

Část II.

ELEKTŘINA A MAGNETISMUS

Sekce 2.

Statické pole

A.D. Pajdarová (ZČU)
KFY/FYSV (20/21)

Elektrostatické pole

Charakterizace elektrostatického pole

- **Elektrostatické pole** je vytvářeno objekty s el. nábojem, které jsou nehybné vůči vztažné soustavě.
- Mag. náboje nebyly nalezeny, proto v elektřině a magnetismu může být statickým pouze pole elektrické.
- Protože se náboje nepohybují, bude $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Protože zároveň platí, že $\rho \neq \rho(t)$, nemůže existovat magnetické pole (viz I. MR), tj. $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. V el.-stat. poli se proto první čtyři MR redukují jen na Gaussův zákon, tj.

$$\oint_{S(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad (\text{II.2.1})$$

Maxwellovy rovnice I–III mají nulovou pravou stranu.

Coulombův zákon

Formulace Coulombova zákona

- C-zákon je základním poznatkem o silách vzájemného působení objektů s el. nábojem. Matematicky lze C-zákon zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12}^{\circ}, \quad (\text{II.2.2})$$

kde \mathbf{F}_{12} je el. síla, kterou na náboj Q_2 působí náboj Q_1 , a $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ je vzájemný polohový vektor mezi el. náboji Q_1 a Q_2 . Platí, že $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

- Slovně: *Dva el. nabitě objekty zanedbatelných rozměrů (BN) působí na sebe vzájemně prostřednictvím el. polí silami, které jsou úměrné součinu jejich el. nábojů a nepřímo úměrné druhé mocnině jejich vzájemné vzdálenosti.*

- Coulombův zákon lze odvodit z Maxwellových rovnic.

Coulombův zákon

Intenzita a indukce el. pole BN

- Jelikož dle VIII. MR je $\mathbf{F}_{12} = Q_2 \mathbf{E}_1$, kde \mathbf{E}_1 je el. intenzita vytvářená nábojem Q_1 v místě náboje Q_2 , bude intenzita el. pole tvořená bodovým nábojem Q_1 rovna:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12}^\circ. \quad (\text{II.2.3})$$

- Využijeme-li V. MR $\mathbf{D}_1 = \epsilon \mathbf{E}_1$, získáme pro indukci el. pole tvořeného bodovým nábojem Q_1 výraz:

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_1}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12}^\circ. \quad (\text{II.2.4})$$

- Pro intenzity a indukce el. pole platí princip superpozice.

Coulombův zákon

El. pole více el. nábojů

- El. nabitá tělesa lze považovat za soubor n bod. nábojů, tj. výsledné el. pole v místě s polohovým vektorem \mathbf{r}_X bude dáno dle principu superpozice vztahem

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_X) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_{iX}^2} \mathbf{r}_{iX}^\circ,$$

kde $\mathbf{r}_{iX} = \mathbf{r}_X - \mathbf{r}_i$ je vzájemný polohový vektor mezi i -tým el. nábojem Q_i a bodem X . Je-li dána obj. hustota náboje $\rho(\mathbf{r})$, lze součin $\rho(\mathbf{r}) dV$ považovat za bod. náboj a součet nahradit integrací, pak

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_X) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}) dV}{r_r^2} \mathbf{r}_r^\circ, \quad (\text{II.2.5})$$

kde $\mathbf{r}_r = \mathbf{r}_X - \mathbf{r}$.

Elektrický potenciál

Proč el. potenciál?

- Řešení el.-stat. polí pomocí vektorů intenzity a indukce je komplikované. Existuje skalární veličina, která by el.-stat. pole popsala?
- Použijeme-li analogii s gravitačním polem, mohli bychom vzít potenciální energii W_p . Nejprve je však nutné stanovit, kde bude potenciální energie nulová.
- Jelikož \mathbf{E} je pro všechna tělesa ve velkých vzdálenostech téměř nulová (viz závislost \mathbf{E} na $1/r^2$ pro BN a všechna tělesa lze považovat za BN, jsme-li od nich dostatečně daleko), můžeme položit, že $W_p(\infty) = 0$.

Elektrický potenciál

Potenciální energie v el.-stat. poli

~ dána prací vykonanou vnější silou \mathbf{F}^{ex} při přesunutí el. náboje z nekonečna do místa \mathbf{r}_X , tj.

$$A_X^{\text{ex}} = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_X} \mathbf{F}^{\text{ex}} \cdot d\mathbf{r} = W_p(\mathbf{r}_X) - W_p(\infty) = W_p(\mathbf{r}_X).$$

- Jelikož $\mathbf{F}^{\text{ex}} = -\mathbf{F}$, kde $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ je vektor síly el.-stat. pole, bude potenciální energie el.-stat. pole v místě \mathbf{r}_X rovna

$$W_p(\mathbf{r}_X) = Q \int_{r_X}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad [W_p] = \text{J.} \quad (\text{II.2.6})$$

- Pro jednoduchý popis el.-stat. pole nevhodné, protože závisí na velikosti náboje.

Elektrický potenciál

Elektrický potenciál $\varphi(\mathbf{r})$

- Podělme proto pot. energii velikostí náboje (tj. W_p/Q) a vzniklou veličinu nazvěme **elektrický potenciál** φ . Pak bude

$$\varphi(\mathbf{r}_X) = \int_{\mathbf{r}_X}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad [\varphi] = \text{V (volt)} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}. \quad (\text{II.2.7})$$

- Slovně: **Potenciál el.-stat. pole je číselně roven práci, kterou vykonají síly el.-stat. pole při přenesení jednotkového náboje z daného místa pole do místa s nulovou pot. energií (nejčastěji nekonečno).**

Elektrický potenciál

Elektrické napětí U

- Práce el. pole při přenesení BN Q z místa \mathbf{r}_1 do místa \mathbf{r}_2 bude

$$A_{12} = Q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = Q \left(\int_{\mathbf{r}_1}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) = Q(\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2)).$$

- Zavedeme **elektrické napětí** U jako práci na jednotkový BN (A_{12}/Q):

$$U_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2) = -\Delta\varphi, \quad [U_{12}] = \text{V}. \quad (\text{II.2.8})$$

- Slovně: **El. napětí mezi dvěma body v prostoru X a Y je číselně rovno práci, kterou vykonají síly el.-stat. pole při přemístění jednotkového bod. náboje z místa X do místa Y .**

Elektrický potenciál

Vztah mezi \mathbf{E} a φ

- Mezi intenzitou el. pole \mathbf{E} a potenciálem el.-stat. pole φ platí vztah:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi. \quad (\text{II.2.9})$$

- Jelikož $\varphi' = \varphi + C$, kde C je libovolná konstanta, popisuje stejné el.-stat. pole jako φ , není el. potenciál určen jednoznačně. El. potenciál je nutné **kalibrovat**, tj. určit jeho hodnotu v jistém místě prostoru (nejčastěji $\varphi(\infty) = 0$). Poté jsou hodnoty el. potenciálu v ostatních bodech prostoru stanoveny relativně vůči místu $\varphi = 0$.
- El. potenciál musí být zaveden jednoznačně, tj. musí mít v daném místě jen jednu hodnotu. Výraz $\int_{r_X}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ nesmí záviset na integrační cestě. Tudíž v el.-stat. musí platit, že $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$, tj. el.-stat. pole je **pole nevírové**.
- Pro el. potenciál platí princip superpozice.

Elektrický potenciál

Potenciál bodového náboje

- Pro el. potenciál BN velikosti Q platí:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r}, \quad (\text{II.2.10})$$

kde r je vzdálenost od BN. Předpokladem je, že $\varphi = 0$ v nekonečné vzdálenosti od BN.

Ekvipotenciální plochy, ekvipotenciály

- Ekvipotenciální plochu** tvoří ta místa v prostoru, kde el. potenciál nabývá stejné hodnoty, tj. $\varphi = C$, kde C je konstanta.
- Ekvipotenciála** je křivka, která vznikne průnikem nárysny a ekvipot. plochy.
- Vektor \mathbf{E} je vždy kolmý k ekvipot. ploše, protože na ekvipot. ploše je $d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ pro všechna $d\mathbf{r}$ a \mathbf{E} .

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Podmínka pro \mathbf{E} ve vodiči

- V celém objemu vodiče platí, že

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

(II.2.11)

Pokud by tato podmínka neplatila, vytvořil by se ve vodiči el. proud, který by velmi rychle přeskupil volný el. náboj ve vodiči tak, aby $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

- Jelikož $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \mathbf{0}$, tj. $\varphi = \text{konst.}$, povrch vodiče tvoří ekvipotenciální plochu a vektor \mathbf{E} je všude kolmý k povrchu vodiče.
- El. náboj přivedený na povrch vodiče je uložen na jeho povrchu v podobě plošného náboje o hustotě σ . Pro velikost \mathbf{E} pak platí

$$E = \sigma/\epsilon,$$

kde ϵ je permitivita okolí vodiče.

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Vliv tvaru vodiče

- Plošná hustota el. náboje σ na povrchu vodiče závisí jen na jeho tvaru a je tím větší, čím větší je křivost povrchu vodiče (rovna $1/R$, kde R je poloměr křivosti). Pro kouli platí:

$$\sigma = \varepsilon E = \varepsilon \frac{\varphi}{R} \quad (\text{II.2.12})$$

- σ a E jsou největší na hrotech ($1/R$ je velké). Může tam docházet k sršení elektřiny (ionizace molekul O_2 a odpuzování od hrotu).

Elektrostatická indukce

- Přiblížíme-li k vodiči elektricky nabitě těleso, dojde k přeskupení el. náboje vodiče tak, aby platila podmínka $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ v jeho objemu. Díky tomu se na povrchu vodiče, který je bližší k nabitému tělesu, objeví plošný náboj s opačným znaménkem, než je náboj nabitého tělesa. Na vzdálenějším povrchu vodiče se objeví plošný náboj se znaménkem shodným s nabitým tělesem. Náboj na povrchu vodiče lze z vodiče odvést.

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Dielektrická pevnost

- Dielektrika mají málo volných elektronů (jsou to nevodiče). Pokud je však vnější el. pole silné, může tyto elektrony v dielektriku urychlit. Urychlené elektrony poté mohou ionizovat (uvolňovat další elektrony) z molekul tvořících dielektrikum. Tyto uvolněné elektrony jsou též el. polem urychlovány. Počet volných elektronů tak narůstá, až může dojít k **průrazu dielektrika**, kdy se z dielektrika stává de facto vodič. Velikost intenzity el. pole, při které dochází k průrazu dielektrika se nazývá **dielektrická pevnost**.

Polarizace dielektrika (1/2)

- Při vložení dielektrika do vnějšího el. pole o intenzitě E_0 dojde k mírnému posuvu těžiště kladných a záporných el. nábojů v molekulách dielektrika. Z molekul se stanou el. dipóly s orientací opačnou než E_0 , v jeho objemu se tak vytvoří opačné **polarizační pole** o intenzitě E_p . To zeslabuje vnější el. pole E_0 .

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Polarizace dielektrika (2/2)

- Výsledné el. pole v dielektriku je

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p.$$

- Polarizační pole je dáno výrazem

$$\mathbf{E}_p = -\kappa_e \mathbf{E}, \quad (\text{II.2.13})$$

kde

$$\kappa_e = \epsilon_r - 1 \quad (\text{II.2.14})$$

je **elektrická susceptibilita** charakterizující polarizovatelnost dielektrika.

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Typy polarizací

- **Atomová (elektronová) deformační polarizace** – vzniká vzájemným posunem těžišť kladných el. nábojů (jader) a záporných el. nábojů (obal); velmi rychlá; doba ustavení v řádech $10^{-15} \div 10^{-14}$ s
- **Iontová deformační polarizace** – vzniká protažením či zkrácením vazeb v iontových molekulách (např. NaCl); doba ustavení v řádech $10^{-13} \div 10^{-12}$ s
- **Orientační polarizace** – vzniká stáčením polárních molekul (např. H_2O) ve vnějším el. poli, pokud to vazby molekulám dovolují; nejpomalejší; doba ustavení řádově 10^{-8} s
- Obě deformační polarizace rostou úměrně s intenzitou el. pole; orientační polarizace roste lineárně jen zpočátku, poté se asymptoticky blíží maximální hodnotě

Vodič a dielektrikum v el.–stat. poli

Feroelektrika

~ látka schopná udržet si vlastní elektrické pole i bez vnějšího elektrického pole; mají velmi vysoké κ_e (až tisíce)

- Často vznikají tak, že látka je převedena do tekutého stavu a ztuhne v přítomnosti silného el. pole. Tím si zachová el. polarizaci.

Elektrostriční a piezoelektrický jev

- **Elektrostriční jev** – zkrácení rozměru materiálu v důsledku polarizace ve vnějším el. poli
- **Piezoelektrický jev** – vytvoření vázaného náboje na materiálu v důsledku působící mechanické síly (v tlaku či tahu)
- Využívá se jich u generátorů a detektorů ultrazvuku.

Elektrická kapacita

Vlastní kapacita

- Po úpravě (II.2.12) získáme, že

$$\frac{Q}{\varphi} = \varepsilon \frac{S}{R}.$$

To znamená, že poměr Q/φ je pro kulový vodič závislý pouze na geometrii a prostředí. Podobně to je i pro jiné tvary vodičů. Zavádíme proto **vlastní kapacitu vodiče** výrazem

$$C_{\text{vl}} = \frac{Q}{\varphi}, \quad [C] = \text{F(farad)} = \text{m}^{-2}\text{kg}^{-1}\text{s}^4\text{A}^2, \quad (\text{II.2.15})$$

kde Q náboj vodiče a φ je el. potenciál, který vodič získá po nabití nábojem Q .

Elektrická kapacita

Kondenzátor

- Umístíme-li do blízkosti kladně nabitého vodiče vodič záporně nabitý, dojde k poklesu potenciálu kladného vodiče a zvýšení potenciálu vodiče kladného. V obou případech dojde ke zvýšení poměrů Q/φ , tj. kapacity obou vodičů.
- Systém dvou vodičů, které uzavírají el. pole mezi sebe, tj. kde celý el. indukční tok jednoho končí na druhém, nazýváme **kondenzátor**. Pro kapacitu kondenzátoru platí

$$C = \frac{Q}{U}, \quad (\text{II.2.16})$$

kde Q je náboj kladného vodiče a U je el. napětí mezi kladným a záporným vodičem.

Elektrická kapacita

Deskový kondenzátor

- je tvořen dvěma vodivými rovinami o plochách S , jejichž vzdálenost l je výrazně menší než charakteristický rozměr desek a u nichž je prostor mezi nimi vyplněn dielektrikem o permitivitě ε . Jeho kapacita je

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{S}{l}. \quad (\text{II.2.17})$$

Hustota energie el. pole

- Při vzniku el. pole v jistém objemu prostoru V je nutné vykonat práci W_e , která se uloží v podobě energie el. pole s objemovou hustotou

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}, \quad [w_e] = \text{J m}^{-3}. \quad (\text{II.2.18})$$