

11 Hustota energie elektrického pole

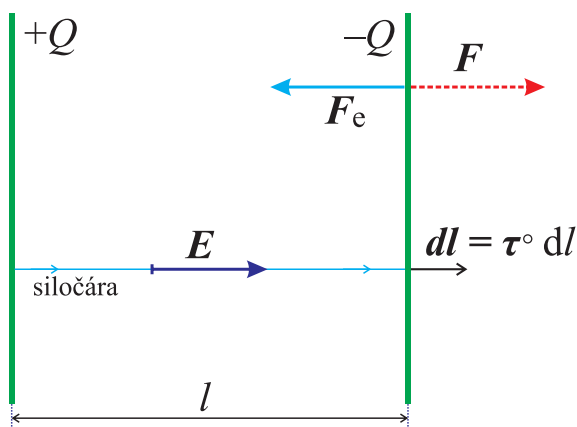
Zadání

Odvoďte vztah pro hustotu energie elektrického pole.

(Lze uložit za DCv)

Řešení

- K odvození vztahu pro objemovou hustotu energie el. pole využijeme univerzálnosti zákona zachování energie. Určíme práci, kterou musí vykonat vnější síla při přesunu záporně nabitě desky do vzdálenosti l od desky nabitě kladně (viz obr. 11.1). Předpokládáme, že velikosti nábojů desek se sobě rovnají (jedná se o deskový kondenzátor) a že prostor mezi deskami je vyplněn homogenním a izotropním dielektrikem o permitivitě ε .



Obr. 11.1: Nákres k odvození objemové hustoty el. pole.

- Posune-li vnější síla \mathbf{F} zápornou desku o posunutí $d\mathbf{l} = \boldsymbol{\tau}^0 dl$, kde $\boldsymbol{\tau}^0$ je jednotkový tečný vektor, vykoná tím infinitezimální práci

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Aby mohla být záporná deska posunuta, musí mít vnější síla stejnou velikost, ale opačný směr než síla el. pole \mathbf{F}_e , kterou kladná deska přitahuje desku zápornou, tj. $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_e$. Pak stačí záporné desce udělit nenulovou počáteční rychlost a deska se poté přesune do vzdálenosti l rovnoměrným přímočarým pohybem (výslednice sil na zápornou desku bude nulová). Odsud

$$dA = -\mathbf{F}_e dl = Q \mathbf{E}_+ \cdot d\mathbf{l}, \quad (11.1)$$

přičemž \mathbf{E}_+ je intenzita el. pole tvořeného kladnou deskou v místě desky záporné a za el. sílu bylo dosazeno $\mathbf{F}_e = -Q \mathbf{E}_+$ (síla působící na zápornou desku od desky kladné).

11 HUSTOTA ENERGIE ELEKTRICKÉHO POLE

• Dle P 7 je velikost intenzity el. pole mezi oběma deskami $E = \sigma/\varepsilon$, kde $\sigma = Q/S$ je plošná hustota el. náboje na kladné desce o ploše S . Pro el. intenzitu jedné desky, která je nabitá kladně, platí, že $E_+ = \sigma/(2\varepsilon)$, a navíc má tato intenzita stejný směr jako intenzita v případě dvou opačně nabitých desek. Můžeme proto psát, že

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{2} \mathbf{E}. \quad (11.2)$$

• Spojením (11.1) a (11.2) obdržíme

$$dA = Q \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Použijeme-li, že $Q = \sigma S$ a že $D = \sigma$ (dle P 7), získáme

$$dA = \frac{1}{2} (\sigma S) \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\tau}^\circ dl) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}^\circ D) \cdot \mathbf{E} (Sdl) = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV,$$

přičemž jsme využili rovnoběžnosti vektoru el. indukce \mathbf{D} s jednotkovým tečným vektorem $\boldsymbol{\tau}^\circ$ (oba mají směr siločáry, která je kolmá na obě desky) a faktu, že Sdl tvoří přírůstek objemu dV mezi deskami při posunutí dl . Odsud integrací přes celou změnu objemu (z nuly na $V = Sl$) s využitím konstantnosti vektorů \mathbf{D} a \mathbf{E} (viz opět P 7) obdržíme

$$A = \int_0^V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \int_0^V dV = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} V. \quad (11.3)$$

• Práce, kterou vykoná vnější síla se nemůže jen tak vytratit, protože by došlo k porušení zákona zachování energie (disipaci energie v teplo či jiné formy v našem idealizovaném případě neuvažujeme). Konec konců, kdybychom zápornou desku neudržovali ve vzdálenosti l silou \mathbf{F} , byla by přitažena zpět ke kladné desce, přitom by el. pole vykonalo práci rovnající se práci vynaložené při tvorbě systému. Záporná deska má proto v el. poli desky kladné jistou polohovou (potenciální) energii, kterou můžeme spojit s energií samotného el. pole, jež vzniklo mezi deskami. Využijeme-li (11.3), můžeme pro energii el. pole mezi deskami psát

$$W_e = A = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} V. \quad (11.4)$$

• Objemovou hustotu energie el. pole poté zavedeme jako podíl energie el. pole dW_e v jistém infinitezimálním objemu dV vytknutém okolo polohového vektoru \mathbf{r} dělenou velikostí tohoto objemu, tj.

$$w_e = \frac{dW_e}{dV}. \quad (11.5)$$

Provedeme-li naznačenou derivaci pro (11.3), získáme konečný vztah pro objemovou hustotu energie el. pole ve tvaru

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}, \quad [w_e] = \text{J m}^{-3}. \quad (11.6)$$