

KIV/ZI - cvičení 9

Matice

“Tabulka o m řádcích a n sloupcích”

V každé buňce tabulky je nějaké číslo nebo jiný výraz

Př.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 51 \end{pmatrix}$$

$$m=2, n=3$$

Prvky matice se značí pomocí indexů, první index udává řádek a druhý sloupec

$$a_{11} = 0, a_{23} = 51$$

Vektor

“Matice s jedním z rozměrů o velikosti 1”

Př. $V = (0, 1, 5, 3)$

Ve vzorcích v excelu matice a vektory zapsány pomocí oblasti

Např.

A2:A4

C2:E4

	A	B	C	D	E
1	Vektor		Matice		
2	1		1	-1	2
3	5		5	0	-3
4	4		7	4	9

Sčítání vektorů a matic

Musí mít stejné rozměry

$$C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 23 \\ 47 & 154 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 7 & -54 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 18 & 25 & 53 \\ 54 & 100 & -10 \end{pmatrix}$$

Sčítání matic v excelu

=Oblast matice + oblast matice

Př. =C8:C10+D8:D10

Pro vložení hodnot do buněk: ctrl+shift+enter

Musím vědět velikost oblasti pro výsledek a označit ji

- Označit oblast pro výsledek -> zapsat vzorec -> ctrl+shift+enter
- Nebo: Enter -> vznikne přesah hodnot v buňce -> ctrl+shift+enter

Násobení číslem

Přenásobí se číslem jednotlivé hodnoty matice/vektoru

$$B = k * A$$

$$b_{ij} = k * a_{ij}$$

Př.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 23 \\ 47 & 154 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 25 \\ 40 & 25 & 115 \\ 235 & 770 & 10 \end{pmatrix}$$

Násobení vektorů

Výsledkem je číslo

“Součet násobků jednotlivých hodnot”

Př.

$$A = (2, 1, 5) \quad B = (1, 0, 3)$$

$$A * B = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{12} + a_{13} * b_{13} = 2 * 1 + 1 * 0 + 5 * 3 = 17$$

Násobení matic

Výsledkem je matice

Vektor řádky krát vektor sloupce

Musí si odpovídat A_n a B_m

Př. $C = AB$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \boxed{5} & \boxed{6} \\ \boxed{7} & \boxed{8} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} = 1 * 5 + 2 * 7 = 19$$

$$c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} = 1 * 6 + 2 * 8 = 22$$

$$c_{21} = a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} = 3 * 5 + 4 * 7 = 43$$

$$c_{22} = a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} = 3 * 6 + 4 * 8 = 50$$

Násobení matic v excelu

Násobení číslem

=C3*D3:D5

Násobení vektorů

=SOUČIN.SKALÁRNÍ(oblast vektoru;oblast vektoru)

Násobení matic

=SOUČIN.MATIC(oblast matice; oblast matice)

Příklad - home.zcu.cz/~akonig/cv9/matrice1.xlsx

2)	k	vektor	k-násobek vektoru							
	3	6	18							
		3	9							
		8	24							
3)	vektor A	vektor B	A + B							
	7	1	8							
	3	8	11							
	2	5	7							
4)	Matice A			Matice B		A * B				
	2	1	3	1	5	3	0			
	4	-1	2	4	2	-2	10			
	-2	3	1	-1	-4	9	-8			
	5	-6	3			-22	1			
	4	2	-1			13	28			
5)	Matice A			Matice B		A*B				
	1	1	2	6,67	3,00	-2,33	1,00	0,00	0,00	
	2	4	1	-3,00	-1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	
	5	8	7	-1,33	-1,00	0,67	0,00	0,00	1,00	

Determinant

Definovaný pouze na čtvercových maticích

Reálné číslo, které nějakým způsobem vyjadřuje určité vlastnosti matice

=DETERMINANT(oblast matice)

Regulární matice

Čtvercová matice

Nemá žádný lineárně závislý řádek

Její determinant je rozdílný od nuly

- Pokud $\det(A)=0 \rightarrow$ matice je singulární

Hodně vztahů v algebře je definována, jen pokud je matice regulární

Inverze

Lze spočítat jen z regulární matice

Značíme A^{-1}

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad AA^{-1} = I$$

I - jednotková matice

Využití:

Převod mezi souřadnými systémy

Výpočet řešení soustavy rovnic

Příklad - home.zcu.cz/~akonig/cv9/matrice2.xlsx

1. Na listu Inverze A nejprve ověřte pomocí funkce DETERMINANT(), že matice A je regulární (tj. determinant je různý od 0). Pokud je matice singulární (tj. determinant je roven 0), nelze k ní spočítat inverzní matici.
2. Pokud determinant není roven 0, inverzní matici lze vypočítat funkcí INVERZE(). Inverzní matici vypočtěte.
3. I značí jednotkovou matici (čtvercová matice, kde na hlavní diagonále jsou jedničky a ostatní hodnoty jsou nuly). Na listu Inverze A ověřte, že $AI = IA = A$
4. Na listu Inverze A ověřte, že $A^{-1}A = I$. Nezapomeňte správně nastavit formátování buněk.
5. Stejný postup proveďte pro matice B a C na listech Inverze B a Inverze C.

Řešení soustavy rovnic

$$3a + b - c = 7$$

$$a + 2b - 5c = 15$$

$$3a + 5b + 2c = 9$$

Zápis soustavy pomocí matic: $Ax = b$

3	1	-1		a		7
1	2	-5	*	b	=	15
3	5	2		c		9

Řešení soustavy rovnic

Úprava maticové rovnice

$$Ax = b \quad / \text{ násobíme rovnicí zleva } A^{-1}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad / A^{-1}A = I$$

$$Ix = A^{-1}b \quad / Ix = x$$

$$x = A^{-1}b$$

Příklad - home.zcu.cz/~akonig/cv9/matice3.xlsx

1. Vyřešte soustavu rovnic v souboru na listu Rovnice. Výsledek by měl vyjít $x=[2,1,-3,4,3]^T$.