12 Náboj v magnetickém poli

Zadání

Vyšetřete pohyb bodového náboje v homogenním elektrickém poli a v homogenním magnetickém poli.

(Lze uložit za DCv)

Řešení

• Při řešení budeme předpokládat, že hmotnost náboje se nemění, tj. $m = \mathrm{konst.}$, a že rychlosti, kterými se náboj pohybuje, jsou výrazně menší, než je rychlost světla, tedy $|\boldsymbol{v}| \ll c$. Pak sílu působící na náboj můžeme vyjádřit pomocí II. Newtonova pohybového zákona a VIII. Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{em}} = Q[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}], \tag{12.1}$$

kde Q je velikost elektrického náboje, $\boldsymbol{E}$ je intenzita elektrického pole a $\boldsymbol{B}$ je indukce pole magnetického, přičemž mezi polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ a rychlostí $\boldsymbol{v}$ platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}.$$

• Tyto dvě vektorové rovnice tvoří soustavu šesti skalárních rovnic pro složky v_x, v_y, v_z, x, y a z vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{r}$. Řešení této soustavy bývá i v poměrně jednoduchých případech velmi složité (často lze soustavu řešit pouze numericky). Omezíme se proto jen na velmi jednoduché případy homogenních polí, které však nepůsobí současně.

Pouze homogenní elektrické pole

• Nyní tedy předpokládáme, že $\boldsymbol{E} = \mathbf{konst.}$ a že $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$. Rovnice (12.1) se tak po jednoduché úpravě redukuje na tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{m}\boldsymbol{E}.$$

Poměru Q/m se říká měrný (specifický) náboj a je to velmi důležitá veličina pro popis pohybu nábojů v elektrickém a magnetickém poli. Poněvadž výraz na pravé straně rovnice je konstantní vektor ve směru intenzity elektrického pole a jelikož na levé straně rovnice je dle definice vektor zrychlení náboje, plyne odsud výraz ve tvaru

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{m}\boldsymbol{E} = \mathbf{konst.}$$

To znamená, že náboj se v homogenním elektrickém poli pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným. Pro tento pohyb platí následující vektorové rovnice (viz FYA I)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} t + \boldsymbol{v}_0, \\ \boldsymbol{r}(t) &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0, \end{aligned}$$

což po dosazení dává

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \frac{Q}{m}\boldsymbol{E}\, t + \boldsymbol{v}_0, \\ \boldsymbol{r}(t) &= \frac{1}{2}\frac{Q}{m}\boldsymbol{E}\, t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0, \end{aligned}} \tag{12.2}$$

kde $\boldsymbol{v}_0$ je počáteční rychlost náboje a $\boldsymbol{r}_0$ jehо počáteční poloha.

Pouze homogenní magnetické pole

• Tento případ je charakterizován výrazy $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{B} = \mathbf{konst.}$ Pohybová rovnice tak přejde do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{m}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$$

• Rozdělme rychlost $\boldsymbol{v}$ na složku rovnoběžnou s magnetickým polem $\boldsymbol{v}_{||}$ ($\boldsymbol{v}_{||} \uparrow\uparrow \boldsymbol{B}$) a složku k němu kolmou $\boldsymbol{v}_{\perp}$ ($\boldsymbol{v}_{\perp} \perp \boldsymbol{B}$), tj. lze psát $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{||} + \boldsymbol{v}_{\perp}$. Pak vektorový součin můžeme rozepsat do podoby

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{v}_{||} + \boldsymbol{v}_{\perp}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}_{||} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{v}_{\perp} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}_{\perp} \times \boldsymbol{B},$$

jelikož vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je nulový. Výsledný vektor je pak (dle definice vektorového součinu) kolmý jak na vektor $\boldsymbol{v}_{\perp}$, tak i na $\boldsymbol{B}$, tudíž neovlivňuje velikost ani směr vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}_{||}$. Náboj se tak ve směru rovnoběžném s magnetickým polem pohybuje rovnoměrně přímočaře, tj. $\boldsymbol{v}_{||} = \mathbf{konst.}$ Pro popis pohybu náboje tak zbývá řešit rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\perp}}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{m}\boldsymbol{v}_{\perp} \times \boldsymbol{B}.$$

• Předpokládejme dále, že $\boldsymbol{v}_{||} = \boldsymbol{0}$, tj. náboj se nepohybuje podél siločár magnetického pole. Výraz na pravé straně rovnice udává zrychlení, a protože toto zrychlení působí kolmo na vektor rychlosti $\boldsymbol{v}_{\perp}$ (viz vektorový součin), jedná se o zrychlení normálové, které nemění velikost kolmé rychlosti ($v_{\perp} = \mathrm{konst.}$), mění pouze její směr. Pro velikost tohoto zrychlení, která je navíc konstantní, můžeme psát

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{|Q| v_{\perp} B}{m} = \mathrm{konst.}$$

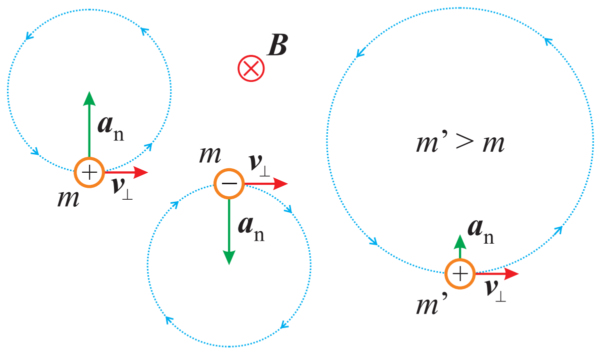
Náboj se tak v homogenním magnetickém poli pohybuje po obvodu kruhu, jehož plocha je kolmá k siločárám. Pro normálové zrychlení též musí platit (viz FYA I), že

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v_{\perp}^2}{R},$$

kde R je poloměr kružnice, po které se náboj pohybuje. Dáme-li oba výrazy pro normálové zrychlení do rovnosti, obdržíme pro poloměr kruhové trajektorie náboje rovnost

$$\boxed{R = \frac{mv_\perp}{|Q|B}.} \tag{12.3}$$

Ilustrace kruhových pohybů nábojů v homogenním magnetickém poli je zobrazena na obr. 12.1. Bude-li $\boldsymbol{v}_{||} \neq \mathbf{0}$, bude se náboj zároveň pohybovat rovnoměrně přímočaře podél siločár magnetického pole a výslednou trajektorií bude spirála.



Obr. 12.1: Obrázek ilustruje pohyb nábojů v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, která směřuje do nákresny. Velikost (absolutní hodnota) nábojů je pro všechny tři vyobrazení stejná a všechny náboje mají stejnou kolmou složku rychlosti $\boldsymbol{v}_\perp$, pouze hmotnost náboje u kružnice s větším poloměrem je zvětšena.

• Dále odvodíme tzv. cyklotronovou frekvenci, což je kruhová frekvence, s níž náboj obíhá po kruhové trajektorii v homogenním magnetickém poli. Obvod této kružnice je $2\pi R$, přičemž náboj po ní obíhá se stále stejnou rychlostí $v_\perp$. Doba jednoho oběhu (perioda) pak bude

$$T_c = \frac{2\pi R}{v_\perp} = 2\pi \frac{m}{|Q|B}.$$

Úhlovou frekvenci získáme z rovností $\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi / T_c$, kde f_c je frekvence. Po dosazení obdržíme výsledný výraz ve tvaru

$$\boxed{\omega_c = \frac{|Q|B}{m}.} \tag{12.4}$$