Příklady - KI 2. druhu v potenciálovém poli

Je dáno vektorové pole $\vec{u} = 2xy\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$ na $\mathbb{R}_2$.

a) Ukažte, že pole $\vec{u}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{u}$.

c) Vypočtěte $\int_C \vec{u}\ \vec{dr}$, kde C je lomená čára spojující body $[0,0]$, $[1,2]$, $[3,0]$, $[2,-2]$. Křivku načrtněte.

d) Vypočtěte $\int_C \vec{u}\ \vec{dr}$, kde C je křivka $4x^2 + y^2 = 1$. Křivku načrtněte.

Řešení

a) $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x, \quad \dfrac{\partial(x^2 - y)}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial(2xy)}{\partial y} = \dfrac{\partial(x^2 - y)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad$ pole $\vec{u}$ je potenciálové.

b) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \varphi(x, y) = x^2y + \varphi_1(y)$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 - y = x^2 + \varphi_1'(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(y) = -\dfrac{y^2}{2} + C$, C je konst.

Závěr: $\varphi(x, y) = x^2y - \dfrac{y^2}{2} + C$

c) $\displaystyle\int_c \vec{u} \cdot \vec{dr} = \varphi(2, -2) - \varphi(0, 0) = -8.$

d) Křivka je uzavřená (elipsa), je tedy $\displaystyle\int_c \vec{u} \cdot \vec{dr} = 0.$

Je dáno vektorové pole $\vec{u}$ na $\mathbb{R}_2$, kde

1. $\vec{u} = (2x + 3 + y^2)\vec{i} + (2xy + 1)\vec{j}$,
2. $\vec{u} = (2x + y)\vec{i} + (2y + x)\vec{j}$,
3. $\vec{u} = 2xy\vec{i} + (x^2 + 2y + 1)\vec{j}$.

a) Ukažte, že pole $\vec{u}$ je potenciálové.

b) Najděte potenciál $\varphi(x, y)$ pole $\vec{u}$.

c) Vypočtěte $\int_C \vec{u}\ \vec{dr}$, kde C je lomená čára spojující body $[0,0]$, $[1,2]$, $[3,0]$, $[2,-2]$. Křivku načrtněte.

d) Vypočtěte $\int_C \vec{u}\ \vec{dr}$, kde C je křivka $4x^2 + y^2 = 1$. Křivku načrtněte.