STACIONÁRNÍ A KVAZISTACIONÁRNÍ POLE

UNI

Silové působení mag. pole

Stacionární pole – pole časově neproměnná ⇒ existuje zde časově neměnný el. proud, a tím i časově neměnné mag. pole ⇒ ⇒ $J = konst.$ ⇒ $\vec{H} = konst.$ ($\vec{B} = konst.$)

- náboj se v stacionárním poli nehromadí ⇒ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = konst.$ ⇒ platí zde rovnice kontinuity proudu ve tvaru:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

- tvar maxwell. rovnic:

$$\oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_S$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, dV = Q_V$$

Kvazistacionární pole – pole, které se pomalu mění v čase ⇒ ⇒ existuje zde el.-mag. indukce

- i zde se náboj nehromadí ⇒ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = konst.$ ⇒ platí rovnice kontinuity el. proudu ve tvaru:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

- protože se změny el. i mag. pole šíří v prostoru konečnou rychlostí (viz dále), lze el.-mag. pole považovat za kvazistac. jen v malé části prostoru
- tvar maxwell. rovnic:

$$\oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_S$$

$$\oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV = Q_V$$

Síla působící na vodič

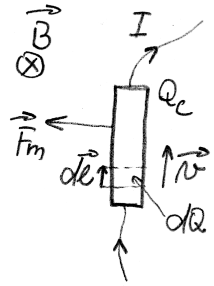
- na náboj v mag. poli působí dle VIII. MR síla $\vec{F_m} = Q\vec{v} \times \vec{B}$
- je-li v tělese n nábojů, bude na těleso jako celek působit výsledná mag. síla:

$$\vec{F_m} = \sum_i \vec{F_{mi}} = \sum_i Q_i \vec{v_i} \times \vec{B}$$

kde $\vec{F_{mi}}$ je mag. síla na i-tý náboj tělesa

- i když $\vec{F_{mi}}$ je síla na náboj v tělese, náboj toto silové působení přenáší prostřednictvím el.-mag. interakce a principu akce a reakce na atomy tělesa $\Rightarrow$ lze proto mluvit o síle na těleso
- protéká-li tělesem el. proud I=konst., či se těleso pohybuje v mag. poli, budou mít všechny náboje stejnou střední rychlost $\vec{v}$, pak:

$$\vec{F_m} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \sum_i Q_i \Rightarrow \vec{F_m} = Q_c \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$



- určíme sílu, která působí na element úseku vodiče $d\vec{l}$:

$$d\vec{F_m} = dQ \cdot \vec{v} \times \vec{B} = dQ \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = \frac{dQ}{dt} \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{d\vec{F_m} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}}$$

- na celou délku vodiče pak bude působit síla

$$\boxed{\vec{F_m} = I \int_l d\vec{l} \times \vec{B}}$$

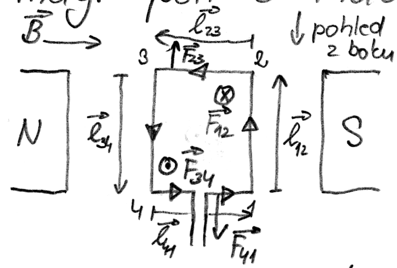
kde I je časově neproměnný el. proud vodičem

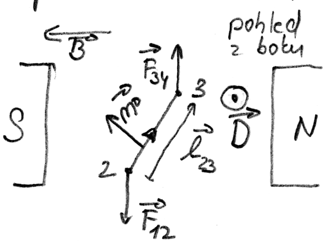
- poznámka: je-li mag. pole silně nehomogenní, tj. mění se značně napříč vodičem, musíme vodič rozdělit na malé objemy dV, kterými protéká hustota proudu $\vec{J}$
- pak mag. sílu na element objemu a daný objem vodiče vypočteme podle

$$\boxed{d\vec{F_m} = \vec{J} \times \vec{B}\, dV} \qquad \boxed{\vec{F_m} = \int_V \vec{J} \times \vec{B}\, dV}$$

Otáčivé účinky mag. sil

- předpokládejme proudovou smyčku o hraně délky l v homog. mag. poli o indukci B protékanou el. proudem $I = konst.$





$$l_{12} = l_{23} = l_{34} = l_{41} = l$$

- rozebereme působící síly:

na úsek 1-2: $\vec{F_{12}} = I \cdot \vec{l_{12}} \times \vec{B}$

na úsek 2-3: $\vec{F_{23}} = I \cdot \vec{l_{23}} \times \vec{B}$

na úsek 3-4: $\vec{F_{34}} = I \cdot \vec{l_{34}} \times \vec{B} = -I \cdot \vec{l_{12}} \times \vec{B} = -\vec{F_{12}} \quad (\vec{l_{34}} = -\vec{l_{12}})$

na úsek 4-1: $\vec{F_{41}} = I \cdot \vec{l_{41}} \times \vec{B} = -I \cdot \vec{l_{23}} \times \vec{B} = -\vec{F_{23}} \quad (\vec{l_{41}} = -\vec{l_{23}})$

- výslednice sil působících na smyčku: $\vec{F_v} = \vec{F_{12}} + \vec{F_{23}} + \vec{F_{34}} + \vec{F_{41}} = \vec{F_{12}} + \vec{F_{23}} - \vec{F_{12}} - \vec{F_{23}} = \vec{0} \Rightarrow$ v homog. mag. poli je výslednice sil působících na proudovou smyčku nulová
- síly $\vec{F_{12}}$ a $\vec{F_{34}}$ však vytvářejí na smyčku moment dvou sil $\vec{D}$, tj. snaží se smyčku otočit
- určíme $\vec{D}$:

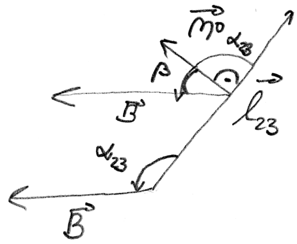
moment sil $\vec{D} = \vec{M_1} + \vec{M_2} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} - \vec{r_2} \times \vec{F_1} = (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{F_1}$

zde: $\vec{D} = \vec{l_{23}} \times \vec{F_{34}} = \vec{l_{23}} \times (I \vec{l_{34}} \times \vec{B}) = I[\vec{l_{23}} \times (\vec{l_{34}} \times \vec{B})]$

$$\vec{l_{23}} \times (\vec{l_{34}} \times \vec{B}) = \vec{l_{34}}(\vec{l_{23}} \cdot \vec{B}) - \vec{B}\underbrace{(\vec{l_{23}} \cdot \vec{l_{34}})}_{=0 \; \vec{l_{23}} \perp \vec{l_{34}}} = (\vec{l_{23}} \cdot \vec{B})\vec{l_{34}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{D} = (l_{23} \cdot B \cdot \cos\alpha_{23}) \cdot l_{34} \cdot \vec{l^0_{34}} = \underbrace{(l_{23} \cdot l_{34})}_{S = l \cdot l} \cdot B \cdot \cos\alpha_{23} \cdot \vec{l^0_{34}} \; ; \; \vec{l^0_{34}} = \frac{\vec{l_{34}}}{l_{34}}$$

$\Rightarrow \vec{D} = SB\cos\alpha_{23} \cdot \vec{l^0_{34}}$; α_{23} ... úhel mezi $\vec{l_{23}}$ a $\vec{B}$



- z obrázku plyne: $\alpha_{23} = \beta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha_{23} = \cos(\beta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\beta$

$\Rightarrow \vec{D} = -SB\sin\beta \cdot \vec{l^0_{34}} = \underbrace{SB\sin\beta}_{|\vec{S} \times \vec{B}|} \cdot \vec{l^0_{12}}$

- označíme $\vec{S} = S\vec{m^0}$, S ... plocha smyčky $\Rightarrow$

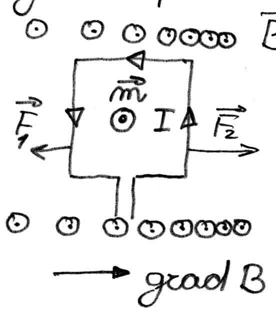
$\Rightarrow \vec{S} \times \vec{B}$ má stejný směr jako $\vec{l^0_{12}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = I\vec{S} \times \vec{B}}$$

- veličině $\boxed{\vec{m} = I\vec{S}}$ se říká <u>magnetický moment</u> a má směr normály k ploše smyčky, tj. směr magnetického pole vytvářeného smyčkou
- obecně lze pak moment dvojice sil zapsat ve tvaru

$$\boxed{\vec{D} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

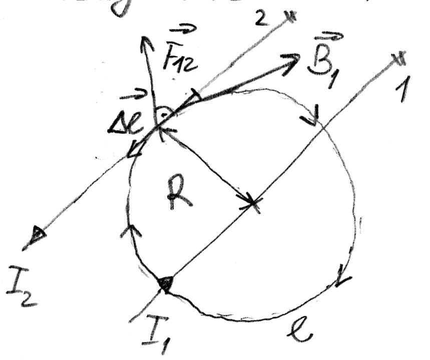
který platí pro libovolný tvar smyčky (každou lze aproximovat nekonečně malými čtvercovými smyčkami)
- z vektorového součinu plyne, že mag. pole se snaží stočit smyčku s proudem tak, aby vektory $\vec{m}$, $\vec{B}_s$ a $\vec{B}$ byly rovnoběžné, přičemž vektor $\vec{B}_s$ je mag. pole tvořené smyčkou
- tato poloha smyčky je v homog. mag. poli stabilní
- je-li smyčka umístěna do nehomogenního mag. pole, bude ve své rovnovážné poloze ($\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{B}$) vtahována do míst se silnějším polem (obrázek)



- $F_2 > F_1 \Rightarrow$ smyčka se pohybuje ve směru vzrůstu velikosti mag. pole (ve směru grad B)

Vzájemné silové působení proudovodičů

- vzájemné silové působení proudovodičů je zprostředkováno silovými účinky jejich mag. polí
- předpokládáme, že máme v homog. izotrop. prostředí o μ dva rovnoběžné nekonečně dlouhé vodiče zanedbatelného průřezu ve vzájemné vzdálenosti R od sebe



- dle I. MR:

$$\oint_{l(S)} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_1$$

- l je kruhová $\Rightarrow$ z důvodu symetrie bude velikost $\vec{H}_1$ na l všude stejná

$$\Rightarrow \oint_l \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = H_1 \oint_l \vec{\tau}^0 \cdot d\vec{l} = H_1 \oint_l dl = H_1 2\pi R$$

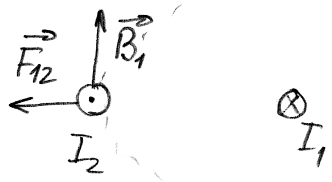
$$\Rightarrow H_1 2\pi R = I_1 \Rightarrow \boxed{H_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{R}} \Rightarrow \boxed{B_1 = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1}{R}} \quad \text{(dle VI. MR)}$$

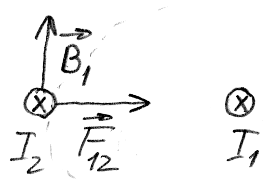
- toto mag. pole působí silově na úsek $\Delta\vec{l}$ proudovodiče 2 dle:

$$\vec{F}_{12} = I_2 \cdot \Delta\vec{l} \times \vec{B}_1 \quad \text{(vodič je přímý)} \Rightarrow \boxed{F_{12} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} \Delta l}$$

$(\Delta\vec{l} \perp \vec{B}_1)$

- rozbor z nárysny:



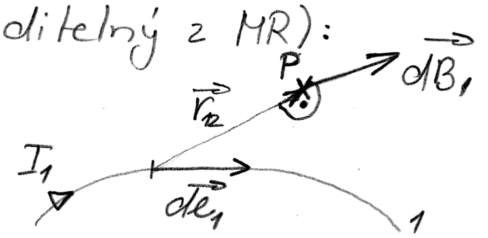


- silové působení proudovodičů je vzájemné, tj. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, a proudovodiče se odpuzují, protékají-li jimi el. proudy nesouhlasných směrů, a přitahují, protékají-li jimi el. proudy souhlasné
- <u>definice ampéru (SI)</u>: Ampér (A) je el. proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými přímými nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1m od sebe, vyvolá mezi nimi sílu $2 \cdot 10^{-7}$ N na 1m jejich délky.

Biot-Savartův zákon

- udává mag. indukci, kterou budí v daném místě element vodiče libovolného tvaru
- lze jej zapsat ve tvaru (je odvoditelný z MR):

$$\boxed{d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1}{r_{12}^2}\left(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0}\right)}$$



- pole, které v daném místě vytváří makroskop. úsek vodiče je:

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0}}{r_{12}^2}}$$

- síla, kterou pak vodič 1 působí na element $d\vec{l}_2$ vodiče 2 obdržíme ve tvaru:

$$d\vec{F}_{12} = I_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = I_2\, d\vec{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0}}{r_{12}^2} =$$

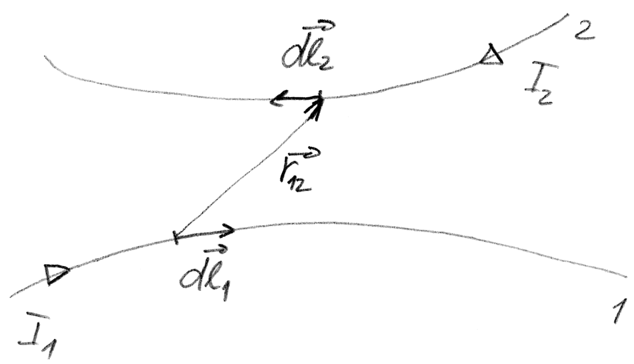
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2\, d\vec{l}_2 \times \int_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0}}{r_{12}^2}$$

- celkovou sílu, kterou působí vodič 1 na vodič 2 dostaneme integrací po l_2:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{l_2} d\vec{l}_2 \times \int_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0}}{r_{12}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{l_1}\int_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \left(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0}\right)}{r_{12}^2}}$$

- i zde platí $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$



Magnetické vlastnosti látek

- elektrony v atomech „obíhají" okolo jádra ⇒ mají nenulový moment hybnosti (tzv. orbitální moment hybnosti) ⇒ tím okolo jádra teče el. proud ⇒ obíhající elektrony tvoří mag. pole, které může být popsáno tzv. orbitálním mag. momentem $\vec{m}_e$
- vedle $\vec{m}_e$ mají elektrony vlastní, tzv. spinový mag. moment $\vec{m}_s$ související s jejich vlastním momentem hybnosti, tzv. spinem
- tyto mag. momenty spolu s mag. momentem jádra tvoří celkový mag. moment atomu $\vec{m}_a$, kterým atom interaguje s mag. momenty okolních atomů, a tak vzájemnou interakcí vznikají různá chování látek ve vnějším mag. poli
- při popisu chování budeme předpokládat izotropní prostředí a budeme postupovat analogicky jako v případě el.-stat. pole
- dle VII. MR musí platit:

$$\vec{H} = \underbrace{\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}}_{\text{vně}} = \underbrace{\frac{\vec{B}}{\mu_r\mu_0}}_{\text{uvnitř}} \Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{\vec{B}}{\mu_r} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0}$$

- hodnotu mag. indukce v látce $\vec{B}$ určíme z rovnosti:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_p$$

kde $\vec{B}_p$ je mag. pole vzniklé mag. polarizací v látce ⇒

$$\Rightarrow \vec{B}_p = \vec{B} - \vec{B}_0 = \mu_r\vec{B}_0 - \vec{B}_0 = (\mu_r - 1)\vec{B}_0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}_p = \varkappa_m \vec{B}_0}$$

- veličina $\varkappa_m = \mu_r - 1$ se nazývá mag. susceptibilita

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 + \varkappa_m\vec{B}_0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{P}_m}$$

kde $\vec{P}_m = \varkappa_m \vec{B}_0$ je mag. polarizace udávající objemovou hustotu mag. momentů v materiálu

- na základě velikosti veličin μ_r a $\varkappa_m$ dělíme látky do tří skupin

1) Diamagnetické látky

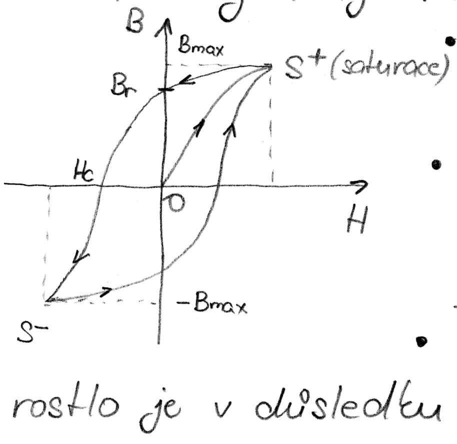
- vyznačují se hodnotou $\mu_r < 1 \Rightarrow \varkappa_m < 0$; μ_r se od 1 liší o méně než 10^{-4}
- sestávají z atomů a molekul s vyváženými momenty, tedy s nulovým výsledným mag. momentem
- vnější mag. pole se v diamagnetikách mírně zeslabuje
- jsou vypuzovány z nehomog. mag. pole do míst s menším B
- příklady: Cu, Zn, Pb, Au, C a voda

2) Paramagnetické látky

- vyznačují se hodnotou $\mu_r > 1 \Rightarrow \varkappa_m > 0$; μ_r se od 1 liší o méně než 10^{-3}
- sestávají z atomů a molekul s nevyváženými mag. momenty, které vnější pole stáčí do svého směru (viz smyčka v mag. poli)
- po vynětí z mag. pole se mag. momenty atomů opět v důsledku termických pohybů rozházi a látka není magnetická
- jsou vtahovány do nehomog. mag. pole do míst s větším B
- příklady: Cr, Mn, Pt, Ti a vzduch

3) Feromagnetické látky

- vyznačují se hodnotou $\mu_r \gg 1 \Rightarrow \varkappa_m \gg 1$; μ_r dosahuje hodnot až 10^6
- tvořeny z atomů a molekul se značnými mag. momenty, které se v důsledku vzájemného silového působení usměrňují do paralelních poloh a seskupují se v tzv. Weissových oblastech o objemu až mm^3
- bez vnějšího mag. pole je orientace oblastí v látce různá $\Rightarrow$ látka nevykazuje mag. moment



- chování feromag. v proměnném vnějším mag. poli H ukazuje tzv. hysterezní smyčka (obr.)
- při prvním zvyšování H probíhá mag. pole v látce křivku OS^+ zvanou panenská křivka magnetizace (křivka prvotní magnetizace)
- za bodem S^+ (saturace) by mag. pole v látce rostlo je v důsledku růstu H jako $\mu_0 H$
- při poklesu H B prochází křivku S^+B_r; při vypnutém vnějším

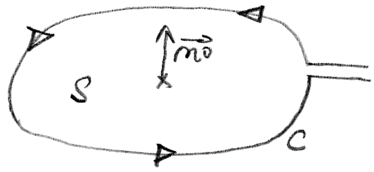
(H=0) zůstává v látce tzv. remanentní mag. indukce Br – látka se stává permanentním magnetem

- k odmagnetování musí vnější pole poklesnout na hodnotu Hc, což je tzv. koercitivní intenzita pole
- při dalším poklesu by opět látka došla do stavu saturace S^- a při zvyšování H by B opisovalo křivku S^-S^+
- zpětná větev S^-S^+ je středově souměrná s S^+S^-
- je-li hyst. smyčka široká – mluvíme o mag. tvrdých materiálech, které mají velké Br i Hc a používají se na permanentní magnety
- je-li hyst. smyčka úzká – mluvíme o mag. měkkých materiálech, které se používají v el. strojích díky malé hodnotě Hc, jež snižuje přemagnetizační ztráty
- mag. tvrdé mat.: Alnico (Fe + Al + Ni + Co)
- mag. měkké mat.: Fe s příměsí Si
- ferity – nekovová feromag., které mají velké hodnoty Hc ⇒ jsou velmi odolné proti odmagnetování
- μ_r závisí na intenzitě magnetizačního pole a klesá s rostoucí teplotou; při jisté teplotě (tzv. Curierův bod) se z feromag. stávají paramagnetika

Vlastní a vzájemná indukčnost

- máme smyčku C, kterou protéká el. proud I $\Rightarrow$ tento proud budí mag. pole, které prochází plochou smyčky S $\Rightarrow$ toto pole má mag. indukční tok plochou smyčky S:

$$\Phi = \int_S \vec{B}(I) \cdot d\vec{S}$$



- dochází-li k časovým změnám el. proudu, bude kolísat i Φ a dle II. MR bude ve smyčce vznikat el.-mot. napětí

$$U_e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(I)\cdot d\vec{S}$$

- dle Biot-Savartova zákona bude mag. pole:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}\right)\cdot I$$

$\Rightarrow$ $\vec{B}$ je přes výraz, závislý jen na geometrii smyčky, úměrné I

- el.-mot. napětí je pak

$$U_e = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(I)\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\left[\int_S \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}\right) I \cdot d\vec{S}\right] =$$

$$= -\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\oint_C \frac{(d\vec{l}\times\vec{r}_0)\cdot d\vec{S}}{r^2}\right]\cdot\frac{dI}{dt}$$

- toto jsme mohli napsat, jelikož jedinou měnící se veličinou ve výrazu je el. proud I; výraz v hranaté závorce je závislý jen na geometrii úlohy

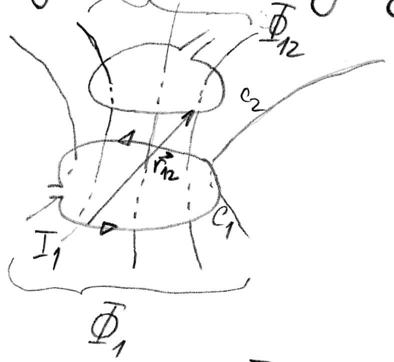
$$\Rightarrow \boxed{U_e = -L\frac{dI}{dt}} \Rightarrow U_e = -\frac{d}{dt}(LI) = -\frac{d}{dt}\Phi \Rightarrow \boxed{\Phi = LI}$$

- veličina

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\int_C \frac{(d\vec{l}\times\vec{r}_0)\cdot d\vec{S}}{r^2} \qquad [L] = H = m^2 kg\, s^{-2} A^{-2}, \text{ henry}$$

se nazývá <u>vlastní indukčnost</u> a je závislá pouze na geometrii úlohy a vlastnostech prostředí

- Indukované napětí má v okruhu takový smysl, že brání změně proudu, která je jeho příčinou. ⇒ indukčnost lze chápat jako jistou „el. setrvačnost", která brání změně proudu
- mějme dvě smyčky C_1 a C_2 ⇒ smyčka C_1 vytvoří mag. pole $\vec{B}_1$ ⇒



⇒ to tvoří mag. ind. tok plochou smyčky C_2 o velikosti

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1(I) \cdot d\vec{S}_2 \;, \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu}{4\pi} I_1 \int_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0}}{r_{12}^2} \Rightarrow$$

⇒ změna Φ_{12} indukuje v C_2 el.-mot. napětí:

$$U_{e_2} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\left[\frac{\mu}{4\pi}\int_{S_2}\int_{C_1}\frac{(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0})\cdot d\vec{S}_2}{r_{12}^2}\right]\cdot\frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{e_2} = -M_{12}\cdot\frac{dI}{dt}}$$

- veličina

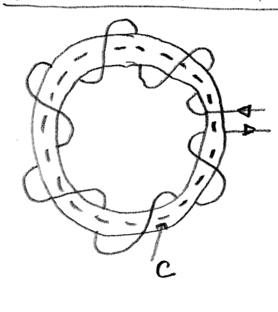
$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{S_2}\int_{C_1}\frac{(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0})\cdot d\vec{S}_2}{r_{12}^2} \qquad [M_{12}] = H$$

se nazývá vzájemná indukčnost a je dán pouze vzájemným uspořádáním smyček a vlastností prostředí
- je možné dokázat, že platí $M_{12} = M_{21} = M$
- vzájemné indukční toky lze pak zapsat ve tvarech:

$$\boxed{\Phi_{12} = M I_1 \qquad \Phi_{21} = M I_2}$$

- Napětí indukované v druhém okruhu v něm vyvolává proud takového směru, že tímto proudem buzené mag. pole brání změně vzájemného indukčního toku, který je příčinou vzniku indukovaného napětí.

Vlastní indukčnost toroidu



- předpokládáme, že toroid má z závitů a vodičem prochází el. proud I
- plochou ohraničenou křivkou C pak prochází celkový el. proud zI (vodič protne plochu z-krát)

- dle I. MR bude intenzita mag. pole v jádře toroidu:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\oint_C dl = Hl = I_c = zI \Rightarrow \boxed{H = \frac{zI}{l}}$$

- mag. indukce je: $\vec{B} = \mu\vec{H} \Rightarrow B = \mu\frac{zI}{l}$
- mag. indukční tok průřezem toroidu:

$$\Phi_1 = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\int_S dS = BS \Rightarrow \Phi_1 = \mu\frac{zIS}{l}$$

- vlastní indukční tok Φ_v je však spojen se všemi závity (tvoří šroubovitou plochu ovíjející křivku C) $\Rightarrow \Phi_v = z\Phi_1$

$$\Rightarrow \Phi_v = \mu\frac{z^2IS}{l}$$

- dle rovnice $\Phi_v = L_v I$ bude: $\boxed{L_v = \mu\frac{z^2S}{l}}$

Hustota energie mag. pole

- vznik indukčního toku Φ_1 v jádře toroidu vyžaduje práci zdroje, který při postupném růstu el. proudu cívkou od 0 do I překoná el.-mot. napětí vlastní indukce toroidu
- práce zdroje při přemístění náboje $dQ = I\cdot dt$ bude

$$dA = -dQ\cdot U_e = L\frac{dI}{dt}\cdot Idt = LI\cdot dI \quad ; \quad U_e = -L\frac{dI}{dt}$$

- celá práce se uloží v podobě energie mag. pole $\Rightarrow$

$$\Rightarrow W_m = \int_0^I dA = \int_0^I LI\cdot dI \Rightarrow \boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

- pro toroid platí

$$L = \mu\frac{z^2S}{l}\cdot\frac{lI^2}{lI^2} = \mu\frac{z^2I^2}{l^2}\cdot\frac{\overbrace{Sl}^{V}}{I^2} = \mu H^2\cdot\frac{V}{I^2} = BH\cdot\frac{V}{I^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_m = \frac{1}{2}BH\cdot\frac{V}{I^2}\cdot I^2 = \frac{1}{2}BH\cdot V$$

- v neizotropním prostředí bude

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\cdot V}$$

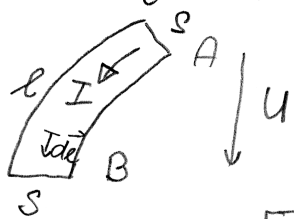
- objemová hustota energie mag. pole pak bude:

$$\boxed{w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$$

Ohmův zákon v el. obvodech

- máme homog. izotropní vodič konstantního průřezu S o délce l, který se nepohybuje $\Rightarrow$ napětí mezi jeho konci je dle definice:

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$



- dle V. MR: $\vec{J} = \gamma \vec{E} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{J} \Rightarrow U = \int_A^B \frac{1}{\gamma} \vec{J} \cdot \vec{dl} \Rightarrow \boxed{U = \int_A^B \rho \vec{J} \cdot \vec{dl}}$$

- uvedená rovnice je Ohmův zákon v integr. tvaru
- veličina $\rho = 1/\gamma$ se nazývá rezistivita
- náš vodič má stále stejný průřez $S \Rightarrow$ velikost $\vec{J}$ bude všude po jeho délce stejná a rovna $J = I/S$, kde I je el. proud procházející vodičem, i $\rho = konst. \Rightarrow$

$$\Rightarrow U = \rho \cdot J \cdot \int_A^B \vec{\tau_0} \cdot \vec{dl} = \rho \cdot \frac{I}{S} \cdot \int_A^B dl = \rho \frac{I}{S} l \rightarrow U = \rho \frac{l}{S} \cdot I$$

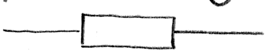
$\Rightarrow$ <u>Napětí mezi dvěma místy vodiče je úměrné el. proudu vodičem procházejícímu.</u>

- konstanta úměrnosti se nazývá <u>el. odpor</u> $R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{U = R \cdot I} \qquad [R] = \Omega = m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$$

- pro náš vodič:

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{S}}$$

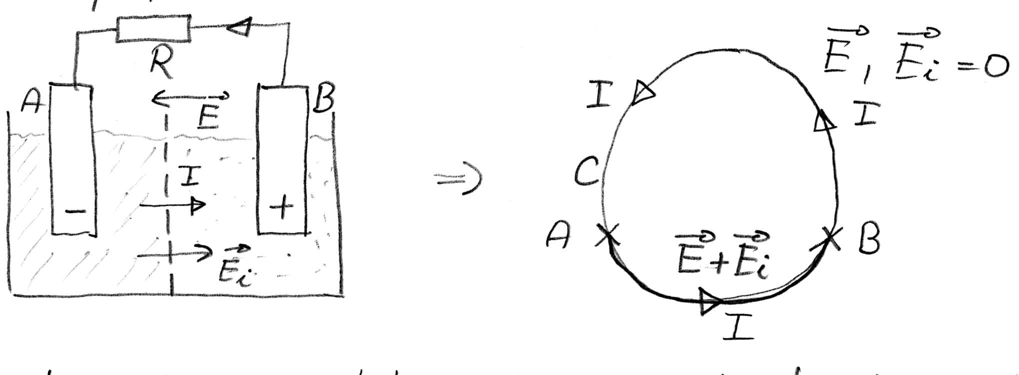
- el. součástka, která reprezentuje el. odpor, se nazývá <u>rezistor</u> a značí se 
- <u>odpor</u> je reálná součástka vyznačující se el. odporem jako svojí dominantní vlastností

Vtištěné síly

- dle V. MR je příčinou el. proudu vodičem intenzita vnějšího el. pole

$\vec{J} = \gamma \vec{E}$ či $U = RI$

- toto platí jen u tzv. <u>homogenních vodičů</u>
- v nehomogenním vodiči není vnější pole jedinou příčinou el. proudu, ale mohou existovat ještě jiné příčiny jeho vzniku (a to i neelektromagnetické), které nazýváme <u>vtištěné síly</u> (pohybují náboji ⇒ vzniká el. proud) ⇒ toto je třeba zohlednit v teorii ⇒ zavádí se intenzita el. pole $\vec{E_i}$, tzv. intenzita pole vtištěných sil, která by měla stejné <u>účinky pro vznik proudu</u> vytvářeného vtištěnými silami ⇒
⇒ $\boxed{\vec{J} = \gamma(\vec{E} + \vec{E_i})}$ Ohmův zákon pro nehomog. vodič
- pak může být $\vec{J} \neq 0$, i když $\vec{E} = 0$, či $\vec{J} = 0$, i když $\vec{E} \neq 0$
- příkladem nehomog. vodiče je <u>galvanický článek</u>, který je tvořen dvěma roztoky o různých koncentracích, navzájem nepromíšenými, mezi nimiž dochází k difuzi iontů z míst vyšších koncentrací do míst koncentrace nižší (vtištěnou silou je zde síla vzniklá v důsledku gradientu koncentrace) ⇒ vzniká tak el. proud v nehomog. vodiči
- přenos iontů ustane v okamžiku, kdy nahromaděné nosiče náboje zabrání přílivu nových nosičů v důsledku vzniku el. pole, pro které bude platit $\vec{E} = -\vec{E_i}$



- připojíme-li na elektrody ponořené do roztoků (obrázek) vnější homog. vodič o odporu R, začne jím v důsledku pole $\vec{E}$ procházet el. proud, který snižuje počet nábojů na ⊕ elektrodě (klesá tak i E) ⇒ pole vtištěných sil je začne díky $\vec{E_i}$ na ⊕ doplňovat ($E_i > E$)
- tento proces se zastabilizuje při jisté hodnotě proudu

homog. vodičem I

- obvod nahradíme smyčkou C (obrázek), pro niž musí všude platit:

$$\vec{E} + \vec{E_i} = \frac{1}{\gamma}\vec{J} = \rho\vec{J}$$

- el.-mot. napětí dostaneme integrací podél celé křivky C:

$$U_e = \oint_C (\vec{E}+\vec{E_i})\cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{E_i}\cdot d\vec{l} = \oint_C \rho\vec{J}\cdot d\vec{s}$$

- protože $\vec{E}$ je důsledkem nábojů na elektrodách (el.-stat. pole), musí být $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ $\Rightarrow$

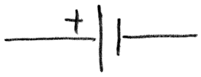
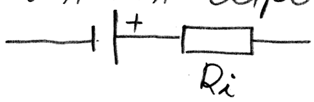
$$\Rightarrow U_e = \oint_C \vec{E_i}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E_i}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \rho\vec{J}\cdot d\vec{l} + \int_B^A \rho\vec{J}\cdot d\vec{l} =$$

$$= R_i\cdot I + R\cdot I \Rightarrow \boxed{U_e = R_i I + R I}$$

kde R_i je el. odpor nehomog. části, tzv. <u>vnitřní odpor</u>

- součin $R_i I$ pak charakterizuje úbytek napětí na vnitřních odporech nehomog. části
- nehomog. vodič se tak chová jako <u>zdroj el. proudu</u> $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ nehomog. vodiči jsou tak i generátory, dynama i alternátory (zde jsou vtištěnými silami mech. síly roztáčející cívky, či magnety)

- schematickou značkou zdroje je:  , 
- pokud je potřeba zdůraznit vnitřní odpor (je nezanedbatelný), volí se náhradní schema: 

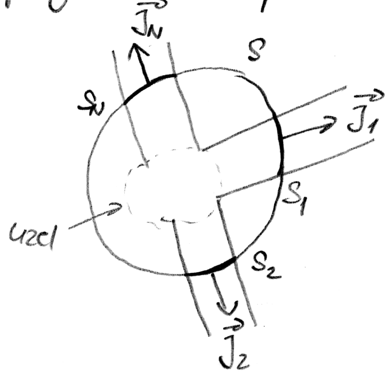
Zákony el. obvodů

I. Kirchhoffův zákon

- ve stacionárním a kvazistacionárním poli máme zákon zachování el. proudu ve tvaru:

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0}$$

- mějme uzel el. obvodu, v němž dochází k vodivému spojení N proudovodičů



- tento uzel obklopíme uzavřenou plochou S $\Rightarrow$ uzavřená plocha protne proudovodiče v plochách $S_1, S_2, \dots, S_N$
- mimo tyto plochy el. proud plochou S neprochází $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}_2 + \dots + \int_{S_N} \vec{J} \cdot d\vec{S}_N = 0$$

- dle definice el. proudu je

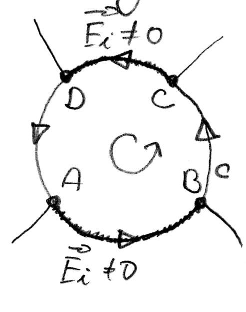
$$I_x = \int_{S_x} \vec{J} \cdot d\vec{S}_x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_1 + I_2 + \dots + I_N = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^{N} I_i = 0}$$ I. Kirchhoffův zákon

- <u>slovně:</u> Algebraický součet všech proudů v uzlu obvodu je roven nule.
- znaménková konvence: $I > 0$ … vytéká-li el. proud z uzlu
  $I < 0$ … vtéká-li el. proud do uzlu

II. Kirchhoffův zákon

- máme uzavřenou smyčku, která obsahuje 2 nehomogenní vodiče (zdroje) a je součástí složitějšího obvodu (obsahuje uzly)



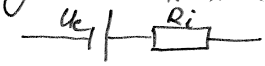
- v každém místě smyčky musí platit:

$$\vec{E} + \vec{E}_i = \sigma \vec{J} \;\Big/\; \oint_c \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow$$

2E01

$$\Rightarrow \oint_c (\vec{E}+\vec{E_i})\cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{E_i}\cdot d\vec{l} = \oint_c \rho\vec{J}\cdot d\vec{l} \quad \left(\text{protože } \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0\right) \Rightarrow$$

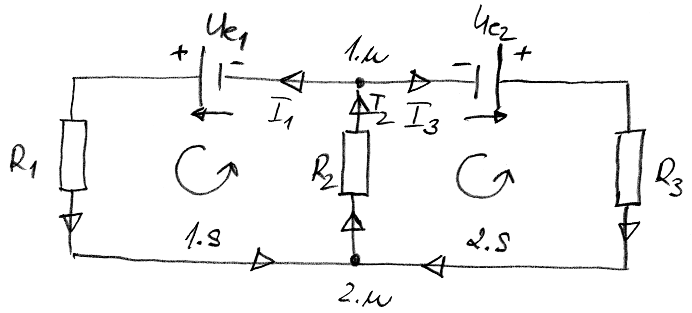
$$\Rightarrow \underbrace{\int_A^B \vec{E_i}\cdot d\vec{l}}_{U_{e_1}} + \underbrace{\int_C^D \vec{E_i}\cdot d\vec{l}}_{U_{e_2}} = \underbrace{\int_A^B \rho\vec{J}\cdot d\vec{l}}_{R_{i_1} I_{i_1}} + \underbrace{\int_B^C \rho\vec{J}\cdot d\vec{l}}_{R_1 I_1} + \underbrace{\int_C^D \rho\vec{J}\cdot d\vec{l}}_{R_{i_2} I_{i_2}} + \underbrace{\int_D^A \rho\vec{J}\cdot d\vec{l}}_{R_2 I_2}$$

- výrazy $R_{i_x} I_{i_x}$ mají stejný význam jako $R_x I_x$ (úbytek napětí), nahradíme-li zdroj schématem  $\Rightarrow$ mohu zobecnit:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N_u} U_{e_i} = \sum_{i=1}^{N_R} R_i I_i}$$ II. Kirchhoffův zákon

Použití Kirchhoffových zákonů

- při řešení el. obvodů zachováváme následující postup:
  1) složitější obvod rozdělíme na jednotlivé uzavřené smyčky
  2) v jednotlivých uzlech vyznačíme směry proudů
  3) u zdrojů označíme směr proudu od ⊖ pólu k ⊕ pólu
  4) vyznačíme směry obíhání pro smyčky
  5) v II. KZ uvádíme u členů znaménko plus, souhlasí-li směr proudu členem se směrem obíhání, v opačném případě u členu uvedeme znaménko minus



I. KZ (1.u): $I_1 + I_3 - I_2 = 0$

II. KZ (1.s): $U_{e_1} = R_1 I_1 + R_2 I_2$

II. KZ (2.s): $-U_{e_2} = -R_2 I_2 - R_3 I_3$

- obvykle známe U_{e_x} a R_x $\Rightarrow$ z dané soustavy pak vypočteme jednotlivé I_x (je-li výsledný proud záporný, teče proud v opačném směru)

Cívka a kondenzátor

- kapacitor – el. součástka reprezentující kapacitu;
- kondenzátor – reálná el. součástka mající kapacitu za dominantní vlastnost

- pro kondenzátor platí: $Q = C \cdot U \;\big|\; \frac{d}{dt}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt} \Rightarrow \boxed{I = C \cdot \frac{dU}{dt}}$

- pomocí tohoto vztahu se kondenzátor započítává do KZ
- induktor – el. součástka reprezentující indukčnost;
- cívka – reálná el. součástka mající indukčnost jako svoji dominantní vlastnost
- pro cívku platí: $\boxed{U_L = -L\frac{dI}{dt}}$
- pomocí tohoto vztahu se cívka započítává do KZ

Joulův zákon

- tím, že el. pole nutí náboje procházet úsek vodiče AB, koná na nábojích práci, která při přenesení náboje dQ tímto úsekem, na němž je napětí U_{AB}, bude:

$$dA = dQ \cdot U_{AB} \;\big|\; : dt \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot U_{AB} = I \cdot U_{AB} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{N = I \cdot U_{AB}}$ Joulův zákon

kde N je výkon, který musí konat el. pole (zdroje), aby úsekem vodiče tekl el. proud

- dle Ohmova zákona: $U_{AB} = R \cdot I \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{N = R \cdot I^2}$

- práce, kterou koná el. pole na nábojích se uloží v jejich kinetické energii, kterou náboje ve srážkách předávají atomům vodiče, čímž se vodič zahřívá
- Joulův zákon slovně: Tepelný výkon vznikající ve vodiči je roven součinu el. proudu protékajícího vodičem a úbytku napětí na vodiči.