14 Hustota energie magnetického pole

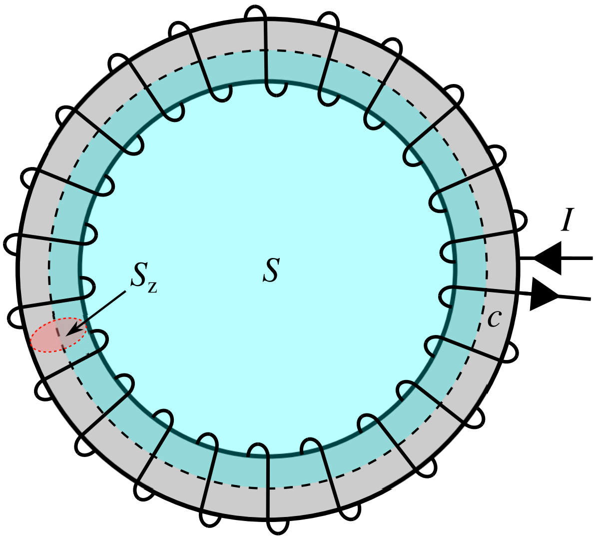
Zadání

Odvoďte velikost vlastní indukčnosti toroidu o z závitech, kterými protéká elektrický proud velikosti I. Využijte tohoto výsledku k odvození hustoty energie magnetického pole.

Řešení

Vlastní indukčnost toroidu

• Předpokládáme, že toroid má celkem z závitů vyrobených z vodiče zanedbatelného průměru, kterým prochází el. proud o velikosti I (viz obr. 14.1). Plochou S ohraničenou křivkou c pak protéká celkový el. proud $I_\mathrm{c} = zI$ (vodič protne plochu S z-krát). Dále budeme předpokládat, že poloměr jádra toroidu je zanedbatelně malý vzhledem k poloměru samotného toroidu, a tak je magnetické pole na ploše průřezu jádra S_z téměř konstantní.



Obrázek 14.1: Nákres k odvození vlastní indukčnosti toroidu. Křivka c odpovídá střední délce jádra toroidu (tuto délku, tj. délku křivky c, označíme l). Vodič protíná plochu S, která je vymezena křivkou c, celkem z-krát, kde z je počet závitů toroidu. Každý jednotlivý závit má plochu S_z, která odpovídá průřezu jádra toroidu.

• Dle I. MR bude intenzita magnetického pole v jádře toroidu (přesněji na křivce c) dána výpočtem

$$\oint\limits_{c(S)} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H \oint\limits_{c(S)} \mathrm{d}l = H\,l = \int\limits_{S} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I_\mathrm{c} = z\,I,$$

kde jsme využili faktu, že vektor $\boldsymbol{H}$ je souhlasně kolineární s orientovaným elementem $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ křivky c a že délka křivky c (tj. délka jádra toroidu) je l. Odsud po úpravě plyne

$$H = \frac{z\,I}{l}. \tag{14.1}$$

Využijeme-li navíc VII. MR ($\boldsymbol{B} = \mu\,\boldsymbol{H}$) získáme, že plochou každého závitu toroidu protéká magnetické pole o indukci

$$B = \mu\,\frac{z\,I}{l}. \tag{14.2}$$

• Plochou průřezu jádra pak prochází magnetický indukční tok

$$\Phi_1 = \int\limits_{S_z} \boldsymbol{B}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}_\mathbf{z} = B\int\limits_{S_z} \mathrm{d}S_\mathrm{z} = B\,S_\mathrm{z} = \mu\,\frac{z\,S_\mathrm{z}}{l}\,I,$$

kde jsme opět využili kolinearity vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\mathbf{d}\boldsymbol{S}_\mathbf{z}$, přibližné konstantnosti velikosti vektoru magnetické indukce na průřezu jádra toroidu a vztah (14.2). Vlastní indukční tok Φ_v je však spojen ze všemi závity, jelikož plocha závitů tvoří šroubovici, která se ovíjí podél celé délky jádra, tj. plocha této šroubovice je z násobkem plochy jednoho závitu (odpovídá cca. ploše průřezu jádra). Celkový vlastní indukční tok Φ_v je podle předešlého poté dán z násobkem indukčního toku jedním závitem Φ_1, tj. $\Phi_\mathrm{v} = z\,\Phi_1$. Odsud pro vlastní indukční tok toroidu plyne vztah

$$\Phi_\mathrm{v} = \mu\,\frac{z^2\,S_\mathrm{z}}{l}\,I. \tag{14.3}$$

• Porovnáme-li vztah (14.3) s obecným výrazem pro vlastní indukční tok $\Phi_\mathrm{v} = L_\mathrm{v}\,I$, kde L_v je vlastní indukčnost (viz přednáška), obdržíme výsledný výraz pro vlastní indukčnost toroidu ve tvaru

$$\boxed{L_\mathrm{v} = \mu\,\frac{z^2\,S_\mathrm{z}}{l}.} \tag{14.4}$$

Hustota energie magnetického pole

• Vznik magnetického pole v jádře toroidu je spojen s prací, kterou musí vykonat zdroj elektrického proudu, aby proud toroidem navýšil z 0 na konečný proud I. Při každém přenesení náboje o velikosti $\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t$ toroidem musí totiž zdroj překonávat elektromotorické napětí U_e, které působí proti proudu a jehož velikost je (viz přednáška)

$$U_\mathrm{e} = -L_\mathrm{v}\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

Diferenciál práce zdroje je pak dán výpočtem

$$\mathrm{d}A = -U_{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}Q = -\left(-L_{\mathrm{v}}\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right) I\,\mathrm{d}t = L_{\mathrm{v}}\,I\,\mathrm{d}I,$$

kde znaménko mínus u elektromotorického napětí značí, že napětí zdroje má opačnou polaritu. Integrací tohoto výrazu od 0 do konečné hodnoty proudu I získáme celkovou práci, kterou zdroj musel vykonat, tj.

$$A = \int_0^I L_{\mathrm{v}}\,I\,\mathrm{d}I = \frac{1}{2}\,L_{\mathrm{v}}\,I^2,$$

kde jsme využili konstantnosti vlastní indukce toroidu (závisí pouze na prostředí a geometrii úlohy – viz přednáška). Dle zákona zachování energie se tato práce nemůže ztratit, ale uloží se v jisté formě potenciální energie, a to v podobě energie magnetického pole v jádře toroidu. Můžeme proto pro energii magnetického pole toroidu psát rovnost

$$\boxed{W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,L_{\mathrm{v}}\,I^2.} \tag{14.5}$$

• Po dosazení za indukčnost toroidu z (14.4) po krátkém výpočtu obdržíme pro energii magnetického pole v jádře toroidu

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{z^2\,S_{\mathrm{z}}}{l}\,I^2\,\frac{l}{l} = \frac{1}{2}\,\underbrace{\left(\mu\,\frac{z\,I}{l}\right)}_{B}\,\underbrace{\left(\frac{z\,I}{l}\right)}_{H}\,\underbrace{(S_{\mathrm{z}}\,l)}_{V} = \frac{1}{2}\,B\,H\,V,$$

kde jsme výraz rozšířili poměrem l/l, využili vztahy (14.1) a (14.2) a součin $S_{\mathrm{z}}\,l$ udávající objem jádra toroidu, ve kterém se vzniklé magnetické pole nachází, označili V. Pokud je jádro toroidu vyrobeno z neizotropního materiálu, platí pro energii magnetického pole v jeho jádře vztah

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,V. \tag{14.6}$$

• Objemová hustota energie magnetického pole pak s použitím (14.6) bude

$$\boxed{w_{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}.} \tag{14.7}$$

Tento vztah platí obecně pro libovolné magnetické pole.