-1, 2) - \varphi(1, 2) = 0$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094368

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094369

Příklad 248.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\frac{\partial \vec{f}(M)}{\partial x} = \left[\frac{1}{y}, 0, -\frac{z}{x^2}\right]_M = \left[\frac{1}{2}, 0, -1\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)_M = \frac{5}{2}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right]_M = \left[2, 1, \frac{1}{4}\right]$.

Příklad 248.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y^2 = kx$.

Příklad 248.3 **[2 body]**

Vypočtěte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ při pohybu po kladně orientované hranici čtverce s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-1, -1]$, $D = [1, -1]$, tj. vypočtěte $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$, kde c je kladně orientovaná hranice výše uvedeného čtverce $ABCD$.

Řešení:

4

Příklad 248.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (2xy + 2x)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x^2y + x^2 + \frac{y^3}{3}$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 5) - \varphi(1, 2) = \frac{197}{3} - \frac{7}{3} = \frac{180}{3} = 60$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094369

TRIAL

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094370

Příklad 249.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \sin 2x\,\vec{i} + \cos 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ **na** $\mathbb{R}^3$ **a bod** $M = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right]$. **Vypočtěte**

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z}$
2. **div** $\vec{f}(M)$
3. **rot** $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial z} = [0, 0, -6]$
2. **div** $\vec{f}(M) = (2\cos 2x - 2\sin 2y + 6z)_M = -4$
3. **rot** $\vec{f}(M) = [0, 0, 0]$.

Příklad 249.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ **v** R^2. **Několik vektorových čar nakreslete.**

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 249.3 **[2 body]**

Vypočtěte obsah trojúhelníka, který je určen částí roviny $2x + y + 2z = 1$ **v 1. oktantu.**

Řešení:

$P = \frac{3}{8}$

Příklad 249.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (1 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 + 9y^2)\,\vec{j}$ **na** $\mathbb{R}_2$.

a) **Ukažte, že pole** $\vec{a}$ **je potenciálové.**

b) **Najděte potenciál** $\varphi(x, y)$ **pole** $\vec{a}$.

c) **Vypočtěte** $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, **kde** c **část paraboly** $y = x^2 - 2$ **od bodu** $A = [-2, ?]$ **do bodu** $b = [1, ?]$. **Načrtněte křivku** c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = x + x^2y + 3y^3$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 2) - \varphi(1, -1) = -2 + 8 + 24 - (1 - 1 - 3) = 30 + 3$

WWW.KMA.ZCU.CZ SINCE 1954

1112094370

2. zápočtová písemná práce z M3E

12.12.2o11

1112094371

Příklad 250.1 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ na $\mathbb{R}^3$ a bod $M = [1, 2, 1]$. Vypočtěte

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y}$
2. div $\vec{f}(M)$
3. rot $\vec{f}(M)$.

Řešení:

1. $\dfrac{\partial \vec{f}(M)}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}, -\dfrac{z}{y^2}, 0\right]_M = \left[1, -\dfrac{1}{4}, 0\right]$
2. div $\vec{f}(M) = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{z}{y^2} - \dfrac{x}{z^2}\right)_M = -2 - \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{13}{4}$
3. rot $\vec{f}(M) = \left[-\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{x}\right]_M = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$.

Příklad 250.2 **[2 body]**

Určete rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j}$ v R^2. Několik vektorových čar nakreslete.

Řešení:

Vektorové čáry je soustava parabol $y = kx^2$.

Příklad 250.3 **[2 body]**

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ (tj. vypočtěte $\int_c ds$).

Řešení:

$$l = \int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}}\, dt = \pi\sqrt{17}$$

Příklad 250.4 **[3 body]**

Je dáno vektorové pole $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{a}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{a}$.

c) Vypočtěte $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr}$, kde c část paraboly $y = -x^2 + 4$ od bodu $A = [-2, ?]$ do bodu $b = [1, ?]$. Načrtněte křivku c.

Řešení:

b) $\varphi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + C$

c) $\int_c \vec{a} \cdot \vec{dr} = \varphi(-2, 0) - \varphi(1, 3) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 9 = \frac{17}{3}$

WWW.KMA.ZCU.CZ
SINCE 1954
1112094371