7 Gaussova věta

Zadání

Použitím Gaussovy věty odvoďte velikost vektorů elektrické indukce a elektrické intenzity pro následující nabitá tělesa:

1. rovnoměrně nabitou kouli s objemovou hustotou náboje ρ,
2. nekonečně dlouhé rovnoměrně nabité vlákno s lineární hustotou náboje τ,
3. nekonečně velkou rovnoměrně nabitou desku s plošnou hustotou náboje σ,
4. soustavu dvou rovnoběžných nekonečně velkých rovin rovnoměrně nabitých opačnými náboji s velikostí plošné hustoty náboje σ.

(Případy 3 až 4 lze uložit za DCv)

Řešení

1. Nabitá koule

• K řešení využijeme Gaussovu větu (IV. Maxwellova rovnice), kterou zapíšeme ve tvaru

$$\oint\limits_{S(V)} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_{V} \rho \, \mathrm{d}V, \tag{7.1}$$

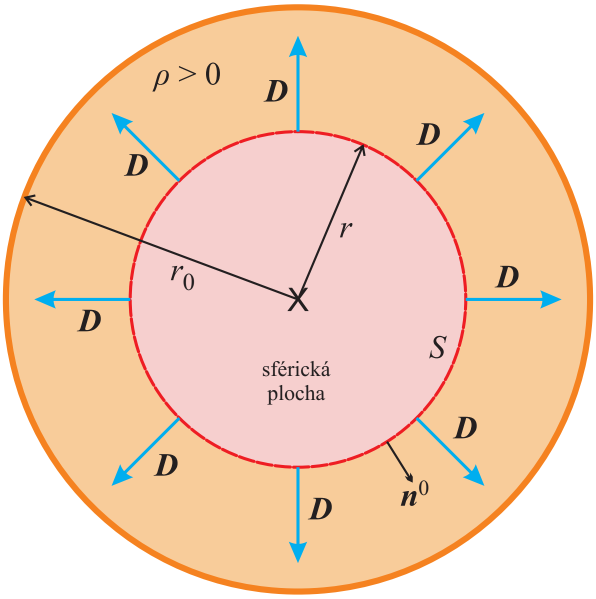
kde S je uzavřená plocha, která obklopuje objem V.
Slovy: ***Elektrický indukční tok uzavřenou plochou je roven celkovému elektrickému náboji rozloženému v objemu touto plochou ohraničeném.***

• Úlohu budeme řešit tak, že do středu nabité koule, jejíž poloměr je r_0, položíme střed myšlené sférické plochy o poloměru r. Vzhledem k sférické symetrii rozložení elektrického náboje v kouli bude vektor elektrické indukce $\boldsymbol{D}$ vždy kolmý k této ploše a v každém bodě jejího povrchu bude mít i stejnou velikost D. Úlohu musíme rozdělit na dva případy.

Případ $r \leq r_0$ Tato situace je graficky znázorněna na obr. 7.1, tedy teď určujeme elektrickou indukci uvnitř nabité koule. Rozdělme řešení rovnice (7.1) na levou a pravou stranu. Pro levou stranu bude platit

$$\oint\limits_{S(V)} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = D \oint\limits_{S(V)} \boldsymbol{n}^0 \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = D \oint\limits_{S(V)} \mathrm{d}S = DS = D\,4\pi r^2,$$

kde jsme využili faktu, že $\boldsymbol{D}$ má směr jednotkového normálového vektoru $\boldsymbol{n}^0$ k ploše S (tj. $\boldsymbol{D} \upuparrows \boldsymbol{n}^0$), přičemž velikost $\boldsymbol{D}$ je na ploše všude stejná, a že $\mathbf{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}^0\,\mathrm{d}S$, a tím pádem $\boldsymbol{n}^0 \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S$. Integrál $\oint_{S(V)} \mathrm{d}S$ pak udává velikost plochy S (vlastně sčítáme velikosti jednotlivých diferenciálů plochy, které tvoří dělení této celé plochy), tj. $4\pi r^2$ v tomto případě. Pro pravou stranu rovnice



Obr. 7.1: Ilustrační nákres k řešení elektrického pole vytvářeného rovnoměrně nabitou koulí o objemové hustotě elektrického náboje ρ.

(7.1) bude platit

$$\int\limits_V \rho\,\mathrm{d}V = \rho \int\limits_V \mathrm{d}V = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3,$$

jelikož ρ je v celém objemu V konstantní a integrál $\int_V \mathrm{d}V$ znamená velikost objemu V (sčítáme diferenciální objemy tvořící dělení celého objemu), zde $(4/3)\pi r^3$. Spojením obou výsledků získáme rovnost

$$D\,4\pi r^2 = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3,$$

z níž můžeme po jednoduché úpravě obdržet pro elektrickou indukci vztah

$$D = \frac{1}{3}\rho\, r, \tag{7.2}$$

tj. velikost elektrické indukce v objemu koule je přímo úměrná poloměru.

Případ $r > r_0$ V tomto případě určujeme elektrickou indukci vně koule. Pro levou stranu rovnice (7.1) bude platit předchozí závěr. Změní se pouze vyjádření pravé strany. Především je nutné si uvědomit, že v okamžiku, kdy integrace přestoupí poloměr koule, bude $\rho = 0$. Tudíž

$$\int\limits_V \rho\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V(r\le r_0)} \rho\,\mathrm{d}V + \int\limits_{V(r>r_0)} 0\,\mathrm{d}V = \rho\,\frac{4}{3}\pi r_0^3,$$

jelikož integrace mimo kouli dává nulový náboj. Dáme-li opět do rovnosti levou a pravou stranu, dostaneme po malé úpravě

$$D = \frac{1}{3}\rho\,\frac{r_0^3}{r^2}, \tag{7.3}$$

tj. velikost elektrické indukce vně objemu koule klesá s kvadrátem poloměru. Navíc celkový náboj, který koule nese, je $Q_V = \rho V$, kde $V = (4/3)\pi r_0^3$ je objem nabité koule. Pak je též možné psát, že

$$D\,4\pi r^2 = Q_V,$$

a odsud získat identitu

$$\boxed{D = \frac{1}{4\pi}\,\frac{Q_V}{r^2}.} \tag{7.4}$$

Slovy: ***Elektrická indukce se vně rovnoměrně nabité koule chová stejně jako u bodového náboje.***
Pozn.: *Tento závěr platí i pro kouli nesoucí rovnoměrně rozložený náboj na svém povrchu.*

• Výsledky lze zapsat do jediného vztahu

$$\boxed{D = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\rho\, r; & r \le r_0 \\[2ex] \dfrac{1}{3}\rho\,\dfrac{r_0^3}{r^2}; & r > r_0 \end{cases}.} \tag{7.5}$$

Bude-li permitivita prostředí ϵ stejná v celém prostoru (tzn. uvnitř i vně koule), lze podle vztahu $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ (VI. Maxwellova rovnice) pro velikost intenzity elektrického pole napsat

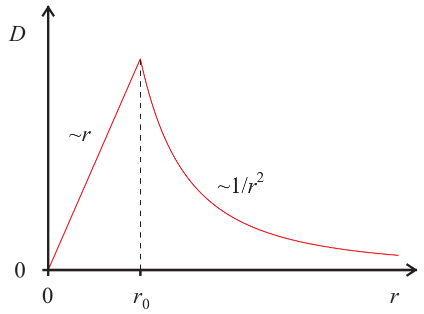
$$\boxed{E = \begin{cases} \dfrac{1}{3\epsilon}\rho\, r; & r \le r_0 \\[2ex] \dfrac{1}{3\epsilon}\rho\,\dfrac{r_0^3}{r^2}; & r > r_0 \end{cases}.} \tag{7.6}$$

Na obr. 7.2 je znázorněn průběh velikosti elektrické indukce v závislosti na vzdálenosti od středu koule.

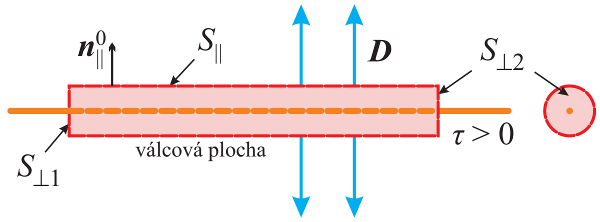
2. Nekonečně dlouhé vlákno

• Z důvodu nekonečnosti vlákna bude vektor elektrické indukce vždy kolmý k vláknu, jelikož ve zvoleném bodě bude jeho tečná složka tvořená nábojem z levé části vlákna kompenzována stejně velkou složkou z pravé části vlákna. Tedy $\boldsymbol{D}_{||} = \boldsymbol{0}$ (rovnoběžná složka $\boldsymbol{D}$ je nulová).

• Okolo vybrané části vlákna vytvoříme uzavřenou souosou válcovou plochu (viz obr. 7.3), přičemž plochy podstav označíme $S_{\perp 1}$, $S_{\perp 2}$ ($S_{\perp 1} = S_{\perp 2} = S_{\perp}$) a plochu pláště $S_{||}$. Výšku válcové plochy označíme l a poloměr podstav r.



Obr. 7.2: Průběh velikosti elektrické indukce D v závislosti na vzdálenosti r od středu rovnoměrně nabité koule.



Obr. 7.3: Ilustrační nákres k řešení elektrického pole vytvářeného nekonečným vláknem rovnoměrně nabitým elektrickým nábojem o lineární hustotě τ.

- K řešení opět využijeme Gaussovu větu. Levou stranou můžeme rozepsat do rovnosti

$$\oint_{S(V)} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_{||}} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{||} + \int_{S_{\perp 1}} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{\perp 1} + \int_{S_{\perp 2}} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{\perp 2},$$

tzn. integraci přes celou uzavřenou plochu válce rozdělíme na integraci přes jeho plášť a přes jeho podstavy. Nyní si stačí uvědomit, že rovnoběžná složka $\boldsymbol{D}$ je nulová, tudíž integrály přes podstavy budou nulové. To lze rozebrat podrobněji. Pro orientovaný element plochy podstavy platí $\mathbf{d}\boldsymbol{S}_{\perp} = \boldsymbol{n}_{\perp}^{0}\, \mathrm{d}S_{\perp}$, kde $\boldsymbol{n}_{\perp}^{0}$ je jednotkový normálový vektor plochy podstavy (pro levou podstavu směřuje vlevo ve směru vlákna, pro pravou podstavu směřuje vpravo ve směru vlákna). U podstav však platí, že $\boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{\perp} = 0$, jelikož $\boldsymbol{D}$ je kolmé k $\mathbf{d}\boldsymbol{S}_{\perp}$. Tím je nulový i integrál přes celou plochu podstavy. Rovnice se tak redukuje na tvar

$$\oint_{S(V)} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_{||}} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{||} = D \int_{S_{||}} \boldsymbol{n}_{||}^{0} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{||} = D \int_{S_{||}} \mathrm{d}S_{||} = D S_{||} = D\, 2\pi r l.$$

Při úpravě bylo využito faktů, že elektrická indukce $\boldsymbol{D}$ v každém bodě plochy $S_{||}$ má stejný směr jako jednotkový normálový vektor plochy $\boldsymbol{n}_{||}^{0}$, a tím i element plochy $\mathbf{d}\boldsymbol{S}_{||}$, a že integrace přes jednotlivé diferenciály plochy dává celkovou plochu, zde plochu válce $2\pi r l$. Velikost vektoru lze navíc vytknout před integrál, jelikož díky rovnoměrné lineární hustotě náboje na vlákně má v celé ploše $S_{||}$ stejnou velikost.

- Pro pravou stranu obdržíme identitu

$$\int_{V} \rho \, \mathrm{d}V = \int_{l} \tau \, \mathrm{d}l = \tau\, l,$$

poněvadž v prostoru mimo vlákno je hustota náboje nulová, a tak celkový elektrický náboj uzavřený zvolenou plochou je náboj, který nese část vlákna délky l vytknutá touto plochou, tj. τl.

• Spojením výsledků obdržíme $D\,2\pi r l = \tau\, l$, což po úpravě dává pro velikost elektrické indukce

$$\boxed{D = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{r}.} \tag{7.7}$$

Bude-li permitivita okolního prostředí všude stejná a rovna ε, bude velikost elektrické intenzity

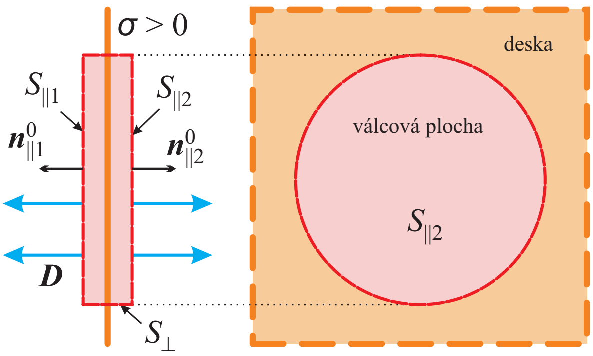
$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\frac{\tau}{r}.} \tag{7.8}$$

3. Nekonečně velká deska

• Při řešení budeme postupovat obdobně jako v předchozím případě. Část desky uzavřeme válcovou plochou, jejíž podstavy jsou rovnoběžné s rovinou desky (viz obr. 7.4). Pak integrál přes uzavřenou válcovou plochu můžeme rozepsat do rovnosti

$$\oint_{S(V)} \boldsymbol{D}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_{||1}} \boldsymbol{D}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{||1} + \int_{S_{||2}} \boldsymbol{D}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{||2} + \int_{S_{\perp}} \boldsymbol{D}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{\perp}.$$

Jelikož deska je nekonečně velká, bude opět tečná složka vektoru elektrické indukce nulová



Obr. 7.4: Ilustrační nákres k řešení elektrického pole vytvářeného nekonečně velkou rovnoměrně nabitou deskou s plošnou hustotou elektrického náboje σ.

($\boldsymbol{D}_{||} = \mathbf{0}$) a z tohoto důvodu bude nulový i plošný integrál přes plochu $S_{\perp}$, poněvadž vektor $\boldsymbol{D}$ je kolmý ke všem elementům této plochy, tj. $\boldsymbol{D}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{\perp} = 0$. Uvědomíme-li si navíc, že vektor $\boldsymbol{D}$ má na opačných polorovinách desky opačný směr a že velikosti podstav jsou stejné (tj. $S_{||1} = S_{||2} = S_{||}$), můžeme plošný integrál zredukovat na tvar

$$\oint_{S(V)} \boldsymbol{D}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = 2\int_{S_{||}} \boldsymbol{D}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{||}.$$

Též velikost vektoru elektrické indukce na ploše $S_{||}$ bude všude stejná, protože deska je nabita rovnoměrně. Pak

$$\int\limits_{S_{||}} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{||} = D \int\limits_{S_{||}} \boldsymbol{n}^0_{||} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}_{||} = D \int\limits_{S_{||}} \mathrm{d}S_{||} = DS_{||},$$

tedy

$$\oint\limits_{S(V)} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = D\,2S_{||}.$$

• Pro pravou stranu Gaussovy rovnice lze psát

$$\int\limits_{V} \rho\,\mathrm{d}V = \int\limits_{S_{||}} \sigma\,\mathrm{d}S_{||} = \sigma\,S_{||},$$

přičemž jsme opět využili nulovosti hustoty elektrického náboje mimo desku, rovnoměrnosti rozložení náboje na desce ($\sigma = \mathrm{konst.}$) a faktu, že válcová plocha vytkne na desce kruh o ploše stejné, jako je plocha podstavy válce.

• Spojením výrazů obdržíme rovnost $D\,2S_{||} = \sigma\,S_{||}$, což po úpravě dá pro velikost elektrické indukce výraz

$$\boxed{D = \frac{1}{2}\sigma.} \tag{7.9}$$

Bude-li opět permitivita prostředí ε , bude pro velikost elektrické intenzity platit

$$\boxed{E = \frac{1}{2\varepsilon}\sigma.} \tag{7.10}$$

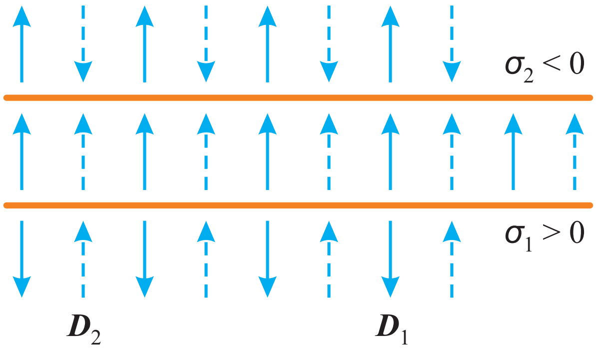
3. Dvě rovnoběžné roviny

• Obě desky jsou nabity elektrickými náboji o stejné velikosti plošné hustoty $\sigma = |\sigma_1| = |\sigma_2|$, přičemž jedna nese náboj kladný ($\sigma_1 > 0$) a druhá záporný ($\sigma_2 < 0$). Podle předchozího případu vytvářejí tyto desky kolem sebe elektrické pole o velikostech indukcí

$$|D_1| = |D_2| = \frac{1}{2}\sigma.$$

Dle principu superpozice pak bude výsledná indukce dána vektorovým součtem indukcí od jednotlivých desek.

• Vektor indukce záporně nabité desky je ale opačně orientovaný oproti vektoru indukce kladné desky (viz obr. 7.5), což znamená, že v oblasti mezi deskami dojde k navýšení velikosti indukce na dvojnásobek její hodnoty od jedné samostatné desky, kdežto mimo oblast mezi deskami se



Obr. 7.5: Ilustrační nákres k řešení elektrického pole vytvářeného dvěma rovnoběžnými deskami s opačnými plošnými hustotami elektrického náboje o velikosti $\sigma = |\sigma_1| = |\sigma_2|$. Vektor elektrické indukce $\boldsymbol{D}_1$ (plná šipka) je vytvářen deskou kladně nabitou ($\sigma_1 > 0$), vektor $\boldsymbol{D}_2$ (čárkovaná šipka) je tvořen deskou nabitou záporně ($\sigma_2 < 0$).

indukce desek odečtou, tudíž její hodnota zde bude nulová ($D = 0$ i $E = 0$). Odsud pak snadno dostaneme pro elektrickou indukci

$$D = 2|D_1| = 2|D_2|,$$

tedy po dosazení z (7.9)

$$\boxed{D = \sigma.} \tag{7.11}$$

Bude-li permitivita prostředí ε, bude pro elektrickou intenzitu platit

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon}\sigma.} \tag{7.12}$$