1. Definiční obor a hladiny funkce více proměnných

Nalezněte a graficky znázorněte definiční obor D funkce $f = f(x, y)$, kde

a) $f(x,y) = \sqrt{x^3y^3}\,,$

b) $f(x,y) = \log(xy+1)\,,$

c) $f(x,y) = \sqrt{xy-1}\,,$

d) $f(x,y) = \log(2x-y+1)\,,$

e) $f(x,y) = \ln(1-|x-y|)\,,$

f) $f(x,y) = \sqrt{2x+8-x^2-y^2}\,,$

g) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-4}\,,$

h) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1) + \log(16-x^2-16y^2)\,,$

ch) $f(x,y) = \arcsin(xy)\,,$

i) $f(x,y) = \arccos\frac{x}{y}\,,$

j) $f(x,y) = \frac{1}{y-x^3+x^2}\,,$

k) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4x}}{x-1}\,,$

l) $f(x,y) = \arcsin\frac{-x}{y}\,,$

Nalezněte hladiny následujících funkcí. Pro které hodnoty $C \in \mathbb{R}$ jsou hladiny neprázdné množiny?

a) $f(x,y) = x+y-4\,,$

b) $f(x,y) = \frac{x-1}{y-2}\,,$

c) $f(x,y) = x^2+y^2+4x-2y+6\,,$

d) $f(x,y) = x^2+4y^2-3\,,$

e) $f(x,y) = x^2-y^2+5\,,$

f) $f(x,y) = |x|+2|y|\,,$

g) $f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)\,,$

h) $f(x,y) = \sqrt{xy+1}\,.$

2. Limity, derivace a diferenciál funkcí více reálných proměnných, implicitní funkce, tečná rovina

Vypočtěte dvojnásobné limity $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, limitu po přímkách $y = kx$, tj. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)$ a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ pro funkce:

a) $f(x,y) = \frac{x}{y}$

b) $f(x,y) = \frac{x-y}{y+x}$

c) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

f) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{yx}$

g) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{2xy}$

h) $f(x,y) = x \sin \frac{1}{y}$

Rozhodněte o spojitosti fce f v bodě $[0,0]$:

a) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $f(0,0) = 0$ [není spojitá]

b) $f(x,y) = (1 + \sin(x-y))^{\ln|x-y|}$, $f(0,0) = 1$ [je spojitá]

Vypočtěte gradient $\operatorname{grad} f(x_0)$ v bodě x_0, vypočtěte derivaci funkce f podle vektoru $\vec{v}$ v bodě x_0:

a) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2,\ x_0 = [0,0], \vec{v} = (1,1)$,

b) $f(x,y) = x^4y - 2y,\ x_0 = [1,-1], \vec{v} = (1,-2)$,

c) $f(x,y) = \frac{y}{x^2},\ x_0 = [1,-1], \vec{v} = (2,1)$,

d) $f(x,y) = \frac{1}{x^3-2y},\ x_0 = [1,1], \vec{v} = (-1,1)$,

e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ x_0 = [1,0], \vec{v} = (-1,2)$,

f) $f(x,y) = \cos(x)\sin(y),\ x_0 = [0,0], \vec{v} = (0,\pi)$,

g) $f(x,y,z) = x^2y^3 - 4z,\ x_0 = [1,-1,0], \vec{v} = (1,0,3)$,

h) $f(x,y,z) = 2x + y\sqrt{z},\ x_0 = [1,0,1], \vec{v} = (0,1,-1)$,

i) $f(x,y,z) = ze^x + 2y,\ x_0 = [0,0,1], \vec{v} = (2,1,-1)$.

Rozhodněte, zda fce f v bodě $[0,0]$ a ve směru $(1,1)$ roste nebo klesá

c) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin x$, [fce roste]

d) $f(x,y) = -\operatorname{tg} y\, \mathrm{e}^x$, [fce klesá]

Najděte diferenciál funkce f v bodech $[0,0]$ a $[1,1]$

e) $f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0) = 0$ $\left[df = 0dx + 0dy\,,\ df = \frac{1}{2\sqrt{2}}dx + \frac{3}{2\sqrt{2}}dy\right]$

f) Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z = z(x, y)$ dané rovnicí $z^3 - 3xy - 8 = 0$ v bodě $A = [0, 3]$.

3. Tečny k hladinám, tečné roviny, derivace vyšších řádů a Hessova matice.

Pro následující funkce f a body $[x_0, y_0]$ nalezněte tečnu τ k hladině funkce f v bodě $[x_0, y_0]$, tečnou rovinu σ a normálu $\vec{n}$ ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2,\ [x_0, y_0] = [1, -1]$.

b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2,\ [x_0, y_0] = [-2, 1]$.

c) $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - y,\ [x_0, y_0] = [0, 0]$.

d) $f(x, y) = x^2 - y^2,\ [x_0, y_0] = [1, -2]$.

e) $f(x, y) = xy,\ [x_0, y_0] = [1, 1]$.

f) $f(x, y) = xy^2 + x,\ [x_0, y_0] = [-1, 1]$.

g) $f(x, y) = \sin(2x - 4y),\ [x_0, y_0] = [\pi, \frac{\pi}{2}]$.

h) $f(x, y) = xe^{-y},\ [x_0, y_0] = [2, 0]$.

i) $f(x, y) = \sqrt{2x - y},\ [x_0, y_0] = [1, 1]$.

j) $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot y,\ [x_0, y_0] = [4, -1]$.

k) Ke grafu funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ϱ. $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$, $\varrho : 3x + 2y - z = 0$.

$[3(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 3) = 0]$

l) K nulové hladině funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ϱ.
$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, $\varrho : x + 4y + 6z = 0$.
$[(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 2) = 0, \quad (x + 1) + 4(y + 2) + 6(z + 2) = 0]$

Najděte Hessovu matici následujících funkcí f v bodě $[x_0, y_0]$.

a) $f(x, y) = x^3 + xy^2,\ [x_0, y_0] = [-2, 2]$,

b) $f(x, y) = y\sqrt{x},\ [x_0, y_0] = [1, -1]$,

c) $f(x, y) = \sin(4x)\cos(3y),\ [x_0, y_0] = [\frac{\pi}{2}, \pi]$,

d) $f(x, y) = 25x - y,\ [x_0, y_0] = [1, 4]$,

e) $f(x, y) = xy^2z^3,\ [x_0, y_0] = [-2, 1, -1]$.

Derivace vyšších řádů. Vypočítejte:

a) $\frac{\partial^5 (x^3 y^2)}{\partial x^3 \partial y^2}$,

b) $\frac{\partial^{10} \left(e^{2x-3y}\right)}{\partial x^7 \partial y^3}$,

c) $\frac{\partial^4 \left(\frac{xy}{z}\right)}{\partial x \partial y \partial z^2}$,

d) $\frac{\partial^6 (\sin(x)\sin(y)\cos(z))}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$

e) $\frac{\partial^3 (z\sqrt{y-x})}{\partial x \partial y \partial z}$.

4. Optimalizační úlohy

Najděte lokální extrémy funkce f

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x$

b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + xy - x + 2y$

c) $f(x,y) = x^3 + y^3$

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$

f) $f(x,y) = xye^{-xy}$

g) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $\quad [[1,1],[-1,-1]$ min, $\quad [0,0]$ sedlo$]$

h) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ $\quad [[1,2]$ min$]$

i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ $\quad [[-1,-2,3]$ min$]$

j) $f(x,y,z) = xy + z(a - x - 2y - 3z)$ $\quad \left[[\frac{a}{5}, \frac{a}{10}, \frac{a}{10}]\right.$ sedlo$\left.\right]$

k) $f(x,y,z) = x^2 + z^2y - y$

l) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^3 - 6zy$

k) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ $\quad \big[\,[0,\pm 1],[\pm 1,0]$ sedla, $\quad [\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ min, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ max$\big]$

5. Optimalizační úlohy s vazbami.

Najděte lokální extrémy funkce f vzhledem k množině V

a) $f(x,y) = x^2 + y^2\,, \quad V: x + y = -1\,,$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2\,, \quad V: x = 3$ nebo $V: y = 2\,,$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2\,, \quad V: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\,,$

d) $f(x,y,z) = x^2 + 12xy + 2y^2\,, \quad V: 4x^2 + y^2 = 25\,,$
$\left[[\frac{3}{2},4],[-\frac{3}{2},-4]\right.$ max, $\quad [2,-3],[-2,3]$ min$\left.\right]$

e) $f(x,y) = -x^2 + xy - 2y\,, \quad V = \{[x,y] \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5y \le 0\}.$

f) $f(x,y) = x^2 - y^3 - xy\,, \quad V = \{[x,y] \in \mathbb{R} \mid x + 1 \ge 0\,,\ -1 \le y \le 1 - x\}.$

g) $f(x,y) = x^2 - xy + 2y\,, \quad V = \{[x,y] \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5y \le 0\}.$

h) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z\,, \quad V: x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,$
$[[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ max, $\quad [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$ min$]$

i) $f(x,y,z) = xy + yz\,, \quad V: x^2 + y^2 = 2\,,\ y + z = 2\,,\ x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ z \ge 0$ $\quad [[1,1,1]$ max$]$

j) $f(x,y,z) = x + y + z\,, \quad V: x^2 + y^2 \le z \le 1\,,$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\right.$ min, $\quad 1 + \sqrt{2}$ max$\left.\right]$

k) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2\,, \quad V: x^2 + y^2 + z^2 \le 100\,,$ $\quad [0$ min, $\quad 300$ max$]$

6. Dvojné a trojné integrály.

Načrtněte množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a najděte meze integrálů $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$, kde Ω je dána:

a) $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 3; -1 \le y \le 2\}$

b) vnitřek trojúhelníka tvořeného body $[0,0], [1,0], [0,2]$.

c) vnitřek čtyřúhelníka tvořeného body $[0;0], [2;4], [4;0], [3;-3]$.

d) plocha mezi křivkami x^2 a $2-x$.

e) $\Omega = \{(x,y) : 1-x \le y \le e^x;\ x \le 1\}$

f) $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2-2x-4y-4 \le 0\}$

g) $\Omega = \{(x,y) : x^2+4y^2 \le 4;\ x \ge 0;\ y \ge 0\}$

h) $\Omega = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4;\ y \ge 0\}$

i) $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2x;\ x \ge 1\}$

Vypočítejte

a) $\iint\limits_{y^2 \le x \le y+2} y\,\mathrm{e}^x\,dx\,dy$ $\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + \frac{5}{2}\mathrm{e}\right]$

b) $\iint\limits_{x^2 \le y \le \sqrt{16-x^2}} \frac{x}{(1+y)^2}\,dx\,dy$ $[0]$

c) $\iint\limits_{1 \le x^2 \le y^2 \le 4} |x\,y|\,dx\,dy$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

d) $\iint\limits_{S} \frac{1}{x+y+1}\,dx\,dy$, kde S je trojúhelník s vrcholy $[1,2], [5,2], [4,4]$

$\left[\frac{1}{5}(144\ln 3 - 224\ln 2)\right]$

e) $\iint\limits_{S} |x|\,dx\,dy$, kde S je dána nerovnostmi $x^2 \le y$, $4x^2+y^2 \le 12$

$\left[4\sqrt{3} - \frac{10}{3}\right]$

f) $\iint\limits_{S} |x|\,dx\,dy$, kde S je dána nerovností $x^2+y^2 \le 9$,

Vypočtěte trojné integrály.

a) $\iiint\limits_{V} \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz$, kde V je dána nerovnostmi, $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$, $0 \le x$, $0 \le y$

$\left[-\frac{1}{60} + \frac{1}{16}\ln 5\right]$

b) $\iiint\limits_{V} x^2yz^3\,dx\,dy\,dz$, kde V je dána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le xy$ $\left[\frac{1}{312}\right]$

c) $\iiint\limits_{V} \frac{x+y}{4+z}\,dx\,dy\,dz$, kde V je dána nerovnostmi $x+y \le 3$, $0 \le y$, $0 \le x$, $0 \le z \le 4$ $[9\ln 2]$

d) $\iiint\limits_{V} \frac{xy}{(4+z)^2}\,dx\,dy\,dz$, kde V je dána nerovnostmi $x^2+y^2 \le 4z \le 16$ $[0]$

e) $\iiint\limits_{V} x^2yz\,dx\,dy\,dz$, kde V je dána nerovnostmi $4x^2+y^2+z^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$

$\left[-\frac{1}{2^3}\frac{1}{105}\right]$