Část I.

AKUSTIKA

Sekce 1.

Mechanické vlnění

A.D. Pajdarová (ZČU)
KFY/FYSV (19/20)

Matematický aparát I

Skalární a vektorové pole

- Ve fyzice se často setkáváme s veličinami, které závisejí na poloze bodu v prostoru (navíc mohou a často bývají závislé i na čase). Polohu bodu v prostoru udává ***polohový vektor*** $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$ (též často ***rádius vektor***).
- Je-li tato fyzikální veličina skalár (tj. číslo s jednotkou), říkáme, že jde o ***skalární funkci bodu*** (např. potenciál gravitačního pole $\varphi(\boldsymbol{r},t)$, hustota tělesa $\rho(\boldsymbol{r},t)$ atd.). Je-li tato veličina vektor (má velikost, směr a jednotku), hovoříme o ***vektorové funkci bodu*** (např. intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},t)$, tíhové pole $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)$ atd.). Říkáme též, že v uvažované části prostoru je dáno ***skalární pole***, resp. ***vektorové pole***.
- U vektorové funkce bodu $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ budeme předpokládat, že ji lze zapsat jako součet složek vektoru $\boldsymbol{A}$ (tj. skalárních funkcí bodu) v podobě

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = A_x(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{i} + A_y(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{j} + A_z(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{k}.$$

Matematický aparát I

Skalární součin - opakování

- Obecná definice:

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\,\cos\varphi,} \tag{I.1.1}$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$

- Skalární součin bude ***vždy značen tečkou mezi vektory*** (angl. dot product)
- Z definice plyne, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ tehdy, když aspoň jeden vektor je nulový, nebo vektory jsou na sebe kolmé.
- V eukleidovském 3D prostoru platí:

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.} \tag{I.1.2}$$

Matematický aparát I

Parciální derivace 1/5

- Ve vícerozměrném prostoru se změna jisté veličiny (např. potenciální energie $E_\mathrm{p}(\boldsymbol{r}, t) = E_\mathrm{p}(x, y, z, t)$) nemusí odehrávat jen při změně jednoho parametru (např. souřadnice x, anebo času t), ale obecně se může měnit při změně více parametrů $\Rightarrow$ je nutné rozšířit matematický popis změn funkcí dle jejich proměnných.
- Pro jednoduchost se budeme zabývat jen funkcí dvou proměnných a jako vzorovou funkci si vezmeme $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
- Provedeme to jednoduše tak, že změnu budeme sledovat pouze u jedné proměnné a s ostatními budeme zacházet jako s konstantami, např. položíme $y = \text{konst.} = 1$, pak:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{y=\text{konst.}=1} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y=1} = 2x + y\,|_{y=1} = 2x + 1.$$

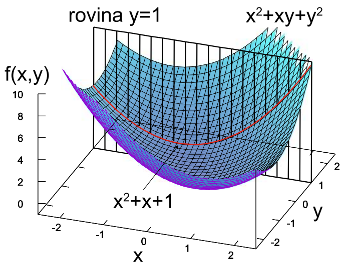
Matematický aparát I

Parciální derivace 2/5

• Jelikož postup, kdy se u derivace jiné proměnné považují za konstanty, se užívá velmi často, má tato derivace speciální značení (zde derivace podle x)

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

a nazývá se ***parciální (částečná) derivace***.



Obrázek I.1.1: K vysvětlení parciální derivace. Z funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ (modrá plocha) je rovinou $y = 1$ (černě šrafovaná plocha) vytvořen řez $f(x, 1) = x^2 + x + 1$ (červená čára). Derivace $f(x, 1)$ podle x je poté $2x + 1$. Adaptováno z wikipedia.org, IkamusumeFan

Matematický aparát I

Parciální derivace 3/5

• Obecná matematická definice: ***Parciální derivace*** (PD) funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ podle proměnné x_i je dána limitou

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n)}{h}.} \tag{I.1.3}$$

• Tato definice je vlastně shodná s definicí derivace funkce jedné proměnné, pokud ostatní proměnné, pode kterých nederivujeme, považujeme za konstantní parametry. Takto také PD počítáme. Pro PD tak platí všechny poučky jako pro derivaci funkce jedné proměnné.

$$\frac{\partial(x^3 + x/y + y^2)}{\partial y} = -x/y^2 + 2y, \qquad \frac{\partial[xyt + \sin(2\omega t)]}{\partial t} = xy + 2\omega\cos(2\omega t)$$

Matematický aparát I

Parciální derivace 4/5

- Pro PD můžeme také vytvářet derivace vyšších řádů (výpočet je opět podobný jako pro 1D funkce), pro $f(x,y) = x^3 + x/y + y^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2\frac{x}{y^3} + 2$$

- U tzv. smíšených derivací je nutné dávat pozor na pořadí derivování (stejná f jako výše):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{1}{y^2}$$

Matematický aparát I

Parciální derivace 5/5

- V předchozím případě nám vyšel stejný výsledek pro obě smíšené derivace. ***TO VŠAK OBECNĚ NEPLATÍ!*** Tak kdy lze očekávat stejný výsledek? Odpovídá na to následující věta:

(Věta o záměnnosti PD): Má-li funkce $f(x,y)$ v bodě (x_0, y_0) spojité smíšené parciální derivace $\partial^2 f/\partial x\partial y$ a $\partial^2 f/\partial y\partial x$, pak jsou si tyto derivace rovny.

- Vše předchozí (včetně záměnnosti PD) lze zobecnit na libovolně rozměrný prostor a libovolný stupeň PD. U záměnnosti je jen potřeba dbát na stejný stupeň u PD a proměnných v nich vystupujících, např.:
Jsou-li spojité smíšené derivace $\partial^4 f/\partial x\partial y^2\partial z$ a $\partial^4 f/\partial x\partial z\partial y^2$, pak jsou si rovny.
- Ve FYSV se však budeme setkávat maximálně s PD 2. stupně v trojrozměrném eukleidovském prostoru s časem jako další proměnnou (záměrně nepíši čtyřrozměrném časoprostoru — relativitu zde necháme spát).

Matematický aparát I

Totální diferenciál 1/2

- Jak již víte, změnu funkce (diferenci) $\Delta f(x_0)$ v bodě x_0 při změně (diferenci) její proměnné Δx lze aproximovat výrazem $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Aproximace bude tím lepší, čím menší bude Δx. V limitě, kdy $\Delta x \to 0$, pak získáme ***diferenciál funkce*** $f(x)$ v bodě x_0 ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \mathrm{d}x.$$

- Pro vícerozměrné funkce pak zavádíme ***parciální diferenciály*** předpisem

$$\mathrm{d}_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i.$$

Matematický aparát I

Totální diferenciál 2/2

- ***Totální diferenciál*** je pak dán prostým součtem parciálních diferenciálů pro všechny proměnné vícerozměrné funkce, tj. pro 3D

$$\boxed{\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z.} \qquad \text{(I.1.4)}$$

- ***Využití***: Totální diferenciál nám umožňuje zjistit, jak se změní hodnota funkce při „malé změně“ jejích argumentů.
- Často se totální diferenciál zapisuje jako skalární součin dvou vektorů. Pro 3D bude

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k}),$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k}$ je změna polohového vektoru $\boldsymbol{r}$.

Matematický aparát I

Gradient 1/2

- ***Gradient*** ve 3D je vektor definovaný rovností

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},} \qquad \text{(I.1.5)}$$

pak totální diferenciál lze zapsat jako skalární součin

$$\boxed{\mathrm{d}f = \operatorname{grad} f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.} \qquad \text{(I.1.6)}$$

- Symbol

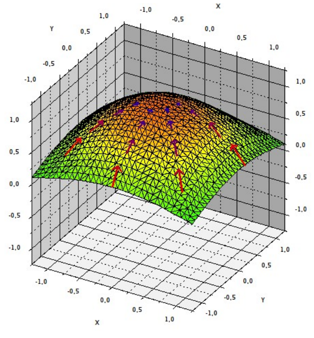
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

se nazývá ***nabla operátor***, který musí působit na nějakou skalární funkci, aby bylo možno výraz vyčíslit.

Matematický aparát I

Gradient 2/2

- Určeme velikost totálního diferenciálu pomocí základního vztahu pro skalární součin, tj. $\mathrm{d}f = |\operatorname{grad} f|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\,\cos\varphi$. Velikost $\mathrm{d}f$ bude největší a kladná, když $\cos\varphi = 1$, tj. když $\varphi = 0$. To však znamená, že vektory $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ a $|\operatorname{grad} f|$ jsou souhlasně kolineární (mají stejný směr). Odsud dostáváme velmi důležitý význam gradientu:
- ***Vektor*** $\operatorname{grad} f$ ***udává směr, v němž funkce*** f ***nejrychleji roste.***



Obrázek I.1.2: Část grafu funkce $f(x, y) = \cos(x)\sin(y)$. Šipky na uvedené ploše reprezentují vektor gradientu v místě, z něhož vycházejí. Červená barva šipek udává ostřejší růst, modrá pak růst pomalejší. Adaptováno z cs.wikipedia.org, Petr Kopač.

Vlnění v prostoru

Vlnění

~ časově a prostorově periodický nebo kvaziperiodický děj spojený s přenosem energie. (viz FYAI)

Mechanické vlnění

~ vlnový pohyb látkového prostředí.

- Předpokladem jeho vzniku je pružné látkové prostředí a zdroj oscilací.

Akustická výchylka $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$

~ výchylka elementu prostředí na prostorové souřadnici $\boldsymbol{r}$ v čase t z jeho rovnovážné polohy ($[\boldsymbol{u}] = \mathrm{m}$).

- Je-li znám směr výchylky, uvádí se pouze její velikost, tj. $u(\boldsymbol{r}, t)$.

Vlnění v prostoru

Polarizace vlnění

- Element prostředí se může vychylovat stále stejným způsobem (kmitá na úsečce, opisuje kružnici či elipsu apod.). Pak říkáme, že ***vlnění je polarizované***.

Důležité jsou především tři případy:

1. výchylka je rovnoběžná se směrem šíření vlnění – tzv. ***podélné (longitudinální) vlnění***
2. výchylka je kolmá ke směru šíření vlnění – tzv. ***příčné (transverzální) vlnění***
3. výchylky všech elementů jsou kolmé ke směru šíření vlnění, a navíc leží ve stejné rovině – tzv. ***lineárně polarizované vlnění*** (jedná se o zvláštní případ příčného vlnění)

Vlnění v prostoru

Perioda vlnění T

~ nejkratší doba, za niž se element prostředí dostane zpět do výchozího stavu ($[T] = \mathrm{s}$).

• ***Frekvence*** udává počet opakování periodického děje za jednotku času a je dána vztahem

$$\boxed{f = \frac{1}{T}, \quad [f] = \mathrm{Hz(hertz)} = \mathrm{s}^{-1}.} \tag{I.1.7}$$

Vlnová délka λ

~ vzdálenost, o kterou vlnění postoupí za dobu jedné periody.

$$\boxed{\lambda = c\,T, \quad [\lambda] = \mathrm{m},} \tag{I.1.8}$$

kde c je rychlost šíření vlnění v daném prostředí ($[c] = \mathrm{m\,s^{-1}}$).

Vlnění v prostoru

Harmonické vlnění

~ vlnění, jehož časový a prostorový průběh je vyjádřen harmonickými funkcemi ($\sin$ a $\cos$).

• Zde je důležitou veličinou ***úhlová frekvence*** ω, která je definována rovností

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad [\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}.} \tag{I.1.9}$$

Význam harmonického vlnění

• Dovoluje konstrukci libovolných periodických průběhů ve formě Fourierovy řady (viz přednášky matematiky).

• Pomocí Fourierova integrálu lze dokonce vyjádřit i průběhy neperiodické.

Vlnění v prostoru

- K popisu vlnového pohybu z hlediska samotných elementů prostředí zavádíme veličiny:

Akustická rychlost $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}, \quad [v_{\mathrm{a}}]=\mathrm{m\,s^{-1}}.} \tag{I.1.10}$$

- Ak. rychlost říká, jak se mění ak. výchylka elementu s časem.

Akustické zrychlení $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}, \quad [a_{\mathrm{a}}]=\mathrm{m\,s^{-2}}.} \tag{I.1.11}$$

- Ak. zrychlení říká, jak se mění ak. rychlost elementu s časem.

Vlnění v prostoru

Vlnová rovnice ve 3D

- Netlumené vlnění musí splňovat vlnovou rovnici, kterou lze ve 3D zapsat ve tvaru (viz FYAI)

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=0,} \tag{I.1.12}$$

kde ∇^2 je tzv. Laplaceův operátor definovaný vztahem

$$\nabla^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})}{\partial z^2} \tag{I.1.13}$$

a c je rychlost šíření vlnění v daném prostředí.

- Je nutné si uvědomit, že $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=u_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{i}+u_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{j}+u_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}$. Rovnice (I.1.12) je tudíž soustavou 3 rovnic pro 3 složky vektoru $\boldsymbol{u}$!

Vlnění v prostoru

Význam vlnové rovnice

• Odvodíme-li z rovnic popisujících vlastnosti zvoleného prostředí rovnici ve tvaru (I.1.12), znamená to, že

1. daným prostředím se může vlnění šířit,
2. porovnáním odvozené vlnové rovnice s tvarem (I.1.12) získáme rychlost vlnění v daném prostředí.

Vztah k ostatním oblastem fyziky

• Rovnici podobného tvaru lze odvodit i pro jiné obory fyziky (např. elektromagnetické pole, „pravděpodobnostní vlny“ v kvantové mechanice atd.).

• Lze proto říci: ***Vlnová rovnice je vyjádřením univerzálních zákonitostí přírodních jevů.***

Vlnění v prostoru

• Abychom si lépe představili šíření vlnění v prostoru, zavádíme dva pomocné geometrické pojmy:

Vlnoplocha

~ geometrická místa v prostoru, do nichž vlnění dospělo ve stejném čase.

• Různé vlnoplochy se navzájem neprotínají. Obvykle se znázorňují vlnoplochy, které jsou vůči sobě posunuty o vlnovou délku. V homogenním prostředí mají výchylky na vlnoploše stejnou velikost.

Paprsek vlnění

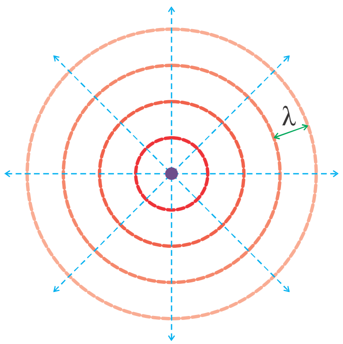
~ přímka ležící ve směru šíření vlnění.

• Z definice plyne, že paprsky jsou kolmé k vlnoploše.

Vlnění v prostoru

Kulová vlna

• Je-li zdrojem vlnění bodový element prostředí a je-li prostředí homogenní a izotropní, dospěje vlnění za stejný čas do stejných vzdáleností od zdroje, vznikají tak kulové vlnoplochy, jejichž střed leží ve zdroji vlnění (viz obr. I.1.3).

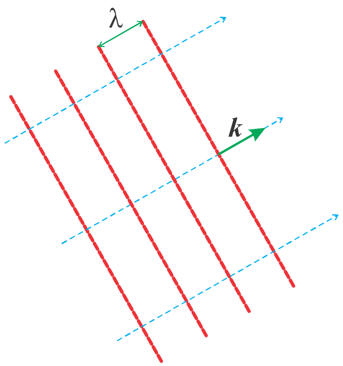


Obrázek I.1.3: Vyobrazení vlnoploch (silné čáry) a paprsků (tenké čáry) kulové vlny v homogenním izotropním prostředí. Vlnoplochy jsou zobrazeny posunuté o vlnovou délku vlnění λ.

Vlnění v prostoru

Rovinná vlna

• S rostoucí vzdáleností se křivost kulových vln zmenšuje, a tak lze v malém prostorovém úhlu nahradit kulové vlnoplochy rovinami a mluvit o rovinném vlnění (viz obr. I.1.4).



Obrázek I.1.4: Vyobrazení vlnoploch (silné čáry) a paprsků (tenké čáry) rovinné vlny v homogenním izotropním prostředí. Vlnoplochy jsou zobrazeny posunuté o vlnovou délku vlnění λ. Vlnový vektor $\boldsymbol{k}$ udává směr šíření vlny a je souhlasně rovnoběžný s paprsky vlnění.

Vlnění v prostoru

Vlnový vektor $\boldsymbol{k}$

~ je vektorová veličina, jejíž směr udává směr šíření vlny v daném místě a jejíž velikost je rovna

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}, \qquad [k] = \mathrm{rad\,m^{-1}}} \tag{I.1.14}$$

Rovnice harmonické kulové vlny

- Kulová harmonická vlna může být v homog. izotr. prostředí popsána rovnicí

$$\boxed{u(r,t) = \frac{u_\mathrm{m}}{r}\sin(\omega t - kr),} \tag{I.1.15}$$

kde u_m je amplituda vlnění a r je vzdálenost od zdroje vlnění.

Vlnění v prostoru

Rovnice harmonické rovinné vlny

- Rovinná harmonická vlna může být v homog. izotr. prostředí popsána vztahem

$$\boxed{u(\boldsymbol{r},t) = u_\mathrm{m}\sin(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}).} \tag{I.1.16}$$

Fáze

- Výrazům $\omega t - kr$ a $\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ se říká ***fáze vlny***.
- Výraz $\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \mathrm{konst.}$ vlastně určuje pro rovinné vlnění fázové roviny v prostoru, jelikož pro dané t je $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \omega t - \mathrm{konst.} = \mathrm{konst.}'$ rovnice roviny (viz rovnice roviny ve tvaru $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x} = d$).

Vlnění v prostoru

Zjednodušení

- Je-li směr $\boldsymbol{k}$ stále stejný, můžeme otočit $O(x, y, z)$ tak, aby osa x směřovala ve směru $\boldsymbol{k}$, pak se (I.1.16) zjednoduší na tvar (ten budeme dále používat)

$$\boxed{u(x, t) = u_\mathrm{m} \sin(\omega t - kx) = u_\mathrm{m} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right).} \tag{I.1.17}$$

Fázový posuv

- Má-li zdroj vlnění jistý fázový posun φ, či je mimo počátek $O(x, y, z)$, je třeba k jednoduchým fázím v (I.1.15)–(I.1.17) připočítat ***fázový posuv*** φ (použití viz P2), tj.

$$\omega t - kr + \varphi, \quad \omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi, \quad \omega(t - x/c) + \varphi.$$

Vlnění v prostoru

- S využitím (I.1.10) a (I.1.11) obdržíme:

Ak. rychlost rovinné harm. vlny

$$v_\mathrm{a}(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \underbrace{\omega u_\mathrm{m}}_{v_\mathrm{m}} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{I.1.18}$$

Ak. zrychlení rovinné harm. vlny

$$a_\mathrm{a}(x, t) = \frac{\partial v_\mathrm{a}(x, t)}{\partial t} = -\underbrace{\omega^2 u_\mathrm{m}}_{a_\mathrm{m}} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) = -\omega^2 u(x, t) \tag{I.1.19}$$

- Odsud plyne, že v_a je vůči u posunuta ve fázi o $\pi/2$ a a_a je vůči u v protifázi (posun o π).

Huyghensův princip

Princip superpozice

• Šíří-li se prostředím více vln současně, vyvolají v daném místě a čase výslednou výchylku $\boldsymbol{u}$, která je dána součtem výchylek jednotlivých vlnění $\boldsymbol{u}_i$.

$$\boxed{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{r},t)} \tag{I.1.20}$$

Interference vlnění

~ proces skládání vlnění dle principu superpozice.

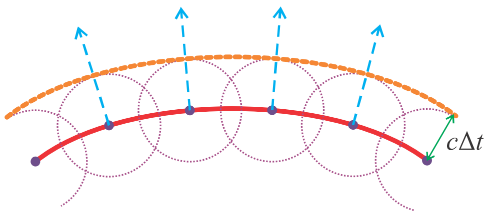
• Dojde-li ke zvýšení amplitudy výsledného vlnění, hovoříme o ***konstruktivní interferenci***. Dojde-li naopak ke snížení výsledné amplitudy, mluvíme o ***destruktivní interferenci***.

Huyghensův princip

Huyghensův princip

• ***Vlnění se šíří prostředím tak, že všechny body, do nichž vlnění dospěje, se stávají bodovými zdroji elementárních vlnoploch. Výsledná vlnoplocha je obálkou všech těchto elementárních vlnoploch ve směru, v němž se vlnění šíří.***

• Huyghensův princip umožňuje konstrukci vlnoploch při odrazu, lomu a ohybu vlnění.

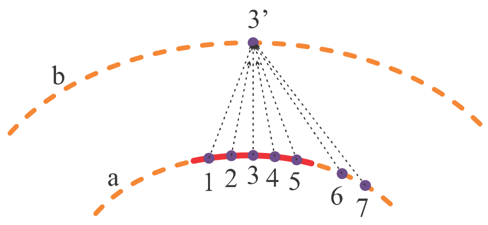


Obrázek I.1.5: Ilustrace Huyghensova principu. Silná plná čára je vlnoplocha v čase t a silná čárkovaná čára vyznačuje vlnoplochu v čase $t + \Delta t$, která je obálkou elementárních sférických vlnoploch (tenké tečkované čáry).

Huyghensův princip

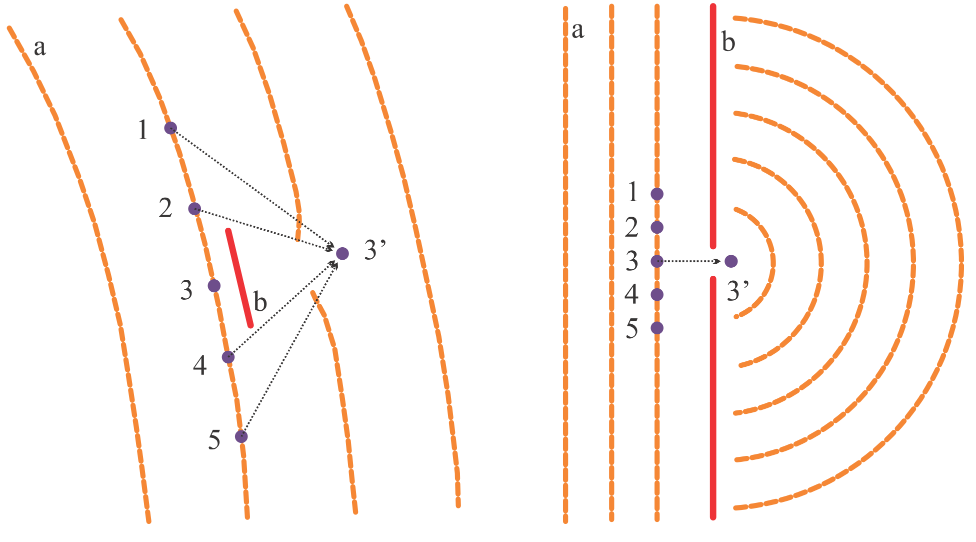
Účinná část vlnoplochy

- Na tvorbě výchylky v bodě nové vlnoplochy se však podílí jen malá část původní vlnoplochy, které říkáme ***účinná část vlnoplochy*** a jejíž velikost je srovnatelná s vlnovou délkou vlnění.
- Účinná část vlnoplochy dovoluje vysvětlit chování vlnění při ohybu na překážkách s různou relativní velikostí oproti vlnové délce.



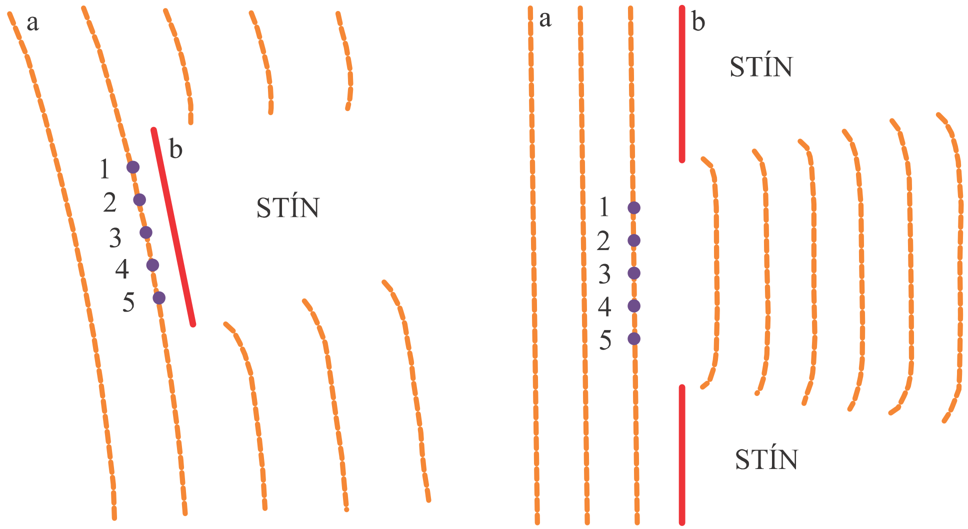
Obrázek I.1.6: Ilustrace účinné části vlnoplochy (silná plná čára). Na tvorbě výchylky v bodě $3'$ na nové vlnoploše b se podílejí jen body okolo bodu 3 z původní vlnoplochy a (body 1 – 5). Body 6 a 7 se již na tvorbě výchylky v bodě $3'$ nepodílejí.

Huyghensův princip



Obrázek I.1.7: Ilustrace ohybu vlnění (vlnoplochy značeny a) v případě, že překážka či otvor (označeno b) jsou menší než vlnová délka vlnění ($d \ll \lambda$).

Huyghensův princip



Obrázek I.1.8: Ilustrace ohybu vlnění (a) v případě, že překážka či otvor (b) jsou větší než vlnová délka vlnění ($d \gg \lambda$)

Huyghensův princip

Odraz a lom vlnění – ***D.Cv.***

- Ze zdrojů (viz přehled literatury) nastudovat odraz a lom vlnění.
- Budou požadovány znalosti následujících pojmů: úhel dopadu, úhel odrazu, úhel lomu, zákon odrazu, zákon lomu, rovnice zákona lomu, totální odraz, mezní úhel.

Rychlost šíření vlnění

Obecný vztah pro rychlost šíření vlnění

- Je-li prostředí homogenní a izotropní, lze odvodit (viz P1)

$$\boxed{c = \sqrt{K/\rho}, \quad [c] = \mathrm{m\,s^{-1}},} \tag{I.1.21}$$

kde K je modul objemové pružnosti a ρ je hustota prostředí.

Rychlost vlnění v plynu

- Vlnění je vždy podélné (longitudinální).
- Je-li frekvence vlnění dostatečná (stlačování a rozpínání plynu je adiabatický proces), lze psát

$$K = \kappa p_\mathrm{s}, \tag{I.1.22}$$

kde κ je Poissonova konstanta a p_s je stacionární tlak v plynu.

Rychlost šíření vlnění

Rychlost vlnění v kapalině

- V neohraničené kapalině je vlnění též podélné (longitudinální) a pro K platí výraz (I.1.22). Při ohraničení se charakter vlnění mění.
- U stěn (např. v potrubí) existuje tzv. stěnová vrstva, která snižuje rychlost vlnění v důsledku jejího přilnávání ke stěně.
- Na volné hladině konají elementy kapaliny oválný pohyb.

Rychlost vlnění v pevné látce (1/2)

- V rozměrnějších tělesech vzniká jak vlnění podélné (longitudinální), tak i vlnění příčné (transverzální), přičemž jejich rychlosti jsou rozdílné.
- Podélné vlnění je přenášeno normálovým napětím ve směru deformace tělesa, kdežto příčné vlnění přenáší napětí tečné.

Rychlost šíření vlnění

Rychlost vlnění v pevné látce (2/2)

- Rychlosti vlnění jsou dány vztahy

$$c_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{G}{\rho}\frac{(2-2\mu)}{(1-2\mu)}} \quad \text{a} \quad c_\mathrm{t} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \tag{I.1.23}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku a μ je Poissonovo číslo.

- Pro kovy bývá $\mu \approx 0{,}3$, pak $c_\mathrm{l} \approx 2c_\mathrm{t}$.
- U dlouhých tyčí lze K v (I.1.21) nahradit modulem pružnosti v tahu E.
- U napnutých strun se pokládá $K = \sigma_\mathrm{n}$, kde σ_n je normálové napětí v materiálu.
- Měřením c_l a c_t lze určovat G a μ, a tím i pevnost materiálu na dokončených stavbách, stav procesu tvrdnutí betonu apod.

Přenos energie vlněním

Akustický tlak p_a

- V tekutinách se vlnění přenáší změnami tlaku, které tvoří střídavou složku tlaku statického p_s (tlak v tekutině bez přítomnosti vlnění).
- Dle odvození rychlosti vlnění (viz P1), je tato střídavá složka rovna

$$\boxed{p_\mathrm{a}(x,t) = -K\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad [p_\mathrm{a}] = \mathrm{Pa(pascal)} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}.} \tag{I.1.24}$$

- Pro sinové vlnění (I.1.17) bude

$$p_\mathrm{a}(x,t) = -K\frac{\partial}{\partial x}\left[u_\mathrm{m}\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] = \overbrace{Ku_\mathrm{m}\frac{\omega}{c}}^{p_\mathrm{m}}\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right).$$

Přenos energie vlněním

- Protože $K = \rho c^2$ a $\omega u_\mathrm{m} \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = v_\mathrm{a}(x,t)$, lze psát $p_\mathrm{a}(x,t) = \rho c v_\mathrm{a}(x,t) = Z_0 v_\mathrm{a}(x,t)$, kde Z_0 je konstanta pro dané prostředí.
- Podobně bude $p_\mathrm{m} = Z_0 v_\mathrm{m} = Z_0 \omega u_\mathrm{m}$.

Vlnový odpor Z_0

- Vlnový odpor je definován výrazem

$$\boxed{Z_0 = \frac{p_\mathrm{m}}{v_\mathrm{m}}, \quad [Z_0] = \mathrm{R(rayl)} = \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}.} \tag{I.1.25}$$

- ***Vlnový odpor charakterizuje vlnové vlastnosti prostředí.***
- Není-li přítomný útlum v prostředí, platí jednoduchý vztah

$$Z_0 = \rho c. \tag{I.1.26}$$

- Pro vzduch za normálních podmínek je $Z_0 \approx 400\,\mathrm{R}$.

Přenos energie vlněním

- Rychlost $v_\mathrm{a}(t)$ uděluje elementu hmotnosti m časově proměnnou kinetickou energii $E_\mathrm{k}(t) = \frac{1}{2} m v_\mathrm{a}^2(t)$. Její střední hodnota bude

$$\langle E_\mathrm{k}(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_\mathrm{k}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} m \frac{1}{T}\int_0^T v_\mathrm{a}^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} m v_\mathrm{ef}^2.$$

Efektivní rychlost v_ef

- Zavádíme ji jako

$$\boxed{v_\mathrm{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v_\mathrm{a}^2(t)\,\mathrm{d}t}, \quad [v_\mathrm{ef}] = \mathrm{m\,s^{-1}}.} \tag{I.1.27}$$

- ***Efektivní rychlost udává konstantní rychlost, při níž by měla částice prostředí střední kinetickou energii rovnající se časové střední hodnotě kinetické energie při dané proměnné akustické rychlosti.***

Přenos energie vlněním

- Pro sinové vlnění to znamená řešit integrál

$$v_{\mathrm{ef}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v_{\mathrm{m}}^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\,\mathrm{d}t.$$

- Integrál se řeší substitucí $\xi = \omega(t - x/c)$ a identitou $\cos^2 \xi = \frac{1+\cos 2\xi}{2}$.

Efektivní rychlost harmonického vlnění

- Efektivní rychlost v případě harmonického vlnění je

$$\boxed{v_{\mathrm{ef}} = \frac{v_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}.} \qquad \text{(I.1.28)}$$

Přenos energie vlněním

- Při vychylování z rovnovážné polohy získává element i časově závislou potenciální energii $E_{\mathrm{p}}(t)$. Jelikož pro harmonický oscilátor platí, že $\langle E_{\mathrm{k}}(t)\rangle = \langle E_{\mathrm{p}}(t)\rangle$ (viz FYAI), bude pro celkovou střední mechanickou energii platit

$$\langle E_{\mathrm{celk}}(t)\rangle = \langle E_{\mathrm{k}}(t) + E_{\mathrm{p}}(t)\rangle = \langle E_{\mathrm{k}}(t)\rangle + \langle E_{\mathrm{p}}(t)\rangle = 2\langle E_{\mathrm{k}}(t)\rangle = m v_{\mathrm{ef}}^2.$$

- Celkovou akustickou energii pak získáme sečtením celkových středních mechanických energií všech elementů $E_{\mathrm{a}} = \sum \langle E_{\mathrm{celk}}(t)\rangle = \sum m v_{\mathrm{ef}}^2$.
- Přechodem k integrálu (zavedením $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$) obdržíme

Celková akustická energie E_{a}

$$\boxed{E_{\mathrm{a}} = \int_V \rho v_{\mathrm{ef}}^2\,\mathrm{d}V, \quad [E_{\mathrm{a}}] = \mathrm{J(joule)} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}.} \qquad \text{(I.1.29)}$$

Přenos energie vlněním

Objemová hustota akustické energie w_a

- Platí pro ni

$$\boxed{w_a = \frac{dE_a}{dV} = \rho v_{ef}^2, \quad [w_a] = \mathrm{J\,m^{-3}},} \tag{I.1.30}$$

tj. objemová hustota ak. energie je celková ak. energie obsažená v jednotce objemu.

- ***Objemová hustota akustické energie udává rozdělení energie vlnového pohybu mezi částice prostředí.***
- Z tohoto důvodu je praktičtější než E_a, kterou můžeme ze znalosti w_a vypočítat jako

$$E_a = \int_V w_a \, dV.$$

Přenos energie vlněním

- Okamžitý výkon vlnění určíme na základě rovnice $P = F_a v_a = S p_a v_a$, kde F_a je akustická síla a S je velikost plochy, kterou vlnění prochází kolmo. Střední hodnota výkonu pak bude

$$\langle P \rangle = S \frac{1}{T} \int_0^T p_a v_a \, dt = S Z_0 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T v_a^2 \, dt}_{v_{ef}^2}.$$

Akustický výkon P_a

~ charakterizuje míru přenosu energie vlněním.

$$\boxed{P_a = S Z_0 v_{ef}^2, \quad [P_a] = \mathrm{W(watt)} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}.} \tag{I.1.31}$$

- ***Ak. výkon je střední hodnota výkonu přenášeného vlněním.***

Přenos energie vlněním

Akustická intenzita I_a

~ je plošná hustota ak. výkonu, tj.

$$\boxed{I_a = \frac{dP_a}{dS} = Z_0 v_{ef}^2 = w_a c, \quad [I_a] = \mathrm{W\,m^{-2}},} \tag{I.1.32}$$

kde S je plocha kolmá na směr šíření vlnění.

• ***Ak. intenzita vlnění udává střední hodnotu ak. energie, která projde za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na směr šíření vlnění.***

• Není-li daná plocha kolmá k směru šíření vlnění, musíme počítat s jejím kolmým průmětem, tj.

$$I_a = \frac{dP_a}{dS\cos\gamma}, \tag{I.1.33}$$

kde γ je úhel, který svírá normála plochy se směrem šíření vlnění.

Útlum vlnění v prostředí

• Reálné oscilátory vykazují tlumení (důsledek tření či jiných odporových sil), což vede k útlumu vlnění šířícího se prostředím.

• ***Předpoklad:*** Relativní pokles amplitudy vlny je úměrný přírůstku vzdálenosti, tj.

$$-\frac{du_m}{u_m} = \alpha\,dx. \tag{I.1.34}$$

Pokles amplitudy se vzdáleností

• Řešením rovnice (I.1.34) obdržíme pro amplitudu vlnění tvar

$$\boxed{u_m = u_{m0}\exp(-\alpha x),} \tag{I.1.35}$$

kde u_{m0} je amplituda vlnění u zdroje a α je ***koeficient zeslabení*** ($[\alpha] = \mathrm{m^{-1}}$), který charakterizuje tlumivé vlastnosti prostředí.

Útlum vlnění v prostředí

Tlumená rovinná harmonická vlna

- Získáme ji doplněním závislosti amplitudy na vzdálenosti do (I.1.17), pak

$$\boxed{u(x,t) = u_{\mathrm{m}0} \exp(-\alpha x) \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right).} \tag{I.1.36}$$

Ak. intenzita tlumené vlny

- Uvědomíme-li si, že $I_{\mathrm{a}} \sim u_{\mathrm{m}}^2$, lze zapsat

$$\boxed{I_{\mathrm{a}}(x) = I_{\mathrm{a}0} \exp(-2\alpha x),} \tag{I.1.37}$$

kde $I_{\mathrm{a}0}$ je ak. intenzita vlnění u zdroje.

- Z podílu ak. intenzit v různých místech lze stanovit koef. zeslabení (viz P3).

Útlum vlnění v prostředí

Příčiny ztrát v prostředí

- Lze je rozdělit do dvou skupin:

1. Ztráty vnitřním třením v látkovém prostředí.
   V tekutině je jeho mírou viskozita η. Pro koef. zeslabení pak platí relace:

$$\alpha \sim \eta, \quad \alpha \sim \frac{1}{Z_0}, \quad \text{a} \quad \alpha \sim \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. Částečné vyrovnávání teplot mezi místy maxim a minim ak. tlaku.
   Toto závisí na koef. tepelné vodivosti κ. Jev se nepatrně projevuje v plynech, více v kapalinách a nejvíce v pevných látkách.

Útlum vlnění v prostředí

Divergence vlnoploch

- Od útlumu ztrátami v prostředí je třeba odlišovat pokles ak. intenzity způsobený divergencí (zvětšováním) vlnoploch (ak. výkon P_a se pak rozkládá na stále větší plochy).
- V případě sférického vlnění se vlnoplocha s rostoucí vzdáleností r od bodového zdroje zvětšuje jako $S(r) = 4\pi r^2$, tudíž

$$\boxed{I_a(r) = \frac{P_a}{S(r)} = \frac{1}{4\pi}\frac{P_a}{r^2}.} \qquad \text{(I.1.38)}$$

- ***U sférických vlnoploch je ak. intenzita nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti od bodového zdroje.***
- U rovinných vlnoploch k tomuto jevu nedochází, protože vlnoplochy nejsou zakřiveny (stejný ak. výkon prochází stále stejnými plochami).