Příklad 10001 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	2	4
$f(t_i)$	5	4	14	120

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 1$?

Řešení 10001

$$P_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 14 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 4,\ a_1 = -3,\ a_2 = 0,\ a_3 = 2$$

$$P_3(1) = 3$$

Příklad 10002 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-2	0	2	3
$f(t_i)$	6	4	14	49

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 1$?

Řešení 10002

$$P_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 14 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 4,\ a_1 = -4.8,\ a_2 = 1.5,\ a_3 = 1.7$$

$$P_3(1) = 2.4$$

Příklad 10003 Proveďte interpolaci trigonometrickým polynomem π-periodické funkce $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
$f(t_i)$	0	0	1	0

.

Interpolační polynom volte ve tvaru $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t + A_2 \cos 4t$.

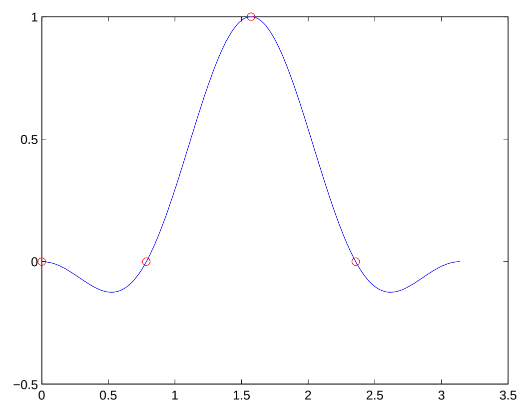
Řešení 10003

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t + A_2 \cos 4t.$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = 0.5,\ A_1 = -0.5,\ B_1 = 0,\ A_2 = 0.25$$



Příklad 10004 Proveďte interpolaci trigonometrickým polynomem 4π-periodické funkce $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	π	2π	3π
$f(t_i)$	0	1	1	0

Interpolační polynom volte ve tvaru $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\frac{t}{2} + B_1 \sin\frac{t}{2} + A_2 \cos t$.

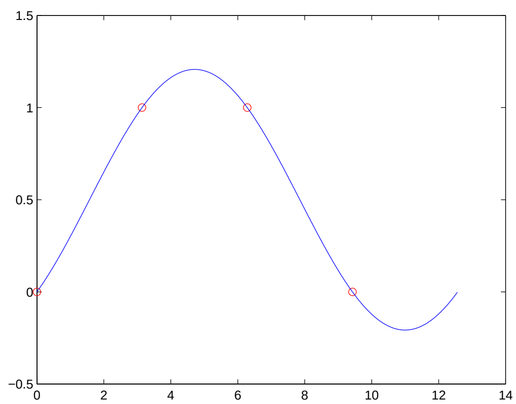
Řešení 10004

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t + A_2 \cos 4t.$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = 1,\ A_1 = -0.5,\ B_1 = 0.5,\ A_2 = 0$$



Příklad 10005 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-2	0	2	3
$f(t_i)$	-6	4	14	49

.

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 1$?

Řešení 10005

$$P_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 14 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 4,\ a_1 = -3,\ a_2 = 0,\ a_3 = 2$$

$$P_3(1) = 3$$

Příklad 11001 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1	2
$f(t_i)$	-2	0	0	-2

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -2$?

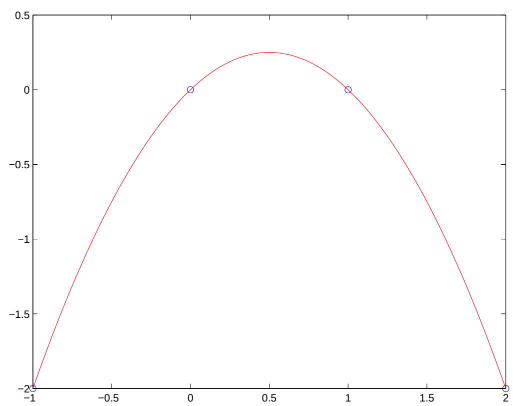
Řešení 11001 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2.0 & 0 & 0 & -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0; a_1 = 1; a_2 = -1; a_3 = 0;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-2) = -6$.



Příklad 11002 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2	3
$f(t_i)$	0	0	-2	-6

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -1$?

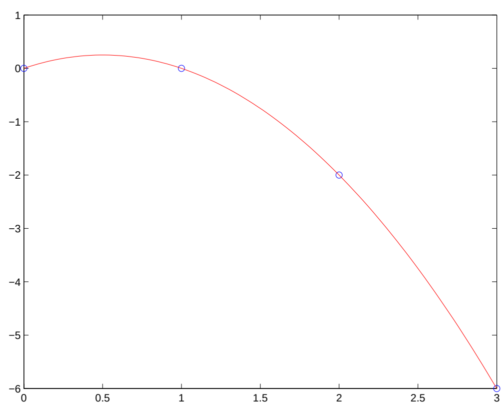
Řešení 11002 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \\ 1.0 & 3.0 & 9.0 & 27.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.0 & -6.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0; a_1 = 1; a_2 = -1; a_3 = 0;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-1) = -2$.



Příklad 11003 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1	2
$f(t_i)$	2	1	0	-1

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -2$?

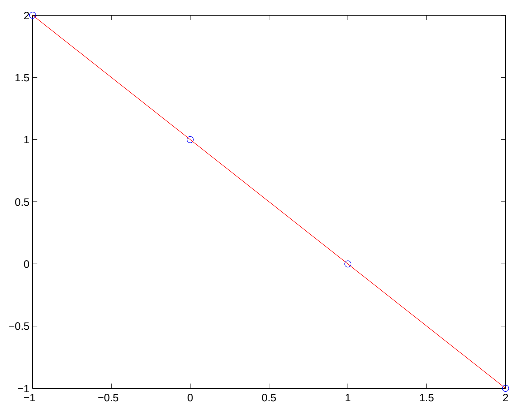
Řešení 11003 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1; a_2 = 0; a_3 = 0;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-2) = 3$.



Příklad 11004 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2	3
$f(t_i)$	1	0	-1	-2

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -1$?

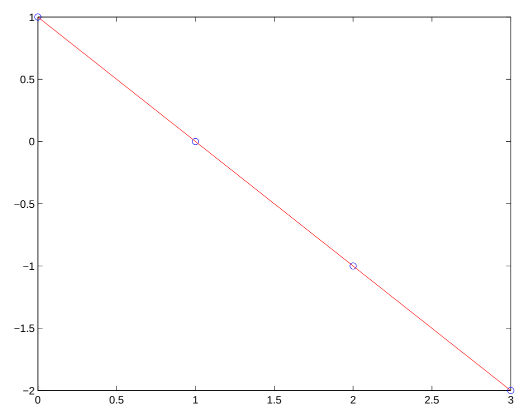
Řešení 11004 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \\ 1.0 & 3.0 & 9.0 & 27.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1; a_2 = 0; a_3 = 0;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-1) = 2$.



Příklad 11005 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1	2
$f(t_i)$	-2	-1	0	7

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -2$?

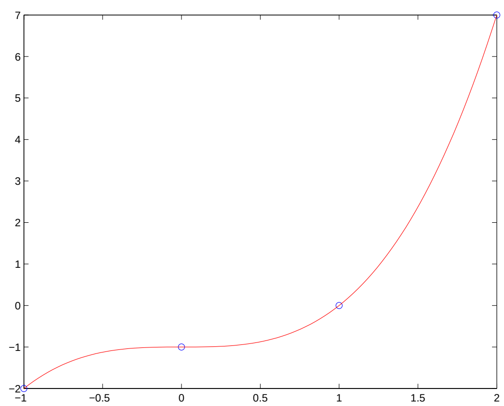
Řešení 11005 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2.0 & -1.0 & 0 & 7.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-2) = -9$.



Příklad 11006 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2	3
$f(t_i)$	-1	0	7	26

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -1$?

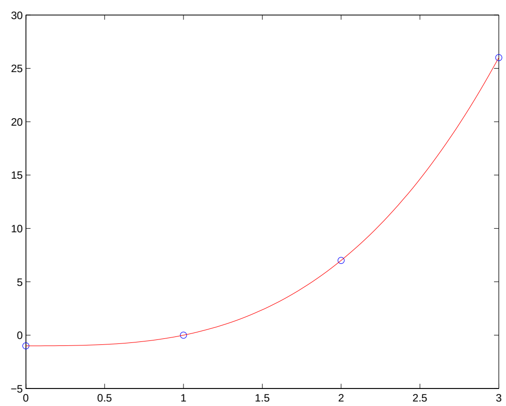
Řešení 11006 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \\ 1.0 & 3.0 & 9.0 & 27.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 7.0 & 26.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-1) = -2$.



Příklad 11007 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1	2
$f(t_i)$	2	0	0	-4

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -2$?

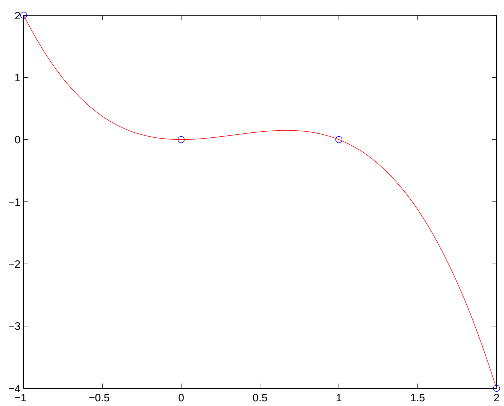
Řešení 11007 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 & -4.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0; a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = -1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-2) = 12$.



Příklad 11008 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2	3
$f(t_i)$	0	0	-4	-18

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -1$?

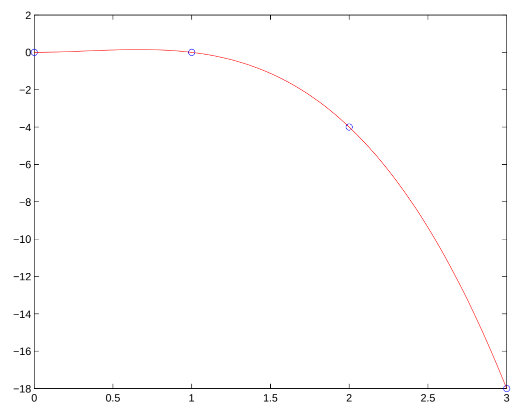
Řešení 11008 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \\ 1.0 & 3.0 & 9.0 & 27.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4.0 & -18.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0; a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = -1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-1) = 2$.



Příklad 11009 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1	2
$f(t_i)$	-2	-1	0	7

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -2$?

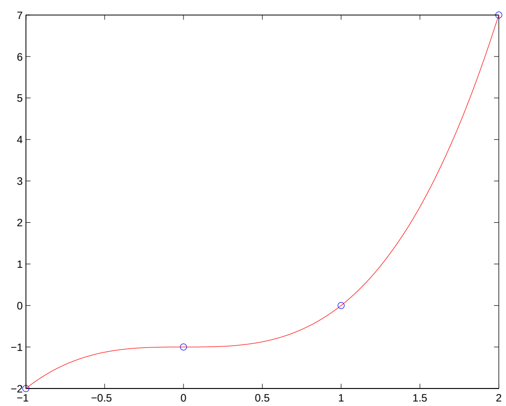
Řešení 11009 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2.0 & -1.0 & 0 & 7.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-2) = -9$.



Příklad 11010 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2	3
$f(t_i)$	-1	0	7	26

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = -1$?

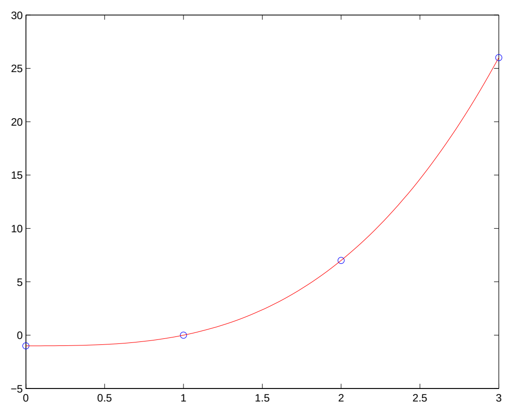
Řešení 11010 Interpolace polynomem 3. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 \\ 1.0 & 3.0 & 9.0 & 27.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 7.0 & 26.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(-1) = -2$.



Příklad 11011 Určete interpolační polynom pro $4\,\pi$ periodickou funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1π	0π	1π	2π
$f(t_i)$	-1.5	0.5	-1.5	0.5

Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$
Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 4\,\pi$?

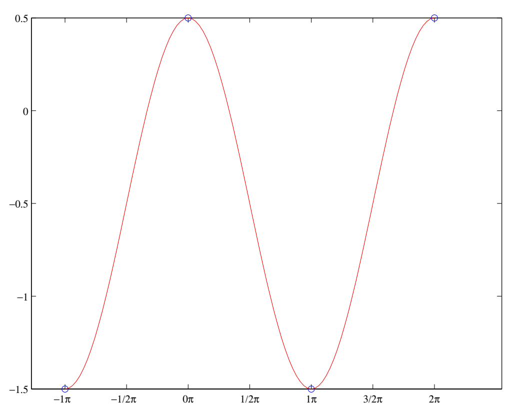
Řešení 11011 Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.500 & 0 & -1.0 & -1.0 \\ 0.500 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.500 & -1.0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1.50 \\ 0.500 \\ -1.50 \\ 0.500 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(4\,\pi) = 0.5$.



Příklad 11012 Určete interpolační polynom pro $4\,\pi$ periodickou funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0π	1π	2π	3π
$f(t_i)$	0.5	-1.5	0.5	-1.5

Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$
Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 4\,\pi$?

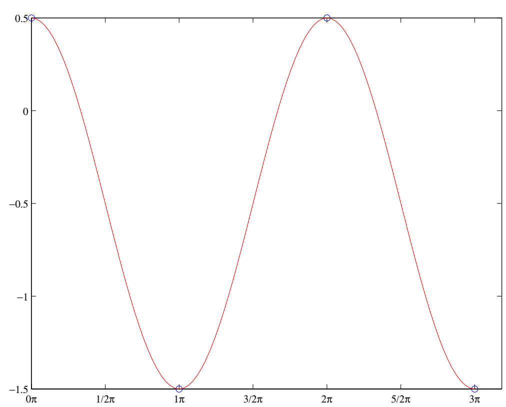
Řešení 11012 Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.500 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.500 & -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.500 \\ -1.50 \\ 0.500 \\ -1.50 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(4\,\pi) = 0.5$.



Příklad 11013 Určete interpolační polynom pro $2\,\pi$ periodickou funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-0.5π	0π	0.5π	1π
$f(t_i)$	-1.5	0.5	-1.5	0.5

Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(t1) + B_1\sin(t1) + A_2\cos(t2)$
Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 2\,\pi$?

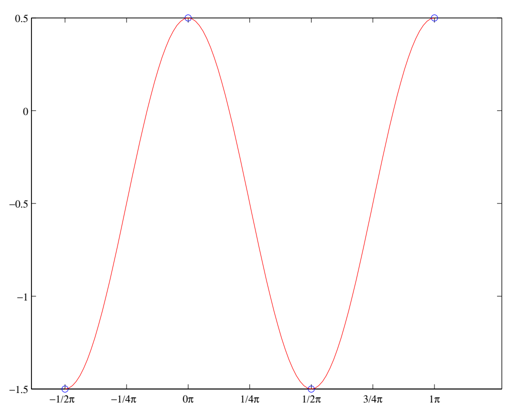
Řešení 11013 Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(t1) + B_1\sin(t1) + A_2\cos(t2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.500 & 0 & -1.0 & -1.0 \\ 0.500 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.500 & -1.0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1.50 \\ 0.500 \\ -1.50 \\ 0.500 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(2\,\pi) = 0.5$.



Příklad 11014 Určete interpolační polynom pro $2\,\pi$ periodickou funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0π	0.5π	1π	1.5π
$f(t_i)$	0.5	-1.5	0.5	-1.5

Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(t1) + B_1\sin(t1) + A_2\cos(t2)$
Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 2\,\pi$?

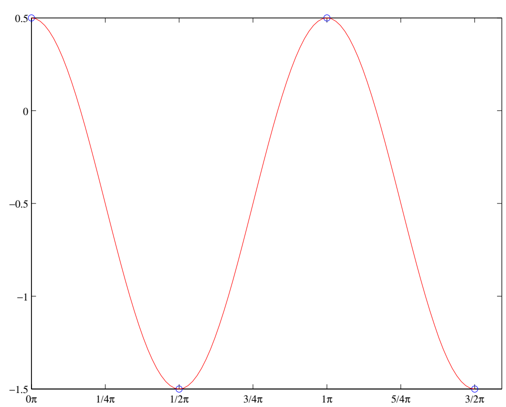
Řešení 11014 Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(t1) + B_1\sin(t1) + A_2\cos(t2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.500 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.500 & -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.500 \\ -1.50 \\ 0.500 \\ -1.50 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 1;$$

Hodnota v bodě $\varphi(2\,\pi) = 0.5$.



Příklad 11015 Určete interpolační polynom pro 4π periodickou funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1π	0π	1π	2π
$f(t_i)$	-1	1	1	-1

Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(t1/2) + B_1\sin(t1/2) + A_2\cos(t1)$
Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 4\pi$?

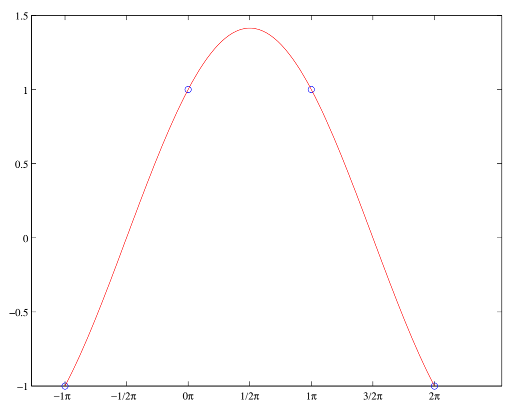
Řešení 11015 Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(t1/2) + B_1\sin(t1/2) + A_2\cos(t1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.500 & 0 & -1.0 & -1.0 \\ 0.500 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.500 & -1.0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0; a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = 0;$$

Hodnota v bodě $\varphi(4\pi) = 1$.



Příklad 11016 Určete interpolační polynom pro $4\,\pi$ periodickou funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0π	1π	2π	3π
$f(t_i)$	1	1	-1	-1

Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$
Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 4\,\pi$?

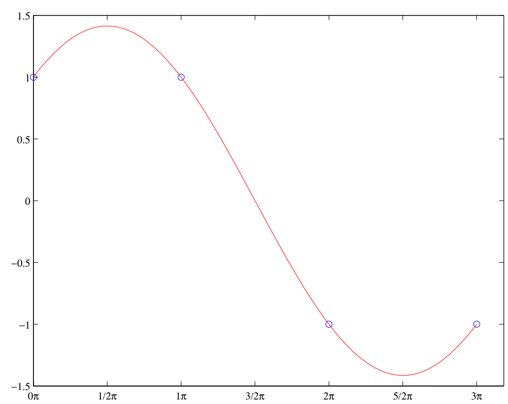
Řešení 11016 Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.500 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.500 & -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ -1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0; a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = 0;$$

Hodnota v bodě $\varphi(4\,\pi) = 1$.



Příklad 11017 Určete interpolační polynom pro $4\,\pi$ periodickou funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1π	0π	1π	2π
$f(t_i)$	1	-1	-1	1

Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$
Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 4\,\pi$?

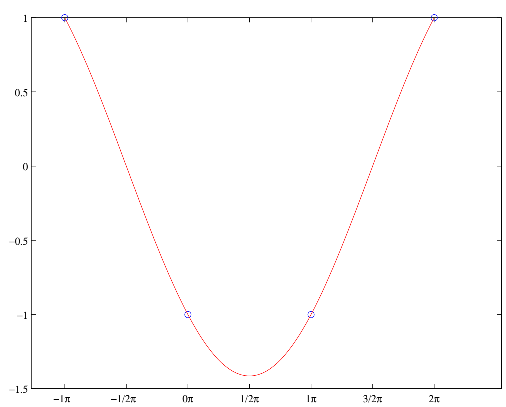
Řešení 11017 Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.500 & 0 & -1.0 & -1.0 \\ 0.500 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.500 & -1.0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.0 \\ -1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0; a_1 = -1; a_2 = -1; a_3 = 0;$$

Hodnota v bodě $\varphi(4\,\pi) = -1$.



Příklad 11018 Určete interpolační polynom pro $4\,\pi$ periodickou funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0π	1π	2π	3π
$f(t_i)$	-1	-1	1	1

Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$
Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 4\,\pi$?

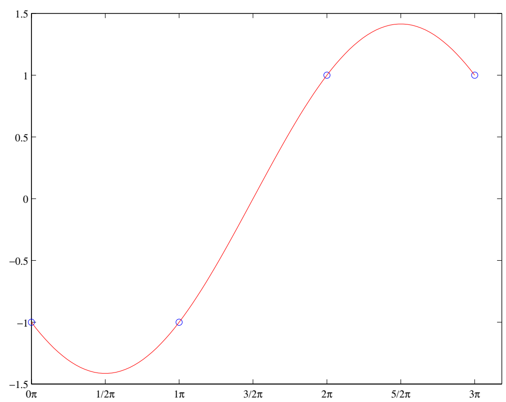
Řešení 11018 Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(t1/2) + B_1 \sin(t1/2) + A_2 \cos(t1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.500 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.500 & -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0; a_1 = -1; a_2 = -1; a_3 = 0;$$

Hodnota v bodě $\varphi(4\,\pi) = -1$.



Příklad 11020 Určete interpolační polynom pro $2\,\pi$ periodickou funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$f(t_i)$	-1	-1	1	1

Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(t) + B_1\sin(t) + A_2\cos(2t)$
Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 2\pi$?

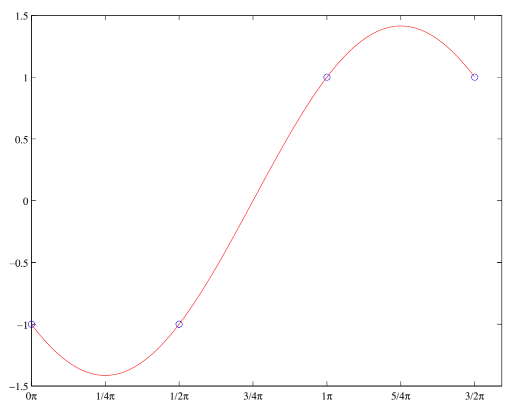
Řešení 11020 Interpolační polynom volte ve tvaru: $\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(t1) + B_1\sin(t1) + A_2\cos(t2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.500 & 1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.500 & -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0.500 & 0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0; a_1 = -1; a_2 = -1; a_3 = 0;$$

Hodnota v bodě $\varphi(2\,\pi) = -1$.



Příklad 12001 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	1	2	3
$f(t_i)$	2	4	5

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 1{,}5$?

Řešení 12001 Není vypočítáno.

Příklad 12002 Určete interpolační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	1	3	5
$f(t_i)$	2	4	7

.

Jaká je hodnota interpolačního polynomu v bodě $t = 2$?

Řešení 12002 Není vypočítáno.

Příklad 12003 Proveďte interpolaci trigonometrickým polynomem 2π-periodické funkce $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$f(t_i)$	0	0	1	0

.

Řešení 12003 Není vypočítáno.

Příklad 12004 Proveďte interpolaci trigonometrickým polynomem 2π-periodické funkce $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$f(t_i)$	0	1	1	0

.

Řešení 12004 Není vypočítáno.

Příklad 13001 Proveďte interpolaci trigonometrickým polynomem π-periodické funkce $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$f(t_i)$	1	0	1	0

Interpolační polynom volte ve tvaru

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t + A_2 \cos 4t.$$

Určete hodnotu interpolačního polynomu v bodě $t = \pi/2$.

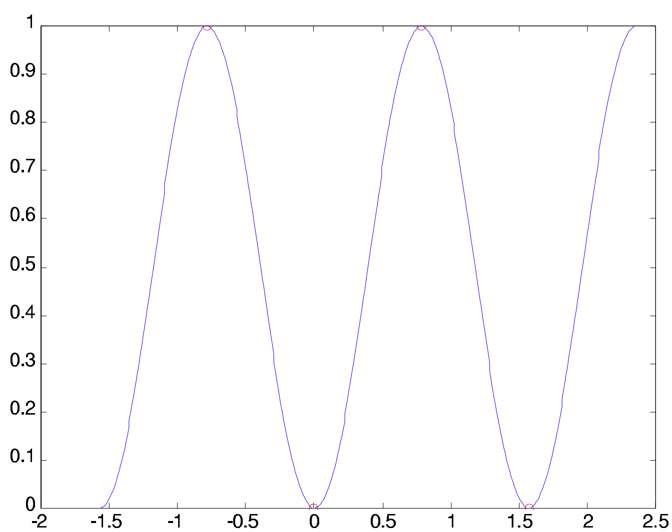
Řešení 13001

$$\varphi(t) = \tfrac{A_0}{2} + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t + A_2 \cos 4t.$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ B_1 = 0,\ A_2 = -0.5$$



Příklad 13002 Proveďte interpolaci trigonometrickým polynomem π-periodické funkce $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
$f(t_i)$	1	0	1	0

.

Interpolační polynom volte ve tvaru

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t + A_2 \cos 4t.$$

Určete hodnotu interpolačního polynomu v bodě $t = 3\pi/4$.

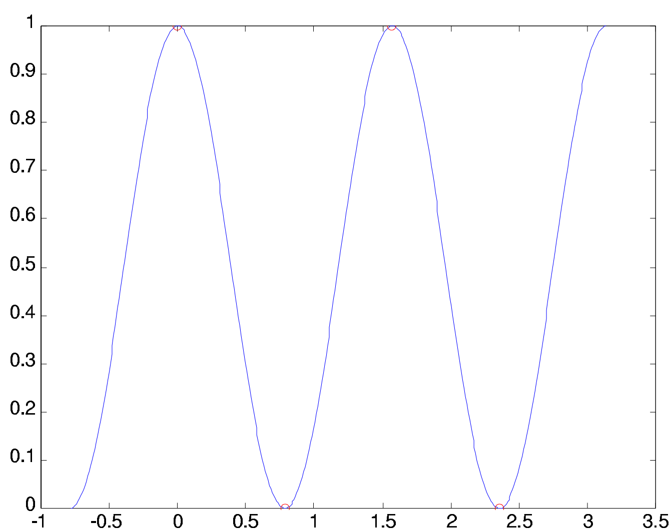
Řešení 13002

$$\varphi(t) = \tfrac{A_0}{2} + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t + A_2 \cos 4t.$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ B_1 = 0,\ A_2 = 0.5$$



Příklad 13003 Proveďte interpolaci trigonometrickým polynomem 4π-periodické funkce $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	$-\pi$	0	π	2π
$f(t_i)$	0	0	1	1

.

Interpolační polynom volte ve tvaru

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\frac{t}{2} + B_1 \sin\frac{t}{2} + A_2 \cos t.$$

Určete hodnotu interpolačního polynomu v bodě $t = 2\pi$.

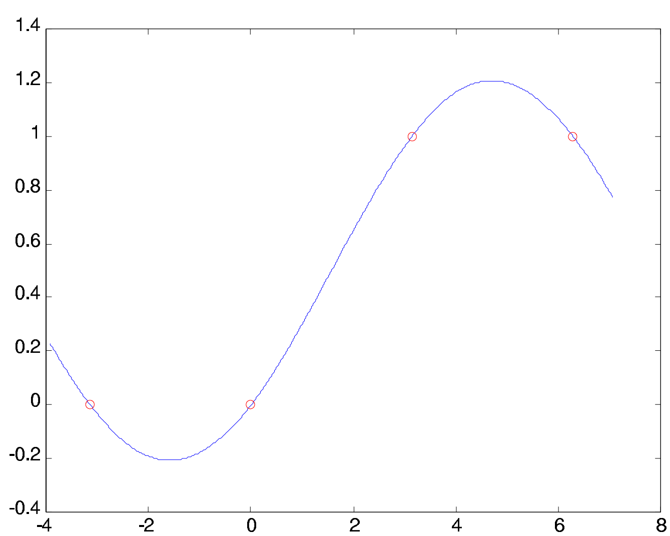
Řešení 13003

$$\varphi(t) = \tfrac{A_0}{2} + A_1 \cos\tfrac{t}{2} + B_1 \sin\tfrac{t}{2} + A_2 \cos t.$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = 1,\ A_1 = -0.5,\ B_1 = 0.5,\ A_2 = 0$$



Příklad 13004 Proveďte interpolaci trigonometrickým polynomem 4π-periodické funkce $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	π	2π	3π
$f(t_i)$	0	0	1	1

Interpolační polynom volte ve tvaru

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\frac{t}{2} + B_1 \sin\frac{t}{2} + A_2 \cos t.$$

Určete hodnotu interpolačního polynomu v bodě $t = 3\pi$.

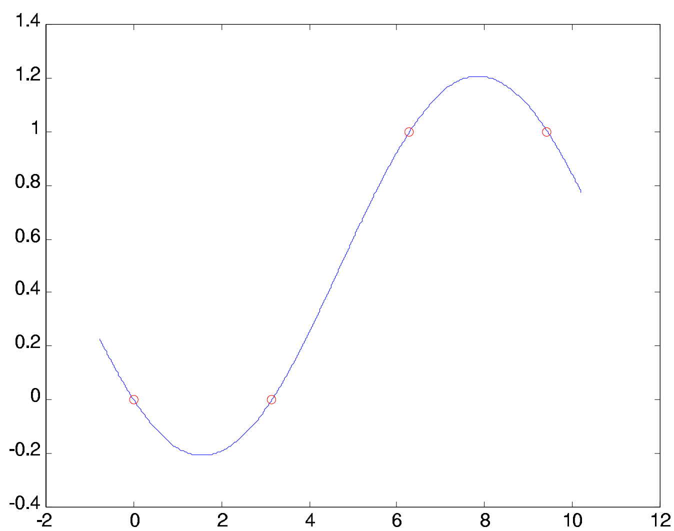
Řešení 13004

$$\varphi(t) = \tfrac{A_0}{2} + A_1 \cos\tfrac{t}{2} + B_1 \sin\tfrac{t}{2} + A_2 \cos t.$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = 1,\ A_1 = -0.5,\ B_1 = -0.5,\ A_2 = 0$$



Příklad 20001 Určete diskrétní L_2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 + c_1 t^2$;

t_i	-3	0	2
$f(t_i)$	1	4	0

Načrtněte obrázek se zadanými hodnotami a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

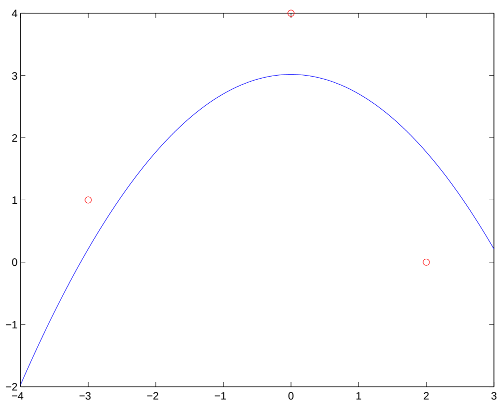
Řešení 20001

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 13 & 97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = 184/61,\ c_1 = -19/61 \quad (c_0 = 3.01639,\ c_1 = -0.31147)$$



Příklad 20002 Určete diskrétní L_2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 t + c_1 t^2$;

t_i	-3	0	2
$f(t_i)$	1	4	0

Načrtněte obrázek se zadanými hodnotami a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

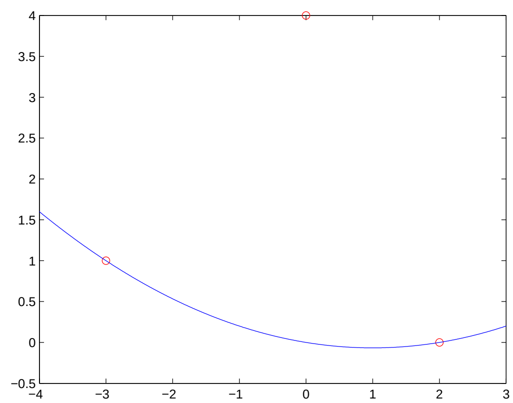
Řešení 20002

$$\varphi(t) = c_0 t + c_1 t^2$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 & -19 \\ -19 & 97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = -2/15,\ c_1 = 1/15 \quad (c_0 = -0.133333,\ c_1 = 0.066666)$$



Příklad 20003 Určete diskrétní L_2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 + c_1 t$;

t_i	-3	0	2
$f(t_i)$	1	4	0

Načrtněte obrázek se zadanými hodnotami a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

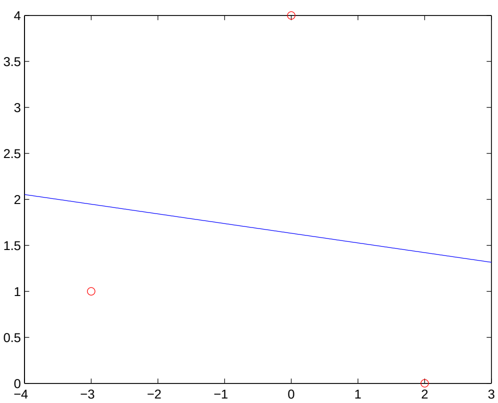
Řešení 20003

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = 31/19,\ c_1 = -2/19 \quad (c_0 = 1.63157,\ c_1 = -0.10526)$$



Příklad 20004 Určete diskrétní L_2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$;

t_i	-2	-1	0	1	2
$f(t_i)$	-1	-1	0	1	1

Načrtněte obrázek se zadanými hodnotami a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

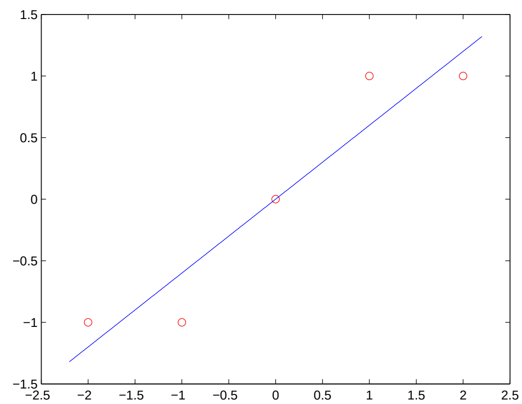
Řešení 20004

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = 0,\ c_1 = 0.6,\ c_2 = 0$$



Příklad 21001 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2
$f(t_i)$	-3	8	-5

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

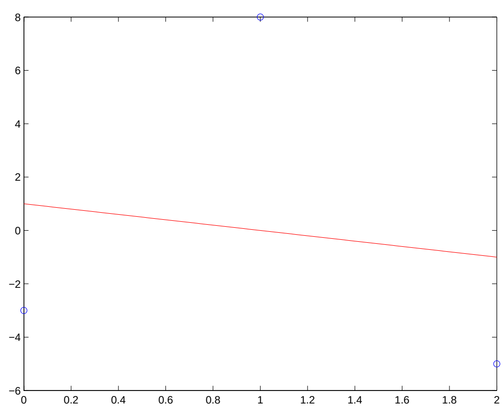
Řešení 21001 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3.0 \\ 8.0 \\ -5.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.0 \\ 3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21002 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2
$f(t_i)$	-2	6	-4

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

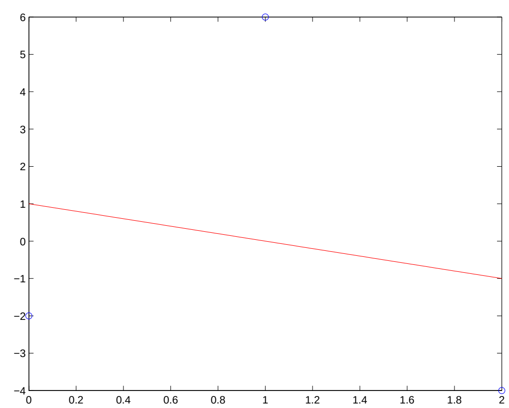
Řešení 21002 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -2.0 \\ 6.0 \\ -4.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.0 \\ 3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \qquad A^T * b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21003 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2
$f(t_i)$	-1	4	-3

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

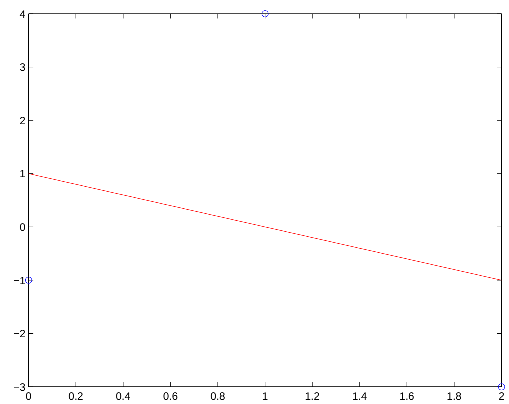
Řešení 21003 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 4.0 \\ -3.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.0 \\ 3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21004 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2
$f(t_i)$	0	2	-2

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

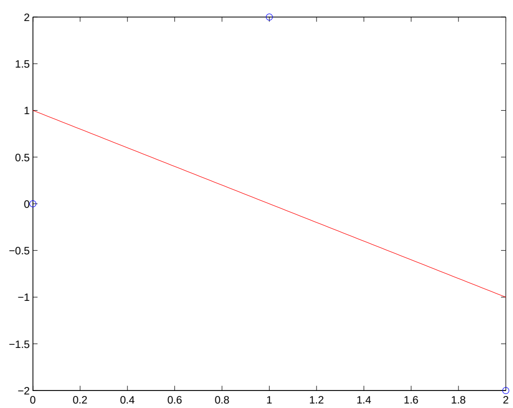
Řešení 21004 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.0 \\ 3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21005 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1
$f(t_i)$	-2	9	-4

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

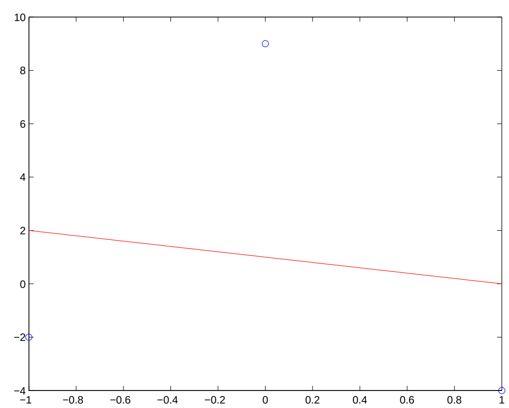
Řešení 21005 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2.0 \\ 9.0 \\ -4.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 3.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21006 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1
$f(t_i)$	-1	7	-3

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

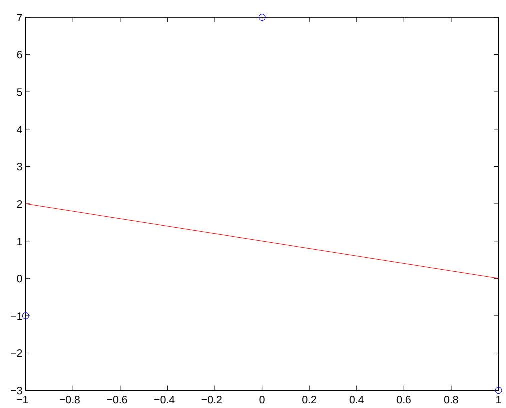
Řešení 21006 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 7.0 \\ -3.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 3.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21007 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1
$f(t_i)$	0	5	-2

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

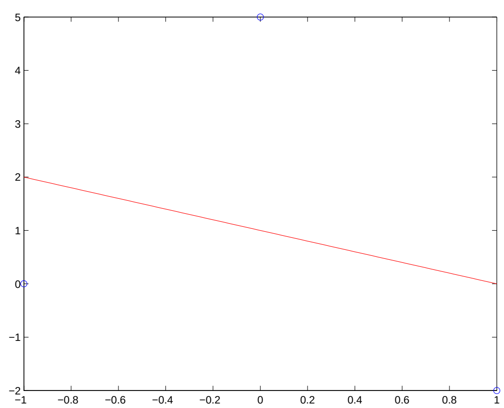
Řešení 21007 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 3.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21008 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1
$f(t_i)$	1	3	-1

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

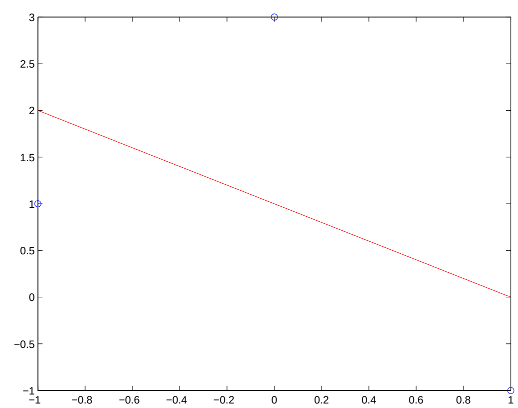
Řešení 21008 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 3.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 3.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21009 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-2	-1	0
$f(t_i)$	-1	10	-3

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

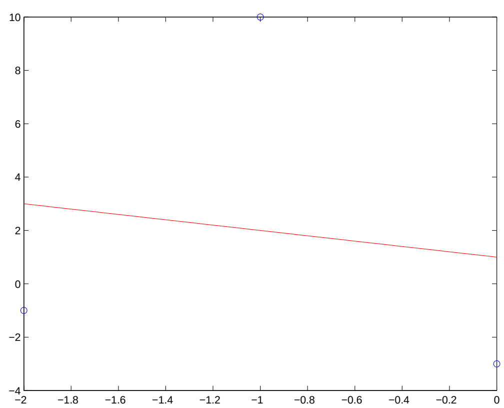
Řešení 21009 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -2.0 \\ 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 10.0 \\ -3.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & -3.0 \\ -3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 6.0 \\ -8.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21010 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-2	-1	0
$f(t_i)$	0	8	-2

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

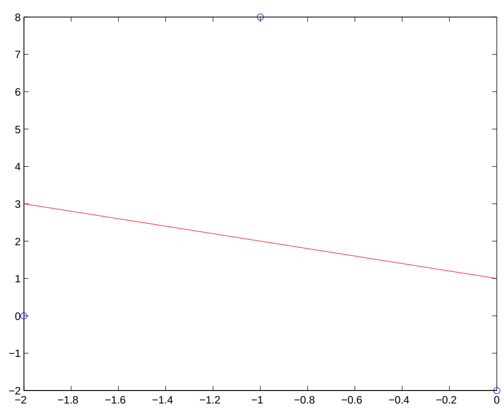
Řešení 21010 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -2.0 \\ 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & -3.0 \\ -3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 6.0 \\ -8.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21011 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-2	-1	0
$f(t_i)$	1	6	-1

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

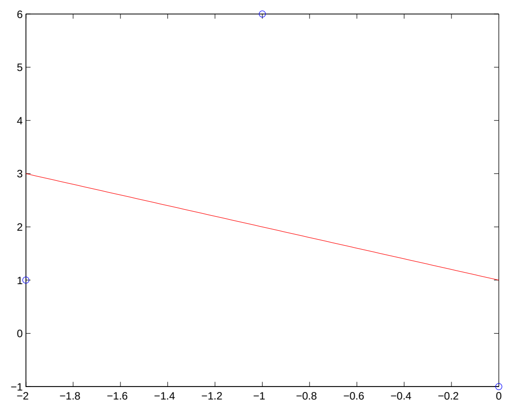
Řešení 21011 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -2.0 \\ 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 6.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & -3.0 \\ -3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 6.0 \\ -8.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21012 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-2	-1	0
$f(t_i)$	2	4	0

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

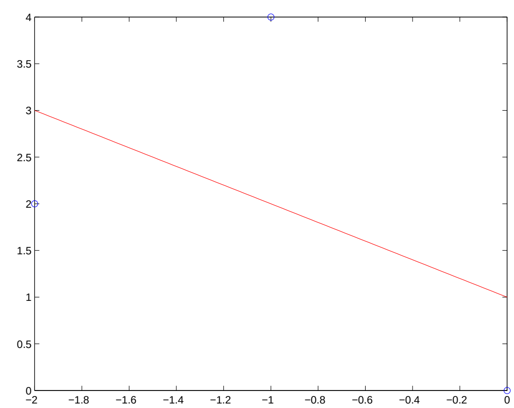
Řešení 21012 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -2.0 \\ 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 4.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & -3.0 \\ -3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 6.0 \\ -8.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1; a_1 = -1;$$



Příklad 21013 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2
$f(t_i)$	-5	8	-3

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

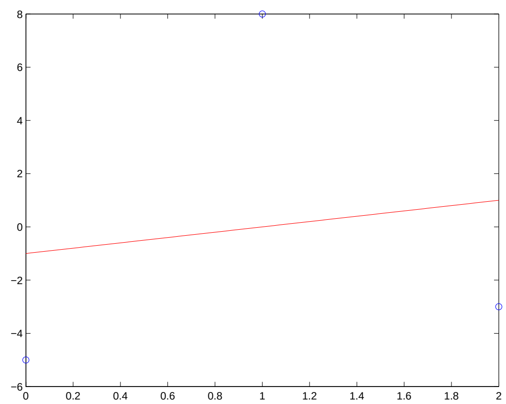
Řešení 21013 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -5.0 \\ 8.0 \\ -3.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.0 \\ 3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 1;$$



Příklad 21014 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2
$f(t_i)$	-4	6	-2

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

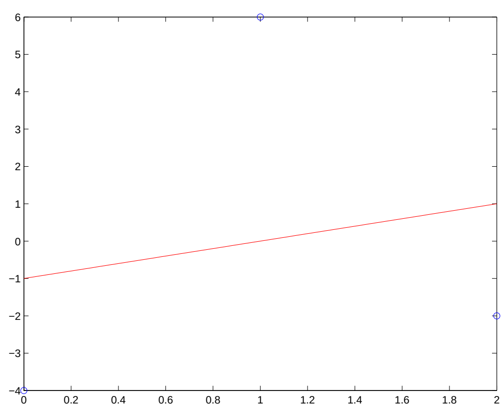
Řešení 21014 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -4.0 \\ 6.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.0 \\ 3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \qquad A^T * b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 1;$$



Příklad 21015 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2
$f(t_i)$	-3	4	-1

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

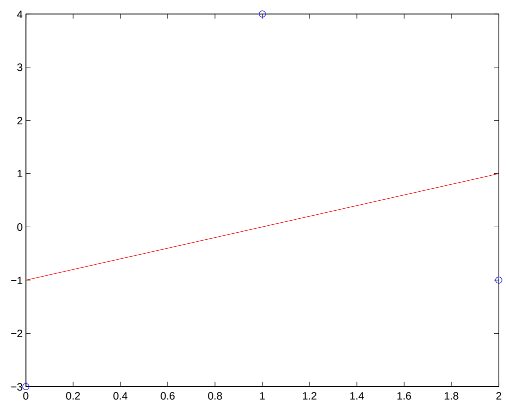
Řešení 21015 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3.0 \\ 4.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.0 \\ 3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 1;$$



Příklad 21016 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	0	1	2
$f(t_i)$	-2	2	0

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

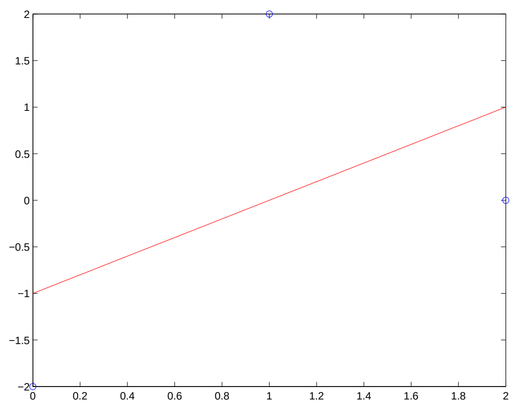
Řešení 21016 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2.0 \\ 2.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.0 \\ 3.0 & 5.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 1;$$



Příklad 21017 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1
$f(t_i)$	-6	7	-4

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

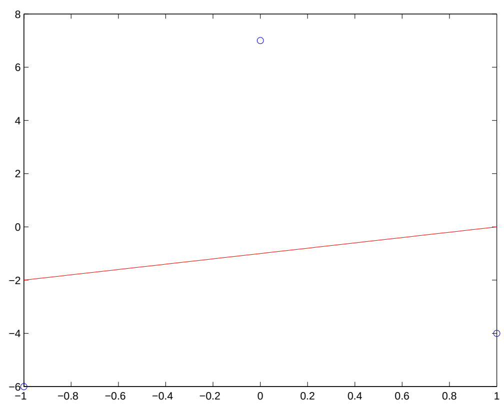
Řešení 21017 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -6.0 \\ 7.0 \\ -4.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} -3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 1;$$



Příklad 21018 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1
$f(t_i)$	-5	5	-3

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

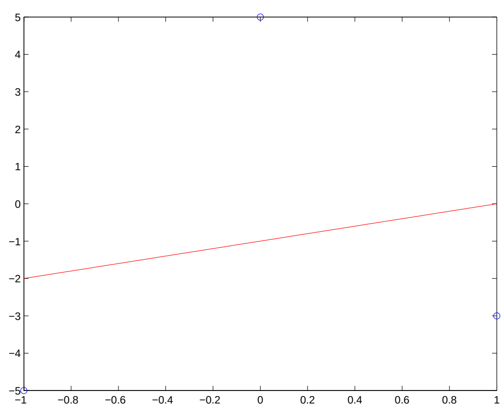
Řešení 21018 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -5.0 \\ 5.0 \\ -3.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} -3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 1;$$



Příklad 21019 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1
$f(t_i)$	-4	3	-2

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

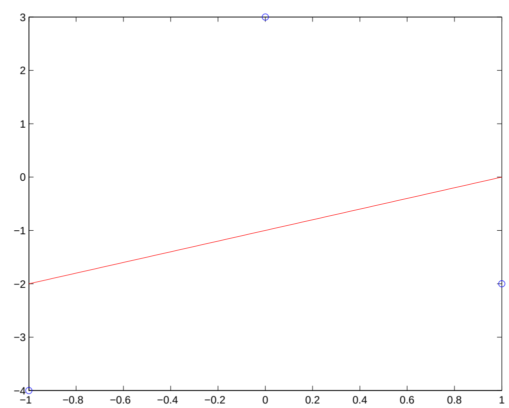
Řešení 21019 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -4.0 \\ 3.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} -3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 1;$$



Příklad 21020 Určete aproximační polynom pro funkci $f = f(t)$, která je zadána tabulkou hodnot

t_i	-1	0	1
$f(t_i)$	-3	1	-1

Určete aproximační polynom metodou nejmenších čtverců, který bude nejvýše 1. stupně.

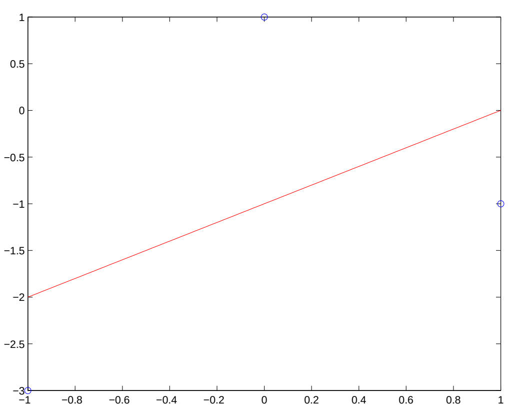
Řešení 21020 Diskrétní L2 aproximace polynomem 1. stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t^1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3.0 \\ 1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{bmatrix} 3.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad A^T * b = \begin{bmatrix} -3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -1; a_1 = 1;$$



Příklad 22001 Určete diskrétní L^2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 + c_1 t^2$;

t_i	1	3	5
$f(t_i)$	2	4	7

.

Řešení 22001 Není vypočítáno.

Příklad 22002 Určete diskrétní L^2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\gamma(t) = b_0 t + b_1 t^2$;

t_i	1	3	5
$f(t_i)$	2	4	5

.

Řešení 22002 Není vypočítáno.

Příklad 22003 Určete spojitou L^2-aproximaci funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ pomocí funkce $\varrho(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$;

Řešení 22003 Není vypočítáno.

Příklad 22004 Určete diskrétní L^2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\vartheta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$;

t_i	-2	-1	0	1
$f(t_i)$	-1	-1	0	1

.

Řešení 22004 Není vypočítáno.

Příklad 23001 Určete diskrétní L_2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 + c_1 t^3$;

t_i	-2	-1	0	1
$f(t_i)$	2	1	0	1

Načrtněte obrázek se zadanými hodnotami a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

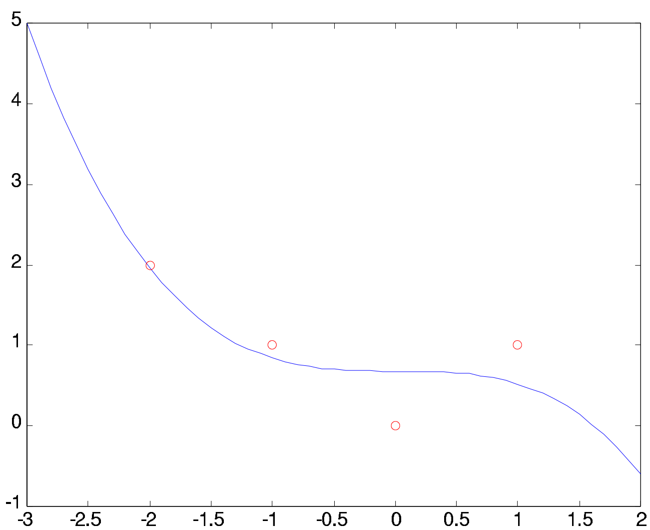
Řešení 23001

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 66 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = 17/25,\ c_1 = -4/25 \quad (c_0 = 0.68,\ c_1 = -0.16)$$



Příklad 23002 Určete diskrétní L_2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 + c_1 t^2$;

t_i	-2	-1	0	1
$f(t_i)$	2	1	0	1

Načrtněte obrázek se zadanými hodnotami a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

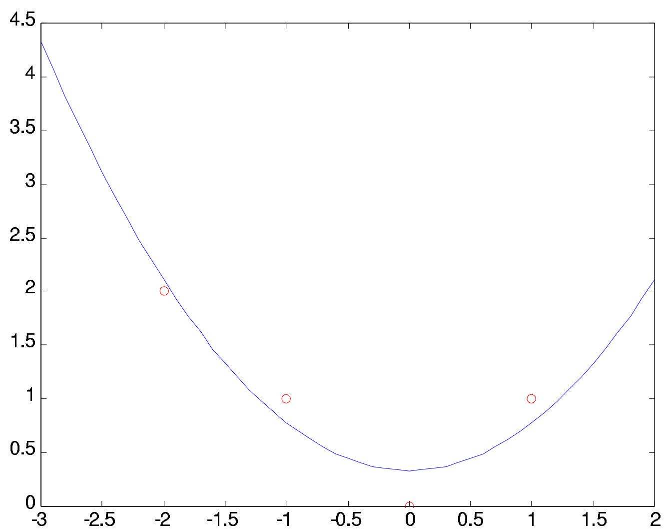
Řešení 23002

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = 1/3,\ c_1 = 4/9 \quad (c_0 = 0.3333,\ c_1 = 0.4444)$$



Příklad 23003 Určete diskrétní L_2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 t + c_1 t^2$;

t_i	-2	-1	0	1
$f(t_i)$	2	1	0	1

Načrtněte obrázek se zadanými hodnotami a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

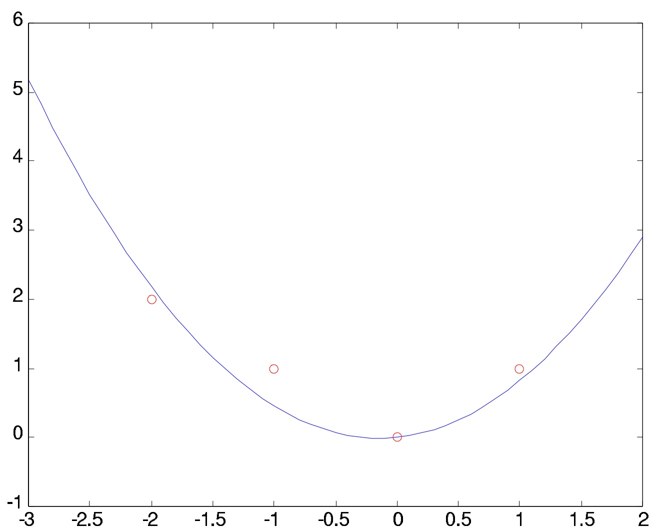
Řešení 23003

$$\varphi(t) = c_0 t + c_1 t^2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = 2/11,\ c_1 = 7/11 \quad (c_0 = 0.1818,\ c_1 = 0.6364)$$



Příklad 23004 Určete diskrétní L_2-aproximaci funkce $f = f(t)$ zadané tabulkou hodnot pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 t + c_1 t^3$;

t_i	-2	-1	0	1
$f(t_i)$	2	1	0	1

Načrtněte obrázek se zadanými hodnotami a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

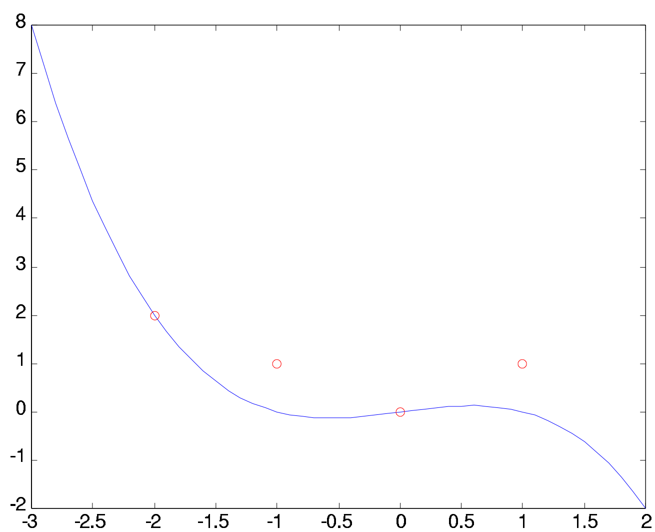
Řešení 23004

$$\varphi(t) = c_0 t + c_1 t^3$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 66 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = 1/3,\ c_1 = -1/3 \quad (c_0 = 0.3333,\ c_1 = -0.3333)$$



Příklad 30001 Určete spojitou L_2-aproximaci funkce f zadané předpisem $f(t) = \frac{1}{t+1}$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 + c_1 t$.

Načrtněte obrázek se zadanou funkcí $f(t)$ a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

Řešení 30001

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t$$

$$\text{Minimalizujeme } R = \int_0^1 (f(t) - \varphi(t))^2\, dt = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{t+1} - c_0 - c_1 t\right)^2 dt$$

Podmínky minima:

$$0 = \frac{\partial R}{\partial c_0} = -2\int_0^1 \left(\tfrac{1}{t+1} - c_0 - c_1 t\right) dt$$

$$0 = \frac{\partial R}{\partial c_1} = -2\int_0^1 \left(\tfrac{1}{t+1} - c_0 - c_1 t\right) t\, dt$$

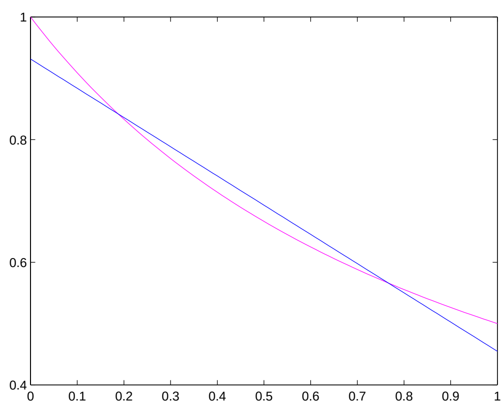
$$\left[\ln|t+1| - c_0 t - c_1 \tfrac{t^2}{2}\right]_0^1 = 0$$

$$\left[t - \ln|t+1| - c_0 \tfrac{t^2}{2} - c_1 \tfrac{t^3}{3}\right]_0^1 = 0$$

$$c_0 + \tfrac{1}{2} c_1 = \ln 2$$

$$\tfrac{1}{2} c_0 + \tfrac{1}{3} c_1 = 1 - \ln 2$$

$$c_0 = 0.93147,\ c_1 = -0.47665$$



Příklad 30002 Určete spojitou L_2-aproximaci funkce f zadané předpisem $f(t) = \frac{1}{t+1}$ na intervalu $\langle -3, -2\rangle$ pomocí funkce $\varphi(t) = c_0 + c_1 t$.

Načrtněte obrázek se zadanou funkcí $f(t)$ a výslednou aproximací $\varphi(t)$.

Řešení 30002

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t$$

$$\text{Minimalizujeme } R = \int\limits_{-3}^{-2} (f(t) - \varphi(t))^2\, dt = \int\limits_{-3}^{-2} (\tfrac{1}{t+1} - c_0 - c_1 t)^2\, dt$$

Podmínky minima:

$$0 = \frac{\partial R}{\partial c_0} = -2 \int\limits_{-3}^{-2} (\tfrac{1}{t+1} - c_0 - c_1 t)\, dt$$

$$0 = \frac{\partial R}{\partial c_1} = -2 \int\limits_{-3}^{-2} (\tfrac{1}{t+1} - c_0 - c_1 t) t\, dt$$

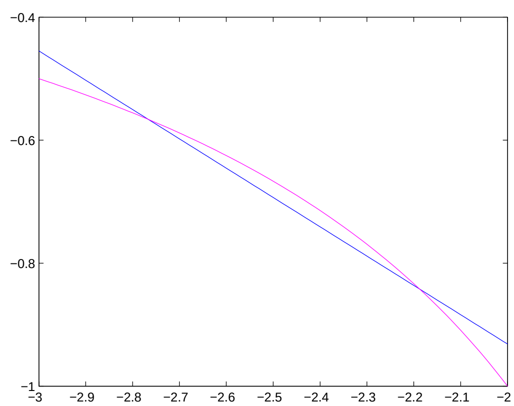
$$\left[\ln|t+1| - c_0 t - c_1 \frac{t^2}{2}\right]_{-3}^{-2} = 0$$

$$\left[t - \ln|t+1| - c_0 \frac{t^2}{2} - c_1 \frac{t^3}{3}\right]_{-3}^{-2} = 0$$

$$-c_0 + \tfrac{5}{2} c_1 = \ln 2$$

$$\tfrac{5}{2} c_0 - \tfrac{19}{3} c_1 = -1 - \ln 2$$

$$c_0 = -1.88477,\ c_1 = -0.47665$$



Příklad 30003 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ a $\varphi_3(t) = t^2$.

Řešení 30003

$$\varphi_1(t) = 1,\ \varphi_2(t) = t \text{ a } \varphi_3(t) = t^2 \quad \text{na intervalu } \langle 0, 2\rangle$$

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t) = 1$$

$$\psi_2(t) = \varphi_2(t) + \kappa_{21}\psi_1(t) \qquad \text{skalárně násobíme } \psi_1(t)$$

$$\underbrace{(\psi_2(t), \psi_1(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_2(t), \psi_1(t))}_{I_{21}} + \kappa_{21} \underbrace{(\psi_1(t), \psi_1(t))}_{I_{11}}$$

$$I_{21} = \int_0^2 t \cdot 1\, dt = \left[\tfrac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

$$I_{11} = \int_0^2 1 \cdot 1\, dt = [t]_0^2 = 2$$

$$\kappa_{21} = -\tfrac{I_{21}}{I_{11}} = -\tfrac{2}{2} = -1$$

$$\psi_2(t) = t - 1$$

$$\psi_3(t) = \varphi_3(t) + \kappa_{31}\psi_1(t) + \kappa_{32}\psi_2(t) \qquad \text{skalárně násobíme } \psi_1(t) \text{ a následně } \psi_2(t)$$

$$\underbrace{(\psi_3(t), \psi_1(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_3(t), \psi_1(t))}_{I_{31}} + \kappa_{31} \underbrace{(\psi_1(t), \psi_1(t))}_{I_{11}} + \kappa_{32} \underbrace{(\psi_2(t), \psi_1(t))}_{=0}$$

$$\underbrace{(\psi_3(t), \psi_2(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_3(t), \psi_2(t))}_{I_{32}} + \kappa_{31} \underbrace{(\psi_1(t), \psi_2(t))}_{=0} + \kappa_{32} \underbrace{(\psi_2(t), \psi_2(t))}_{I_{22}}$$

$$I_{31} = \int_0^2 t^2 \cdot 1\, dt = \left[\tfrac{t^3}{3}\right]_0^2 = \tfrac{8}{3}$$

$$I_{32} = \int_0^2 t^2 \cdot (t-1)\, dt = \left[\tfrac{t^4}{4} - \tfrac{t^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}$$

$$I_{22} = \int_0^2 (t-1)^2\, dt = \left[\tfrac{(t-1)^3}{3}\right]_0^2 = \tfrac{2}{3}$$

$$\kappa_{31} = -\tfrac{I_{31}}{I_{11}} = -\tfrac{4}{3}$$

$$\kappa_{32} = -\tfrac{I_{32}}{I_{22}} = -\tfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = -2$$

$$\psi_3(t) = t^2 - \tfrac{4}{3} - 2(t-1) = t^2 - 2t + \tfrac{2}{3}$$

Příklad 30004 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ a $\varphi_3(t) = t^2$.

Řešení 30004

$$\varphi_1(t) = 1,\ \varphi_2(t) = t \text{ a } \varphi_3(t) = t^2 \quad \text{na intervalu } \langle -1, 1\rangle$$

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t) = 1$$

$$\psi_2(t) = \varphi_2(t) + \kappa_{21}\psi_1(t) \qquad \text{skalárně násobíme } \psi_1(t)$$

$$\underbrace{(\psi_2(t), \psi_1(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_2(t), \psi_1(t))}_{I_{21}} + \kappa_{21} \underbrace{(\psi_1(t), \psi_1(t))}_{I_{11}}$$

$$I_{21} = \int\limits_{-1}^{1} t \cdot 1\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$I_{11} = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt = [t]_{-1}^{1} = 2$$

$$\kappa_{21} = -\frac{I_{21}}{I_{11}} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$\psi_2(t) = t$$

$$\psi_3(t) = \varphi_3(t) + \kappa_{31}\psi_1(t) + \kappa_{32}\psi_2(t) \qquad \text{skalárně násobíme } \psi_1(t) \text{ a následně } \psi_2(t)$$

$$\underbrace{(\psi_3(t), \psi_1(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_3(t), \psi_1(t))}_{I_{31}} + \kappa_{31} \underbrace{(\psi_1(t), \psi_1(t))}_{I_{11}} + \kappa_{32} \underbrace{(\psi_2(t), \psi_1(t))}_{=0}$$

$$\underbrace{(\psi_3(t), \psi_2(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_3(t), \psi_2(t))}_{I_{32}} + \kappa_{31} \underbrace{(\psi_1(t), \psi_2(t))}_{=0} + \kappa_{32} \underbrace{(\psi_2(t), \psi_2(t))}_{I_{22}}$$

$$I_{31} = \int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$I_{32} = \int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot t\, dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$I_{22} = \int\limits_{-1}^{1} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\kappa_{31} = -\frac{I_{31}}{I_{11}} = -\frac{1}{3}$$

$$\kappa_{32} = -\frac{I_{32}}{I_{22}} = 0$$

$$\psi_3(t) = t^2 - \frac{1}{3} + 0t = t^2 - \frac{1}{3}$$

Příklad 31001 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -2, 0\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = (x+2)^2$.

Řešení 31001 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -2, 0\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = (x+2)^2$.
$< f, g >= \int_{-2}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = -1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{2}{2} = 1$
$\psi_2(x) = x + 1$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-8/3}{2} = -4/3; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{4/3}{2/3} = 2$
$\psi_3(x) = x^2 + 2\,x + 2/3$
$\psi_1(x) = -1; \quad \psi_2(x) = x + 1; \quad \psi_3(x) = x^2 + 2\,x + 2/3$

Příklad 31002 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = (1 + x)^2$.

Řešení 31002 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = (1 + x)^2$.
$< f, g >= \int_{-1}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = -1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x)$;
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{1/2}{1} = 1/2$
$\psi_2(x) = x + 1/2$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x)$;
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-1/3}{1} = -1/3; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{1/12}{1/12} = 1$
$\psi_3(x) = 1/6 + x + x^2$
$\psi_1(x) = -1; \quad \psi_2(x) = x + 1/2; \quad \psi_3(x) = 1/6 + x + x^2$

Příklad 31003 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = x^2.$

Řešení 31003 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = x^2.$
$< f, g >= \int_0^2 f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = -1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-2}{2} = -1$
$\psi_2(x) = x - 1$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-8/3}{2} = -4/3; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{4/3}{2/3} = 2$
$\psi_3(x) = x^2 + 2/3 - 2\,x$
$\psi_1(x) = -1; \quad \psi_2(x) = x - 1; \quad \psi_3(x) = x^2 + 2/3 - 2\,x$

Příklad 31004 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0,1\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = x^2.$

Řešení 31004 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0,1\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = x^2.$
$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = -1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-1/2}{1} = -1/2$
$\psi_2(x) = x - 1/2$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-1/3}{1} = -1/3; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{1/12}{1/12} = 1$
$\psi_3(x) = x^2 + 1/6 - x$
$\psi_1(x) = -1; \quad \psi_2(x) = x - 1/2; \quad \psi_3(x) = x^2 + 1/6 - x$

Příklad 31005 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = (x+2)^2.$

Řešení 31005 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = (x+2)^2.$
$< f, g >= \int_{-2}^{2} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = 1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{0}{4} = 0$
$\psi_2(x) = x$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{\frac{64}{3}}{4} = 16/3; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{\frac{64}{3}}{16/3} = 4$
$\psi_3(x) = x^2 - 4/3$
$\psi_1(x) = 1; \quad \psi_2(x) = x; \quad \psi_3(x) = x^2 - 4/3$

Příklad 31006 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = (1 + x)^2$.

Řešení 31006 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = (1 + x)^2$.
$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = 1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{0}{2} = 0$
$\psi_2(x) = x$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{8/3}{2} = 4/3; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{4/3}{2/3} = 2$
$\psi_3(x) = x^2 - 1/3$
$\psi_1(x) = 1; \quad \psi_2(x) = x; \quad \psi_3(x) = x^2 - 1/3$

Příklad 31007 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -2, 0\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x + 2, \quad \varphi_3(x) = (x + 4)^2$.

Řešení 31007 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -2, 0\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x + 2, \quad \varphi_3(x) = (x + 4)^2$.
$< f, g >= \int_{-2}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = -1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-2}{2} = -1$
$\psi_2(x) = x + 1$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-\frac{56}{3}}{2} = -\frac{28}{3}; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{4}{2/3} = 6$
$\psi_3(x) = x^2 + 2\,x + 2/3$
$\psi_1(x) = -1; \quad \psi_2(x) = x + 1; \quad \psi_3(x) = x^2 + 2\,x + 2/3$

Příklad 31008 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = 1 + x, \quad \varphi_3(x) = (2 + x)^2$.

Řešení 31008 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = 1 + x, \quad \varphi_3(x) = (2 + x)^2$.
$< f, g >= \int_{-1}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = -1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-1/2}{1} = -1/2$
$\psi_2(x) = x + 1/2$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-7/3}{1} = -7/3; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{1/4}{1/12} = 3$
$\psi_3(x) = 1/6 + x + x^2$
$\psi_1(x) = -1; \quad \psi_2(x) = x + 1/2; \quad \psi_3(x) = 1/6 + x + x^2$

Příklad 31009 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x - 2, \quad \varphi_3(x) = (x-2)^2.$

Řešení 31009 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x - 2, \quad \varphi_3(x) = (x-2)^2.$
$< f, g >= \int_0^2 f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = -1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{2}{2} = 1$
$\psi_2(x) = x - 1$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-8/3}{2} = -4/3; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{-4/3}{2/3} = -2$
$\psi_3(x) = x^2 + 2/3 - 2\,x$
$\psi_1(x) = -1; \quad \psi_2(x) = x - 1; \quad \psi_3(x) = x^2 + 2/3 - 2\,x$

Příklad 31010 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x - 1, \quad \varphi_3(x) = (x-1)^2.$

Řešení 31010 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(x) = -1, \quad \varphi_2(x) = x - 1, \quad \varphi_3(x) = (x-1)^2.$
$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$

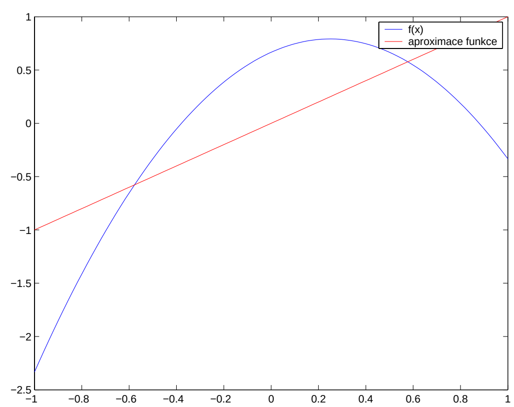
$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = -1$
$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - c_1\psi_1(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_2,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{1/2}{1} = 1/2$
$\psi_2(x) = x - 1/2$
$\psi_3(x) = \varphi_3(x) - c_1\psi_1(x) - c_2\psi_2(x);$
$c_1 = \frac{<\varphi_3,\psi_1>}{<\psi_1,\psi_1>} = \frac{-1/3}{1} = -1/3; \quad c_2 = \frac{<\varphi_3,\psi_2>}{<\psi_2,\psi_2>} = \frac{-1/12}{1/12} = -1$
$\psi_3(x) = x^2 + 1/6 - x$
$\psi_1(x) = -1; \quad \psi_2(x) = x - 1/2; \quad \psi_3(x) = x^2 + 1/6 - x$

Příklad 31011 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = -2x^2 + x + 2/3$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí $\varphi_0(x) = 1$ a $\varphi_1(x) = x$. Načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31011 L_2-aproximace funkce $f(x) = x - 2\,x^2 + 2/3$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce
$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - \varphi(x)\right)^2 \mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2\left(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)\right)\varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2\left(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)\right)\varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, \varphi_0 > & < \varphi_0, \varphi_1 > \\ < \varphi_1, \varphi_0 > & < \varphi_1, \varphi_1 > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor pravých stran:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, f > \\ < \varphi_1, f > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = x$.

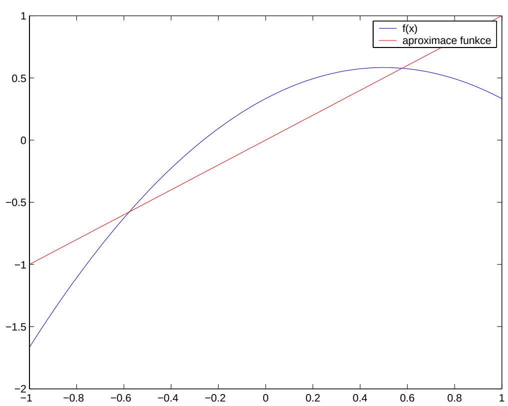


Příklad 31012 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = x - x^2 + 1/3$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí
$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
A načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31012 L_2-aproximace funkce $f(x) = x - x^2 + 1/3$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce $\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2 \, \mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial\Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial\Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial\Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2\left(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)\right)\varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial\Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2\left(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)\right)\varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, \varphi_0 > & < \varphi_0, \varphi_1 > \\ < \varphi_1, \varphi_0 > & < \varphi_1, \varphi_1 > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor pravých stran:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, f > \\ < \varphi_1, f > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = x$.

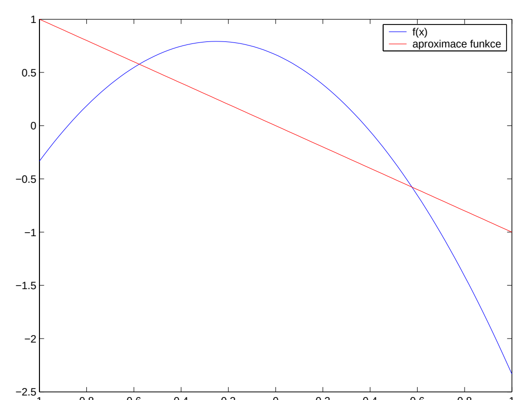


Příklad 31013 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = -x - 2\,x^2 + 2/3$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí
$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
A načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31013 L_2-aproximace funkce $f(x) = -x - 2\,x^2 + 2/3$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce
$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2 \,\mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2\,(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x))\,\varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2\,(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x))\,\varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$\begin{bmatrix} < \varphi_0, \varphi_0 > & < \varphi_0, \varphi_1 > \\ < \varphi_1, \varphi_0 > & < \varphi_1, \varphi_1 > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$
Vektor pravých stran:
$\begin{bmatrix} < \varphi_0, f > \\ < \varphi_1, f > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2/3 \end{bmatrix}$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = -x$.

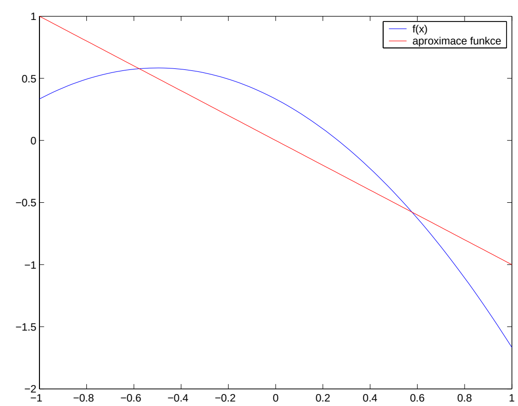


Příklad 31014 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = -x - x^2 + 1/3$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí
$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
A načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31014 L_2-aproximace funkce $f(x) = -x - x^2 + 1/3$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce
$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2 \,\mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2\left(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)\right)\varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2\left(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)\right)\varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, \varphi_0 > & < \varphi_0, \varphi_1 > \\ < \varphi_1, \varphi_0 > & < \varphi_1, \varphi_1 > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor pravých stran:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, f > \\ < \varphi_1, f > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = -x$.

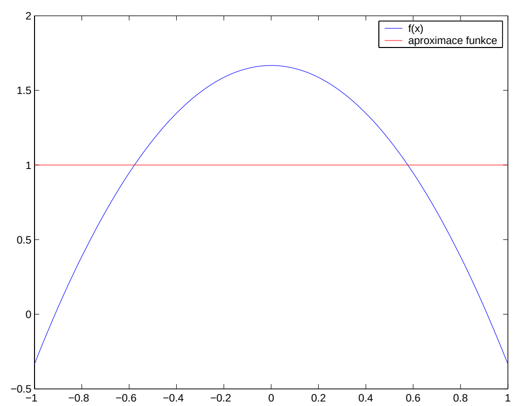


Příklad 31015 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = 5/3 - 2\,x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí
$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
A načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31015 L_2-aproximace funkce $f(x) = 5/3 - 2\,x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce $\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2\,\mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial\Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial\Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial\Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2\,(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x))\,\varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial\Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2\,(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x))\,\varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$$\left[\begin{array}{cc} < \varphi_0, \varphi_0 > & < \varphi_0, \varphi_1 > \\ < \varphi_1, \varphi_0 > & < \varphi_1, \varphi_1 > \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{array}\right]$$
Vektor pravých stran:
$$\left[\begin{array}{c} < \varphi_0, f > \\ < \varphi_1, f > \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right]$$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = 1$.

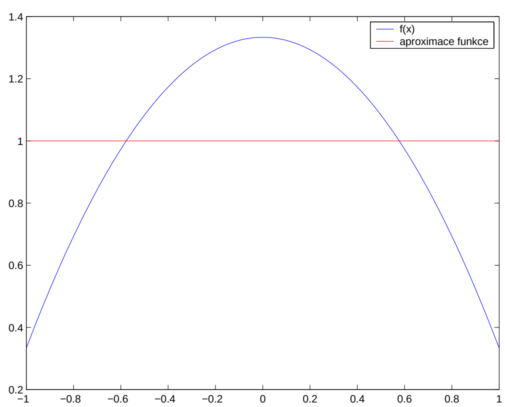


Příklad 31016 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = 4/3 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí $\varphi_0(x) = 1$ a $\varphi_1(x) = x$. Načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31016 L_2-aproximace funkce $f(x) = 4/3 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce $\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - \varphi(x)\right)^2 \mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2\left(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)\right)\varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2\left(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)\right)\varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, \varphi_0 > & < \varphi_0, \varphi_1 > \\ < \varphi_1, \varphi_0 > & < \varphi_1, \varphi_1 > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor pravých stran:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, f > \\ < \varphi_1, f > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = 1$.

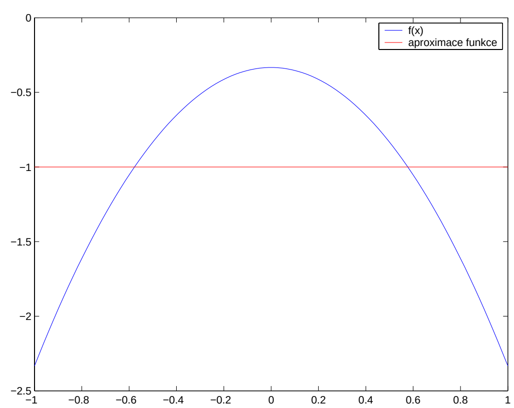


Příklad 31017 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = -1/3 - 2\,x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí
$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
A načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31017 L_2-aproximace funkce $f(x) = -1/3 - 2\,x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce $\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2 \,\mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial\Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial\Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial\Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2\,(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x))\,\varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial\Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2\,(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x))\,\varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, \varphi_0 > & < \varphi_0, \varphi_1 > \\ < \varphi_1, \varphi_0 > & < \varphi_1, \varphi_1 > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor pravých stran:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, f > \\ < \varphi_1, f > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = -1$.

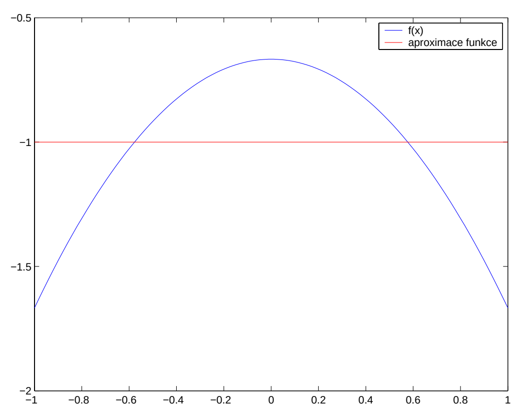


Příklad 31018 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = -2/3 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí
$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
A načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31018 L_2-aproximace funkce $f(x) = -2/3 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce $\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2 \, \mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2 (f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)) \varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2 (f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)) \varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$\begin{bmatrix} < \varphi_0, \varphi_0 > & < \varphi_0, \varphi_1 > \\ < \varphi_1, \varphi_0 > & < \varphi_1, \varphi_1 > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$
Vektor pravých stran:
$\begin{bmatrix} < \varphi_0, f > \\ < \varphi_1, f > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = -1$.

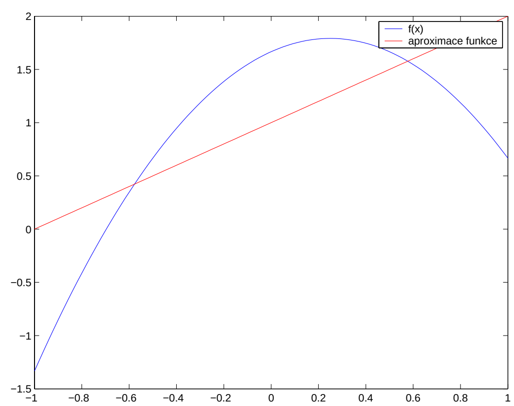


Příklad 31019 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = 5/3 + x - 2\,x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí
$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
A načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31019 L_2-aproximace funkce $f(x) = 5/3 + x - 2\,x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce
$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2\,\mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial\Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial\Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial\Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2\,(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x))\,\varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial\Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2\,(f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x))\,\varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, \varphi_0 > & < \varphi_0, \varphi_1 > \\ < \varphi_1, \varphi_0 > & < \varphi_1, \varphi_1 > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor pravých stran:
$$\begin{bmatrix} < \varphi_0, f > \\ < \varphi_1, f > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = 1 + x$.

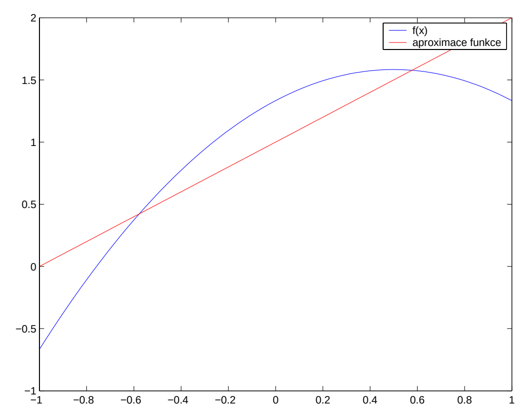


Příklad 31020 Vyjádřete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = 4/3 + x - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí bázových funkcí
$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
A načrtněte obrázek funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$.

Řešení 31020 L_2-aproximace funkce $f(x) = 4/3+x-x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí funkce $\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$
Kde $\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_1(x) = x;$
Budeme minimalizovat funkcionál $R(f, \varphi) = \Phi(c_0, c_1) = \int_{-1}^{1} (f(x) - \varphi(x))^2 \,\mathrm{d}x$
Zavedeme si skalární součin $< v, w >= \int_{-1}^{1} v(x)w(x)\mathrm{d}x$, pak $\Phi(c_0, c_1) =< f - \varphi, f - \varphi >$
Nutná a postačují podmínka minima funkcionálu Φ je $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$,protože funkcionál Φ je ryze konvexní. Podmínky $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$ jsou podmínkami ortogonality — Chceme, aby $f - \varphi$ bylo kolmé na bázové funkce.

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = \int_{-1}^{1} -2 (f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)) \varphi_0(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_0 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_0$

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1} -2 (f(x) - c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)) \varphi_1(x)\mathrm{d}x =< f - \varphi, \varphi_1 >= 0$ tj. $(f - \varphi) \perp \varphi_1$
Výsledná soustava rovnic má tvar:
$\begin{bmatrix} <\varphi_0, \varphi_0> & <\varphi_0, \varphi_1> \\ <\varphi_1, \varphi_0> & <\varphi_1, \varphi_1> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$
Vektor pravých stran:
$\begin{bmatrix} <\varphi_0, f> \\ <\varphi_1, f> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$
Vektor neznámých:
$[c_0, c_1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$
Výsledná funkce $\varphi(x) = 1 + x$.



Příklad 32001 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ a $\varphi_3(t) = t^2$.

Řešení 32001 Není vypočítáno.

Příklad 32002 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$ pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ a $\varphi_3(t) = t^2$.

Řešení 32002 Není vypočítáno.

Příklad 32003 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -2, 0\rangle$ pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ a $\varphi_3(t) = t^2$.

Řešení 32003 Není vypočítáno.

Příklad 32004 Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 2 na intervalu $\langle -3, 0\rangle$ pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jako výchozí bázi volte funkce $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ a $\varphi_3(t) = t^2$.

Řešení 32004 Není vypočítáno.

Příklad 33001 Jsou dány funkce $\varphi_1(t) = 1$ a $\varphi_2(t) = t$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Pomocí Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte funkce $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$, které jsou na tomto intervalu navzájem ortogonální. Určete spojitou L_2-aproximaci funkce f zadané na stejném intervalu předpisem $f(t) = t^2$ pomocí funkce $\psi(t) = c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t)$.
Načtrtněte obrázek se zadanou funkcí $f(t)$ a výslednou aproximací $\psi(t)$.

Řešení 33001

$$\varphi_1(t) = 1,\ \varphi_2(t) = t \text{ na intervalu } \langle -1, 1\rangle$$

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t) = 1$$

$$\psi_2(t) = \varphi_2(t) + \kappa\psi_1(t) \qquad \text{skalárně násobíme } \psi_1(t)$$

$$\underbrace{(\psi_2(t), \psi_1(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_2(t), \psi_1(t))}_{I_{21}} + \kappa \underbrace{(\psi_1(t), \psi_1(t))}_{I_{11}}$$

$$I_{21} = \int_{-1}^{1} t \cdot 1\, dt = \left[\tfrac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$I_{11} = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt = [t]_{-1}^{1} = 2$$

$$\kappa = -\tfrac{I_{21}}{I_{11}} = -\tfrac{0}{2} = 0$$

$$\psi_2(t) = t$$

$$I_{22} = (\psi_2(t), \psi_2(t)) = \int_{-1}^{1} t \cdot t\, dt = \left[\tfrac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2/3$$

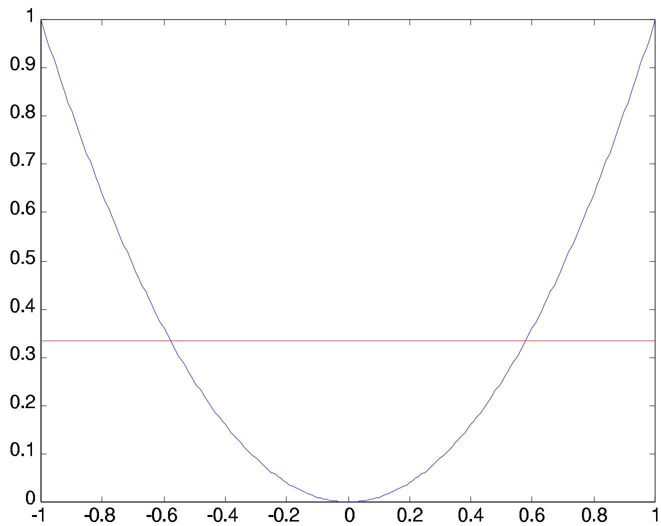
$$I_{1f} = (\psi_1(t), f(t)) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot t^2\, dt = \left[\tfrac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2/3$$

$$I_{2f} = (\psi_2(t), f(t)) = \int_{-1}^{1} t \cdot t^2\, dt = \left[\tfrac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1f} \\ I_{2f} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 1/3,\ c_2 = 0 \quad (c_1 = 0.3333,\ c_2 = 0)$$



Příklad 33002 Jsou dány funkce $\varphi_1(t) = 1$ a $\varphi_2(t) = t$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Pomocí Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte funkce $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$, které jsou na tomto intervalu navzájem ortogonální. Určete spojitou L_2-aproximaci funkce f zadané na stejném intervalu předpisem $f(t) = t^2$ pomocí funkce $\psi(t) = c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t)$.
Načtrtněte obrázek se zadanou funkcí $f(t)$ a výslednou aproximací $\psi(t)$.

Řešení 33002

$$\varphi_1(t) = 1 \text{ a } \varphi_2(t) = t \text{ na intervalu } \langle 0, 2\rangle$$

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t) = 1$$

$$\psi_2(t) = \varphi_2(t) + \kappa\psi_1(t) \qquad \text{skalárně násobíme } \psi_1(t)$$

$$\underbrace{(\psi_2(t), \psi_1(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_2(t), \psi_1(t))}_{I_{21}} + \kappa \underbrace{(\psi_1(t), \psi_1(t))}_{I_{11}}$$

$$I_{21} = \int_0^2 t \cdot 1 \, dt = \left[\tfrac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

$$I_{11} = \int_0^2 1 \cdot 1 \, dt = [t]_0^2 = 2$$

$$\kappa = -\tfrac{I_{21}}{I_{11}} = -\tfrac{2}{2} = -1$$

$$\psi_2(t) = t - 1$$

$$I_{22} = (\psi_2(t), \psi_2(t)) = \int_0^2 (t-1) \cdot (t-1) \, dt = \left[\tfrac{(t-1)^3}{3}\right]_0^2 = 2/3$$

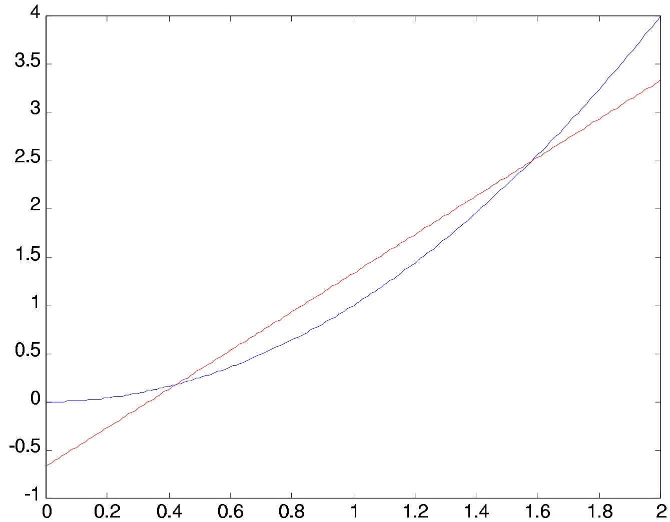
$$I_{1f} = (\psi_1(t), f(t)) = \int_0^2 1 \cdot t^2 \, dt = \left[\tfrac{t^3}{3}\right]_0^2 = 8/3$$

$$I_{2f} = (\psi_2(t), f(t)) = \int_0^2 (t-1) \cdot t^2 \, dt = \left[\tfrac{t^4}{4} - \tfrac{t^3}{3}\right]_0^2 = 4/3$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1f} \\ I_{2f} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 4/3,\ c_2 = 2 \quad (c_1 = 1.3333,\ c_2 = 2)$$



Příklad 33003 Jsou dány funkce $\varphi_1(t) = 1$ a $\varphi_2(t) = 2t$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Pomocí Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte funkce $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$, které jsou na tomto intervalu navzájem ortogonální. Určete spojitou L_2-aproximaci funkce f zadané na stejném intervalu předpisem $f(t) = t^2$ pomocí funkce $\psi(t) = c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t)$.
Načtrtněte obrázek se zadanou funkcí $f(t)$ a výslednou aproximací $\psi(t)$.

Řešení 33003

$$\varphi_1(t) = 1,\ \varphi_2(t) = 2t \text{ na intervalu } \langle -1, 1\rangle$$

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t) = 1$$

$$\psi_2(t) = \varphi_2(t) + \kappa\psi_1(t) \qquad \text{skalárně násobíme } \psi_1(t)$$

$$\underbrace{(\psi_2(t), \psi_1(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_2(t), \psi_1(t))}_{I_{21}} + \kappa \underbrace{(\psi_1(t), \psi_1(t))}_{I_{11}}$$

$$I_{21} = \int_{-1}^{1} 2t \cdot 1\, dt = \left[t^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$I_{11} = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt = [t]_{-1}^{1} = 2$$

$$\kappa = -\tfrac{I_{21}}{I_{11}} = -\tfrac{0}{2} = 0$$

$$\psi_2(t) = 2t$$

$$I_{22} = (\psi_2(t), \psi_2(t)) = \int_{-1}^{1} 2t \cdot 2t\, dt = \left[\tfrac{4t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 8/3$$

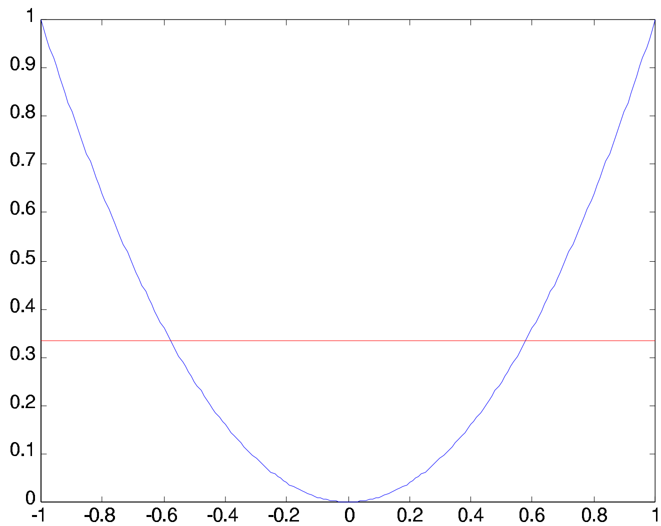
$$I_{1f} = (\psi_1(t), f(t)) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot t^2\, dt = \left[\tfrac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2/3$$

$$I_{2f} = (\psi_2(t), f(t)) = \int_{-1}^{1} 2t \cdot t^2\, dt = \left[\tfrac{t^4}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1f} \\ I_{2f} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 1/3,\ c_2 = 0 \quad (c_1 = 0.3333,\ c_2 = 0)$$



Příklad 33004 Jsou dány funkce $\varphi_1(t) = 1$ a $\varphi_2(t) = 2t$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Pomocí Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte funkce $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$, které jsou na tomto intervalu navzájem ortogonální. Určete spojitou L_2-aproximaci funkce f zadané na stejném intervalu předpisem $f(t) = t^2$ pomocí funkce $\psi(t) = c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t)$.
Načtrtněte obrázek se zadanou funkcí $f(t)$ a výslednou aproximací $\psi(t)$.

Řešení 33004

$$\varphi_1(t) = 1 \text{ a } \varphi_2(t) = 2t \text{ na intervalu } \langle 0, 2\rangle$$

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t) = 1$$

$$\psi_2(t) = \varphi_2(t) + \kappa\psi_1(t) \quad \text{skalárně násobíme } \psi_1(t)$$

$$\underbrace{(\psi_2(t), \psi_1(t))}_{0} = \underbrace{(\varphi_2(t), \psi_1(t))}_{I_{21}} + \kappa \underbrace{(\psi_1(t), \psi_1(t))}_{I_{11}}$$

$$I_{21} = \int_0^2 2t \cdot 1\, dt = \left[t^2\right]_0^2 = 4$$

$$I_{11} = \int_0^2 1 \cdot 1\, dt = [t]_0^2 = 2$$

$$\kappa = -\tfrac{I_{21}}{I_{11}} = -\tfrac{4}{2} = -2$$

$$\psi_2(t) = 2t - 2$$

$$I_{22} = (\psi_2(t), \psi_2(t)) = \int_0^2 2(t-1) \cdot 2(t-1)\, dt = \left[\tfrac{4(t-1)^3}{3}\right]_0^2 = 8/3$$

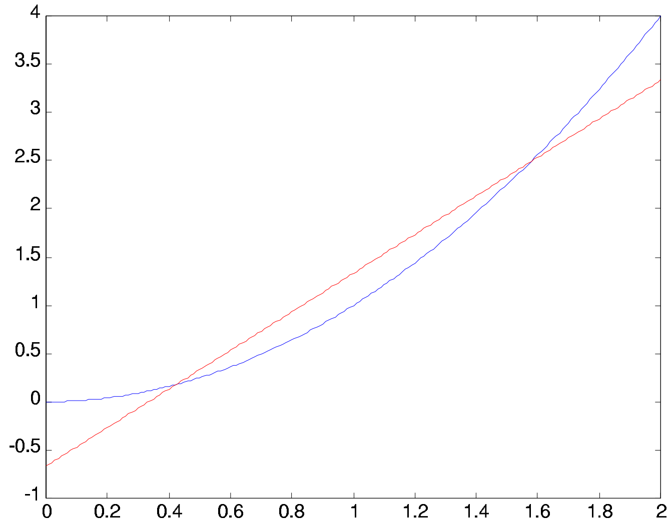
$$I_{1f} = (\psi_1(t), f(t)) = \int_0^2 1 \cdot t^2\, dt = \left[\tfrac{t^3}{3}\right]_0^2 = 8/3$$

$$I_{2f} = (\psi_2(t), f(t)) = \int_0^2 2(t-1) \cdot t^2\, dt = \left[\tfrac{t^4}{2} - \tfrac{2t^3}{3}\right]_0^2 = 8/3$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1f} \\ I_{2f} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 4/3,\ c_2 = 1 \quad (c_1 = 1.3333,\ c_2 = 1)$$



Příklad 40001 Periodická funkce $f = f(t)$ s periodou $T = 2\pi$ je dána předpisem

$$f(t) = \begin{cases} -\pi/2, & t \in \langle -\pi, -\pi/2) \\ t, & t \in \langle -\pi/2, \pi/2) \\ \pi/2, & t \in \langle \pi/2, \pi). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi \rangle$ a napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Řešení 40001

$$T = 2\pi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi/2} -\frac{\pi}{2}\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2}\,dt\right) = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi/2} -\frac{\pi}{2}\cos kt\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\cos kt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos kt\,dt\right) = 0,$$

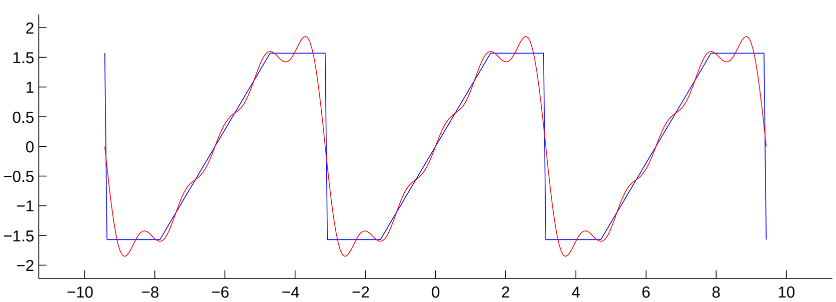
$$b_k = \frac{2}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} -\frac{\pi}{2}\sin kt\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\sin kt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2}\sin kt\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{k}\cos kt\right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \left[-\frac{t}{k}\cos kt\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos kt\,dt + \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{k}\cos kt\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2k}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos k\pi\right) - \frac{1}{2k}\left(\cos\frac{k\pi}{2} + \cos\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k}\sin kt\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{2k}\left(\cos k\pi - \cos\frac{k\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{k}\cos k\pi + \frac{2}{k^2\pi}\sin\frac{k\pi}{2} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{k}, & \text{pro } k = 4l,\ l \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{k} + \frac{2}{k^2\pi} & \text{pro } k = 4l+1,\ l \in \mathbb{N} \\ -\frac{1}{k}, & \text{pro } k = 4l+2,\ l \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{k} - \frac{2}{k^2\pi} & \text{pro } k = 4l+3,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Příklad 40002 Periodická funkce $f = f(t)$ s periodou $T = 2\pi$ je dána předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle -\pi/2, \pi/2) \\ \pi - t, & t \in \langle \pi/2, 3\pi/2). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f na intervalu $\langle -5\pi/2, 7\pi/2\rangle$ a napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Řešení 40002

$$T = 2\pi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\,dt = \text{ (viz obr.) } = 0$$

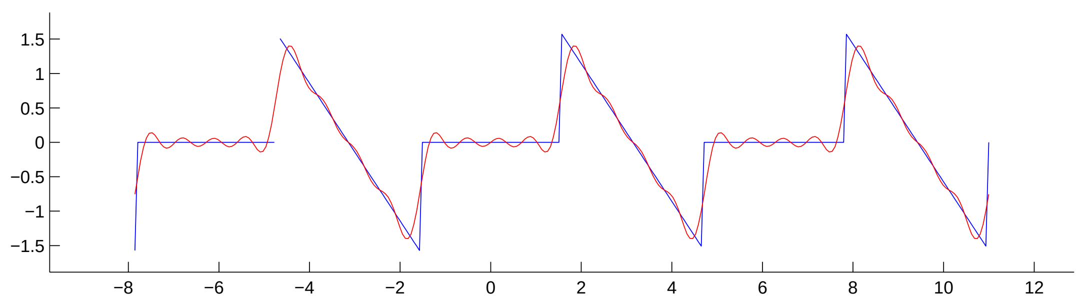
$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\cos kt\,dt = \text{ } (f(t) \text{ je lichá funkce}) = 0$$

$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\sin kt\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\pi[-\frac{1}{k}\cos kt]_{\pi/2}^{3\pi/2} - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} t\sin kt\,dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{k}(\cos\frac{3\pi k}{2} - \cos\frac{\pi k}{2}) + \frac{1}{\pi}[\frac{t}{k}\cos kt]_{\pi/2}^{3\pi/2} - \frac{1}{\pi k^2}(\sin\frac{3\pi k}{2} - \sin\frac{\pi k}{2})$$

$$= \frac{1}{2k}(\cos\frac{3\pi k}{2} + \cos\frac{\pi k}{2}) - \frac{1}{\pi k^2}(\sin\frac{3\pi k}{2} - \sin\frac{\pi k}{2}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{pro } k = 4l,\ l \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{\pi k^2} & \text{pro } k = 4l+1,\ l \in \mathbb{N} \\ -\frac{1}{k}, & \text{pro } k = 4l+2,\ l \in \mathbb{N} \\ -\frac{2}{\pi k^2} & \text{pro } k = 4l+3,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Příklad 40003 Periodická funkce $f = f(t)$ s periodou $T = 2\pi$ je dána předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle -\pi, 0) \\ t, & t \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi \rangle$ a napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Řešení 40003

$$T = 2\pi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$$

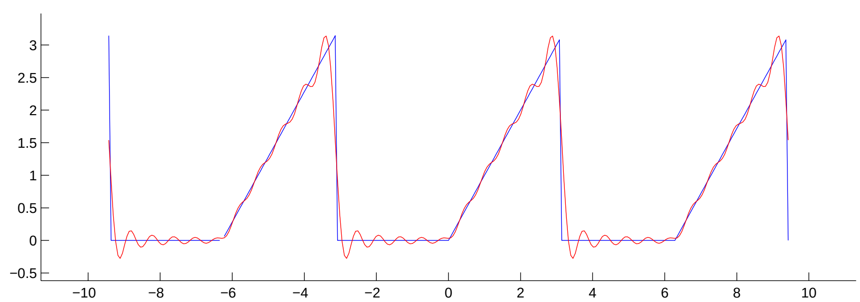
$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi t\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi t \cos kt\, dt = \frac{1}{\pi} \underbrace{[\frac{t}{k} \sin kt]_0^\pi}_{=0} + \frac{1}{\pi k^2} [\cos kt]_0^\pi =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi k^2}(1-1) = 0, & \text{pro } k = 2l,\ l \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{\pi k^2}(-1-1) = -\frac{2}{\pi k^2} & \text{pro } k = 2l+1,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi t \sin kt\, dt = \frac{1}{\pi} [-\frac{t}{k} \cos kt]_0^\pi + \frac{1}{\pi k^2} \underbrace{[\sin kt]_0^\pi}_{=0} =$$

$$= -\frac{1}{k} \cos k\pi = \begin{cases} -\frac{1}{k}, & \text{pro } k = 2l,\ l \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{k}, & \text{pro } k = 2l+1,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Příklad 40004 Periodická funkce $f = f(t)$ s periodou $T = 2$ je dána předpisem

$$f(t) = \begin{cases} -2t, & t \in \langle -1, 0) \\ t, & t \in \langle 0, 1). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f na intervalu $\langle -3, 3\rangle$ a napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Řešení 40004

$$T = 2, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\left(\int_{-1}^{0} -2t\,dt + \int_0^1 t\,dt\right) = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \int_{-1}^{0} -2t\cos k\pi t\,dt + \int_0^1 t\cos k\pi t\,dt =$$

$$\left(\int t\cos k\pi t\,dt = \begin{vmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = \cos k\pi t & v = \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t \end{vmatrix} = \frac{t}{k\pi}\sin k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi t\right)$$

$$= -2\left[\frac{t}{k\pi}\sin k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi t\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t}{k\pi}\sin k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi t\right]_0^1 =$$

$$= -2\left(\frac{1}{(k\pi)^2} - \frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi\right) + \left(\frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi - \frac{1}{(k\pi)^2}\right) = \frac{1}{(k\pi)^2}(\cos k\pi - 1) =$$

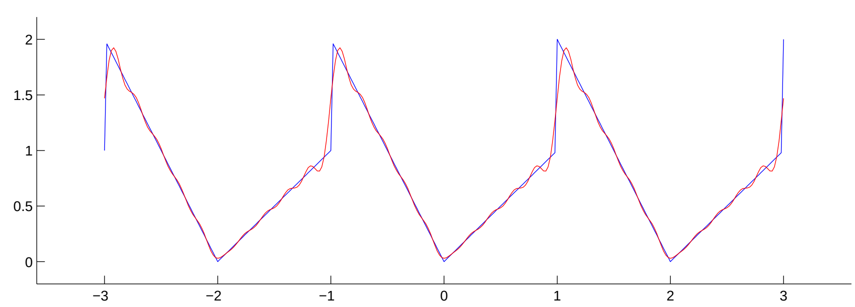
$$= \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2l,\ l \in \mathbb{N} \\ -\frac{6}{(\pi k)^2}, & \text{pro } k = 2l+1,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$b_k = \int_{-1}^{0} -2t\sin k\pi t\,dt + \int_0^1 t\sin k\pi t\,dt =$$

$$\left(\int t\sin k\pi t\,dt = \begin{vmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = \sin k\pi t & v = -\frac{1}{k\pi}\cos k\pi t \end{vmatrix} = -\frac{t}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi t\right)$$

$$= -2\left(0 - \frac{1}{k\pi}\cos k\pi\right) + \left(-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi\right) = \frac{1}{k\pi}\cos k\pi =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{k\pi}, & \text{pro } k = 2l,\ l \in \mathbb{N} \\ -\frac{1}{k\pi}, & \text{pro } k = 2l+1,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Příklad 40010 Periodická funkce $f = f(t)$ s periodou $T = 2\pi$ je dána předpisem

$$f(t) = \begin{cases} -t-\pi, & t \in \langle -\pi, -\pi/2) \\ t, & t \in \langle -\pi/2, \pi/2) \\ -t+\pi & t \in \langle \pi/2, \pi). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi\rangle$ a napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Řešení 40010
stejné zadání jako pr40011.tex, pouze jinak zapsáno.
výsledek musí souhlasit.

$$T = 2\pi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\,dt\right) = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\cos kt\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\cos kt\,dt\right) = 0 \quad (f(t) \text{ je lichá funkce})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\sin kt\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\sin kt\,dt\right) =$$

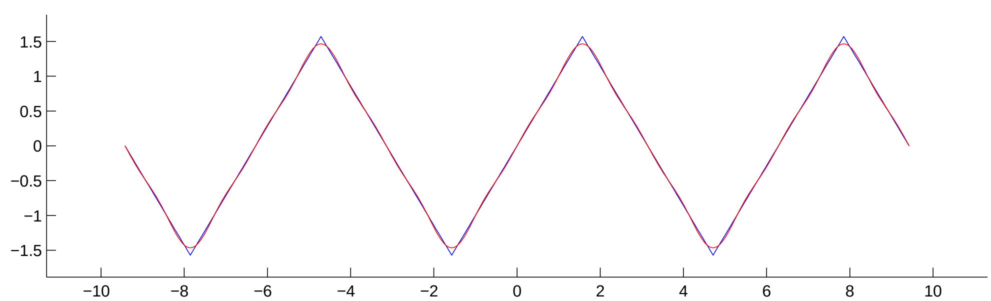
$$\left(\int t\sin k\pi t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \sin k\pi t & v = -\frac{1}{k\pi}\cos k\pi t \end{array} \right| = -\frac{t}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi t\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2k}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{\pi k}\left(\cos\frac{3k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{3\pi}{2k}\cos\frac{3k\pi}{2} + \frac{1}{k^2}\sin\frac{3k\pi}{2} + \frac{\pi}{2k}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2k}\underbrace{\left(\cos\frac{3k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right)}_{=0} + \frac{1}{\pi k^2}\left(3\sin\frac{k\pi}{2} - \sin\frac{3k\pi}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 2l,\ l \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{\pi k^2} & \text{pro } k = 4l+1,\ l \in \mathbb{N} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{pro } k = 4l+3,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Příklad 40011 Periodická funkce $f = f(t)$ s periodou $T = 2\pi$ je dána předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle -\pi/2, \pi/2) \\ -t+\pi & t \in \langle \pi/2, 3\pi/2). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f na intervalu $\langle -5\pi/2, 7\pi/2\rangle$ a napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Řešení 40011

$$T = 2\pi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\,dt) = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\cos kt\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\cos kt\,dt) = 0 \quad (f(t) \text{ je lichá funkce})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\sin kt\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\sin kt\,dt) =$$

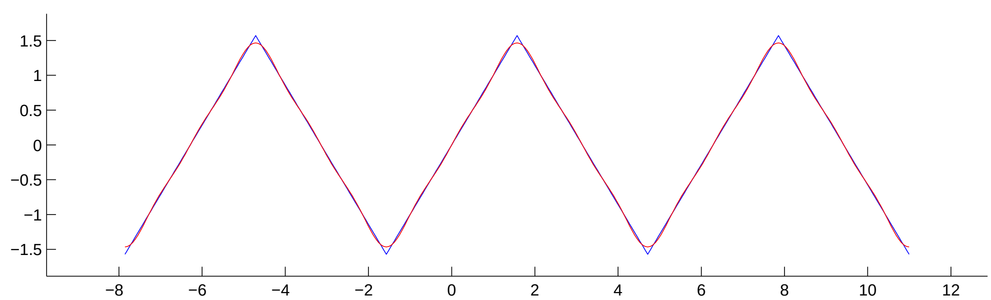
$$\left(\int t\sin k\pi t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \sin k\pi t & v = -\frac{1}{k\pi}\cos k\pi t \end{array} \right| = -\frac{t}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi t\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2k}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{\pi k}\left(\cos\frac{3k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{3\pi}{2k}\cos\frac{3k\pi}{2} + \frac{1}{k^2}\sin\frac{3k\pi}{2} + \frac{\pi}{2k}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2k}\underbrace{\left(\cos\frac{3k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right)}_{=0} + \frac{1}{\pi k^2}\left(3\sin\frac{k\pi}{2} - \sin\frac{3k\pi}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 2l,\ l \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{\pi k^2} & \text{pro } k = 4l+1,\ l \in \mathbb{N} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{pro } k = 4l+3,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Příklad 40012 Periodická funkce $f = f(t)$ s periodou $T = 2$ je dána předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & t \in \langle -1, 0) \\ (1-t)^2 & t \in \langle 0, 1). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f na intervalu $\langle -1, 3\rangle$ a napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Řešení 40012

$$T = 2, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$a_0 = \int_{-1}^{0} 1 - t^2\,dt + \int_0^1 (1-t)^2\,dt = 1 \quad \text{(viz obr.)}$$

$$a_k = \int_{-1}^{0} (1-t^2)\cos k\pi t\,dt + \int_0^1 (1-t)^2 \cos k\pi t\,dt =$$

$$\left(\int t\cos k\pi t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \cos k\pi t & v = \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t \end{array} \right| = \frac{t}{k\pi}\sin k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi t\right)$$

$$\left(\int t^2\cos k\pi t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t^2 & u' = 2t \\ v' = \cos k\pi t & v = \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t \end{array} \right| = \frac{t^2}{k\pi}\sin k\pi t - \frac{2}{k\pi}\int t\sin k\pi t\,dt\right)$$

$$\left(\int t\sin k\pi t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \sin k\pi t & v = -\frac{1}{k\pi}\cos k\pi t \end{array} \right| = -\frac{t}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi t\right)$$

$$\left(\int t^2\sin k\pi t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t^2 & u' = 2t \\ v' = \sin k\pi t & v = -\frac{1}{k\pi}\cos k\pi t \end{array} \right| = -\frac{t^2}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{2}{k\pi}\int t\cos k\pi t\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{k\pi}\underbrace{[\sin k\pi t]_{-1}^{0}}_{=0} - [\frac{t^2}{k\pi}\sin k\pi t - \frac{2}{k\pi}(-\frac{t}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi t)]_{-1}^{0} +$$

$$+\frac{1}{k\pi}\underbrace{[\sin k\pi t]_{0}^{1}}_{=0} - 2[\frac{t}{k\pi}\sin k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi t]_0^1 + [\frac{t^2}{k\pi}\sin k\pi t - \frac{2}{k\pi}(-\frac{t}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi t)]_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{(k\pi)^2}\cos k\pi - 2(\frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi - \frac{1}{(k\pi)^2}) + (-\frac{2}{k\pi}(-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi)) =$$

$$= \frac{2}{(k\pi)^2}(1 - \cos k\pi) = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 2l,\ l \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{(\pi k)^2} & \text{pro } k = 2l+1,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$b_k = \int_{-1}^{0} (1-t^2)\sin k\pi t\,dt + \int_0^1 (1-t)^2 \sin k\pi t\,dt =$$

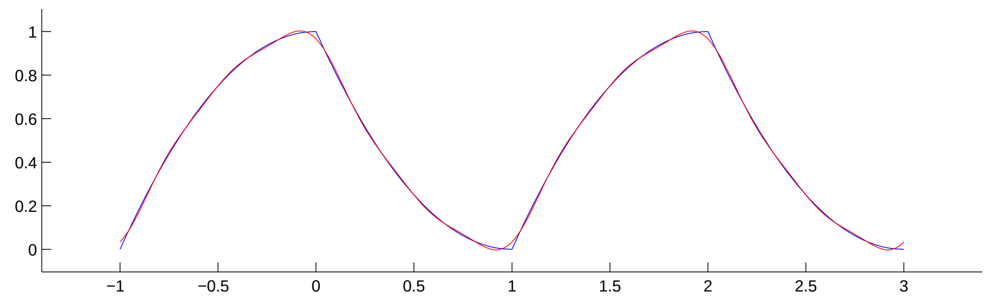
$$= -\frac{1}{k\pi}[\cos k\pi t]_{-1}^{0} - [-\frac{t^2}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{2}{k\pi}(\frac{t}{k\pi}\sin k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi t)]_{-1}^{0} -$$

$$-\frac{1}{k\pi}[\cos k\pi t]_0^1 - 2[-\frac{t}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi t]_0^1 + [-\frac{t^2}{k\pi}\cos k\pi t + \frac{2}{k\pi}(\frac{t}{k\pi}\sin k\pi t + \frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi t)]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{k\pi}(1 - \cos k\pi) - [\frac{2}{(k\pi)^3} + \frac{1}{k\pi}\cos k\pi - \frac{2}{k\pi}(\frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi] - \frac{1}{k\pi}\cos k\pi + \frac{1}{k\pi} -$$

$$-2[-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi] + [-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi + \frac{2}{(k\pi)^3}\cos k\pi - \frac{2}{(k\pi)^3}] =$$

$$= \frac{4}{(k\pi)^3}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 2l,\ l \in \mathbb{N} \\ -\frac{8}{(\pi k)^3} & \text{pro } k = 2l+1,\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Příklad 40013 Periodická funkce $f = f(t)$ s periodou $T = 3$ je dána předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 1) \\ 1, & t \in \langle 1, 2) \\ 3 - t, & t \in \langle 2, 3). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f na intervalu $\langle -3, 3\rangle$ a napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Řešení 40013

$$T = 3, \qquad \omega = \frac{2\pi}{3},$$

$$a_0 = \frac{2}{3}(\int_0^1 t\,dt + \int_1^2 1\,dt + \int_2^3 (3-t)\,dt) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{3}(\int_0^1 t\cos\frac{2k\pi t}{3}\,dt + \int_1^2 \cos\frac{2k\pi t}{3}\,dt + \int_2^3 (3-t)\cos\frac{2k\pi t}{3}\,dt) =$$

$$\left(\int t\cos\frac{2k\pi t}{3}\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \cos\frac{2k\pi t}{3} & v = \frac{3}{2k\pi}\sin\frac{2k\pi t}{3} \end{array} \right| = \frac{3t}{2k\pi}\sin\frac{2k\pi t}{3} + \frac{9}{(2k\pi)^2}\cos\frac{2k\pi t}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left([\frac{3t}{2k\pi}\sin\frac{2k\pi t}{3} + \frac{9}{(2k\pi)^2}\cos\frac{2k\pi t}{3}]_0^1 + \frac{3}{2k\pi}[\sin\frac{2k\pi t}{3}]_1^2 + \right.$$

$$\left. +3\frac{3}{2k\pi}[\sin\frac{2k\pi t}{3}]_2^3 - [\frac{3t}{2k\pi}\sin\frac{2k\pi t}{3} + \frac{9}{(2k\pi)^2}\cos\frac{2k\pi t}{3}]_2^3 \right) =$$

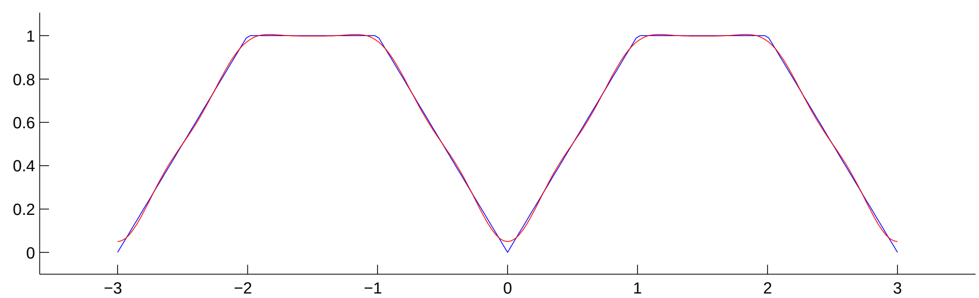
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2k\pi}\sin\frac{2k\pi}{3} + \frac{9}{(2k\pi)^2}\cos\frac{2k\pi}{3} - \frac{9}{(2k\pi)^2} + \frac{3}{2k\pi}(\sin\frac{4k\pi}{3} - \sin\frac{2k\pi}{3}) + \right.$$

$$\left. +\frac{9}{2k\pi}(\sin 2k\pi - \sin\frac{4k\pi}{3}) - (\frac{9}{(2k\pi)^2} - \frac{3}{k\pi}\sin\frac{4k\pi}{3}) - \frac{9}{(2k\pi)^2}\cos\frac{4k\pi}{3} \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(+\frac{9}{(2k\pi)^2}(\cos\frac{2k\pi}{3} + \cos\frac{4k\pi}{3}) - 2\frac{9}{(2k\pi)^2} \right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 3l,\ l \in \mathbb{N} \\ -\frac{2}{3}\frac{3.9}{(2k\pi)^2} = -\frac{9}{2(k\pi)^2}, & \text{pro } k \neq 3l\ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{3}(\int_0^1 t\sin\frac{2k\pi t}{3}\,dt + \int_1^2 \sin\frac{2k\pi t}{3}\,dt + \int_2^3 (3-t)\sin\frac{2k\pi t}{3}\,dt) = 0 \quad \text{(f(t) je sudá funkce).}$$



Příklad 41001 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2,-1) \\ x, & x \in (-1,0) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41001 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} x\mathrm{d}x = [x]_{-2}^{-1} + \left[1/2\, x^2\right]_{-1}^{0} = 1/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2} + \frac{x\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{-\sin(\pi\, n)+\sin(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{1-\cos(\pi\, n)-\pi\, n\sin(\pi\, n)}{n^2\pi^2} =$

$= \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}$

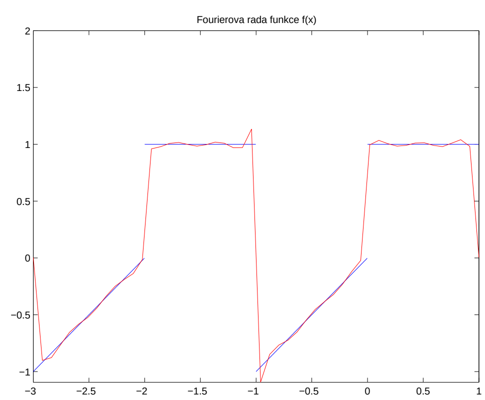
$b_n = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{-\cos(\pi\, n)+\cos(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{\sin(\pi\, n)}{n^2\pi^2} - \frac{\cos(\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= -\frac{2\,(-1)^n-1}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(2\,(-1)^n-1)\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(1-(-1)^n)\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41002 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-2,-1) \\ 1, & x \in (-1,0) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41002 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} 1\mathrm{d}x = \left[1/2\,x^2\right]_{-2}^{-1} + [x]_{-1}^{0} = -1/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} x\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0}\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\cos(\pi\,xn)}{n^2\pi^2} + \frac{x\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{\cos(\pi\,n)+\pi\,n\sin(\pi\,n)-\cos(2\,\pi\,n)-2\,\pi\,n\sin(2\,\pi\,n)}{n^2\pi^2} + \frac{\sin(\pi\,n)}{\pi\,n} =$

$= \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$

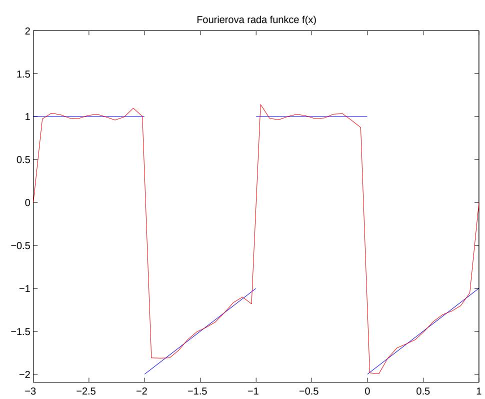
$b_n = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} x\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0}\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{-\sin(\pi\,n)+\pi\,n\cos(\pi\,n)+\sin(2\,\pi\,n)-2\,\pi\,n\cos(2\,\pi\,n)}{n^2\pi^2} + \frac{-1+\cos(\pi\,n)}{\pi\,n} =$

$= \frac{2\,(-1)^n-3}{\pi\,n}$

$\varphi(x) = -1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\,(-1)^n-3)\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n} + \frac{((-1)^n-1)\cos(\pi\,xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41003 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-2,-1) \\ 1, & x \in (-1,0) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41003 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} -x \mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} 1 \mathrm{d}x = \left[-1/2\, x^2\right]_{-2}^{-1} + [x]_{-1}^{0} = 5/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} -x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0}\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\cos(\pi\, xn)-\pi\, xn\sin(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{-\cos(\pi\, n)-\pi\, n\sin(\pi\, n)+\cos(2\,\pi\, n)+2\,\pi\, n\sin(2\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin(\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{-(-1)^n+1}{\pi^2 n^2}$

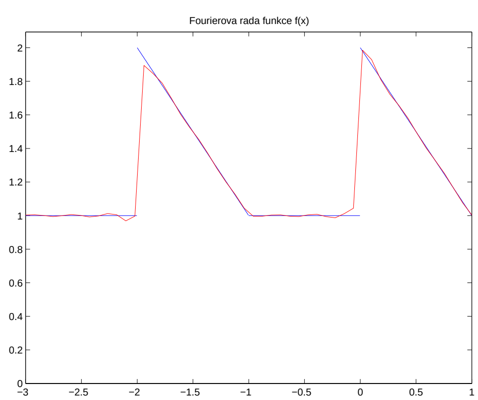
$b_n = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} -x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0}\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\sin(\pi\, xn)+\pi\, xn\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{\sin(\pi\, n)-\pi\, n\cos(\pi\, n)-\sin(2\,\pi\, n)+2\,\pi\, n\cos(2\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} + \frac{-1+\cos(\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{1}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 5/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(-(-1)^n+1)\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41004 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2,-1) \\ -x, & x \in (-1,0) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41004 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} -x\mathrm{d}x = [x]_{-2}^{-1} + \left[-1/2\,x^2\right]_{-1}^{0} = 3/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} -x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{-\cos(\pi\, xn) - \pi\, xn\sin(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{-\sin(\pi\, n) + \sin(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{\sin(\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{-1 + \cos(\pi\, n)}{n^2\pi^2} =$

$= \frac{-1 + (-1)^n}{n^2\pi^2}$

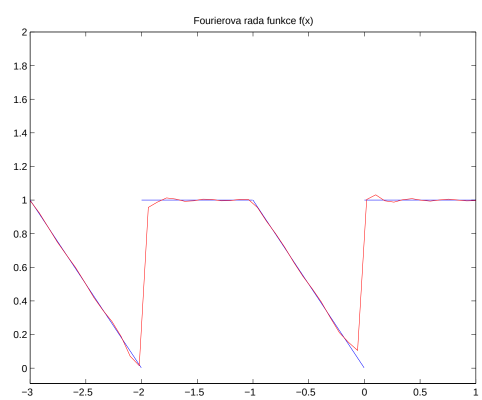
$b_n = \frac{2}{2}\int_{-2}^{-1} \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} -x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{-\sin(\pi\, xn) + \pi\, xn\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{-\cos(\pi\, n) + \cos(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{\cos(\pi\, n)}{\pi\, n} - \frac{\sin(\pi\, n)}{n^2\pi^2} =$

$= \frac{1}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 3/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(-1+(-1)^n)\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41005 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in(-1,0)\\ x, & x\in(0,1)\end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -2,2\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41005 $T=2, \quad \omega=\pi,$

$a_0=\frac{2}{2}\int_{-1}^{0}1\mathrm{d}x+\frac{2}{2}\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x=[x]_{-1}^{0}+\left[1/2\,x^2\right]_0^1=3/2$

$a_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{0}\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x+\frac{2}{2}\int_{0}^{1}x\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x=$

$=\left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{\sin(\pi\,xn)x}{\pi\,n}+\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi^2n^2}\right]_0^1=$

$=2\,\frac{\sin(\pi\,n)}{\pi\,n}+\frac{\cos(\pi\,n)-1}{\pi^2n^2}=$

$=\frac{(-1)^n-1}{\pi^2n^2}$

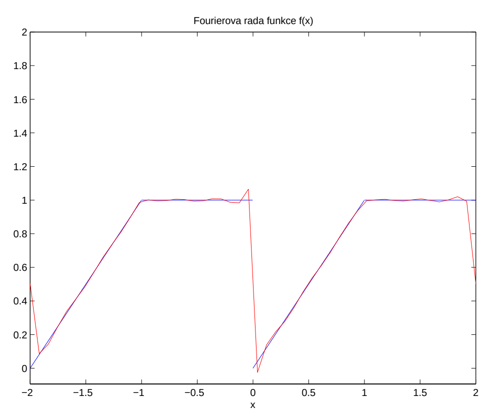
$b_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{0}\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x+\frac{2}{2}\int_{0}^{1}\sin(\pi\,xn)x\mathrm{d}x=$

$=\left[-\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi^2n^2}-\frac{x\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_0^1=$

$=\frac{\cos(\pi\,n)-1}{\pi\,n}+\frac{\sin(\pi\,n)}{\pi^2n^2}-\frac{\cos(\pi\,n)}{\pi\,n}=$

$=-\frac{1}{\pi\,n}$

$\varphi(x)=3/4+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}+\frac{((-1)^n-1)\cos(\pi\,xn)}{\pi^2n^2}$



Příklad 41006 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41006 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^{0} x \mathrm{d}x + \frac{2}{2} \int_{0}^{1} 1 \mathrm{d}x = \left[1/2\, x^2\right]_{-1}^{0} + [x]_0^1 = 1/2$

$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{0} x \cos(\pi\, xn) \mathrm{d}x + \frac{2}{2} \int_{0}^{1} \cos(\pi\, xn) \mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} + \frac{x \sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_0^1 =$

$= \frac{1 - \cos(\pi\, n) - \pi\, n \sin(\pi\, n)}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin(\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2}$

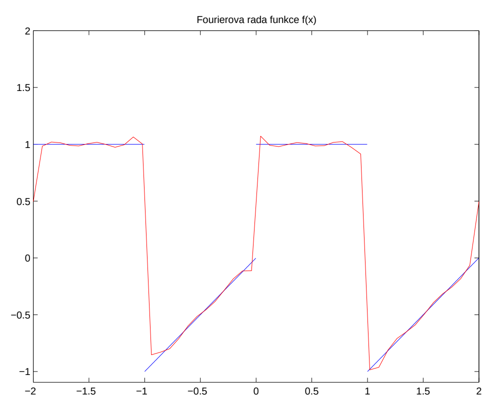
$b_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{0} x \sin(\pi\, xn) \mathrm{d}x + \frac{2}{2} \int_{0}^{1} \sin(\pi\, xn) \mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} - \frac{x \cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_0^1 =$

$= \frac{\sin(\pi\, n)}{\pi^2 n^2} - \frac{\cos(\pi\, n)}{\pi\, n} - \frac{-1 + \cos(\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{-2\,(-1)^n + 1}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\,(-1)^n + 1) \sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(1 - (-1)^n) \cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41007 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-1,0) \\ 1, & x \in (0,1) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41007 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} -x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{0}^{1} 1\mathrm{d}x = \left[-1/2\,x^2\right]_{-1}^{0} + [x]_0^1 = 3/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} -x\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{0}^{1}\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\cos(\pi\,xn) - \pi\,xn\sin(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_0^1 =$

$= 2\,\frac{\sin(\pi\,n)}{\pi\,n} + \frac{-1+\cos(\pi\,n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{-1+(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

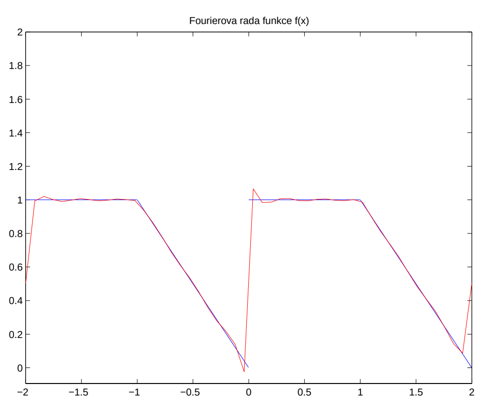
$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} -x\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{0}^{1}\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\sin(\pi\,xn) + \pi\,xn\cos(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_0^1 =$

$= -\frac{\sin(\pi\,n)}{\pi^2 n^2} + \frac{\cos(\pi\,n)}{\pi\,n} - \frac{-1+\cos(\pi\,n)}{\pi\,n} =$

$= \frac{1}{\pi\,n}$

$\varphi(x) = 3/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n} + \frac{(-1+(-1)^n)\cos(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41008 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1,0) \\ -x, & x \in (0,1) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41008 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{0}^{1} -x\mathrm{d}x = [x]_{-1}^{0} + \left[-1/2\, x^2\right]_{0}^{1} = 1/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{0}^{1} -x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-\cos(\pi\, xn) - \pi\, xn \sin(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}\right]_{0}^{1} =$

$= -\frac{\cos(\pi\, n)-1}{n^2\pi^2} =$

$= -\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$

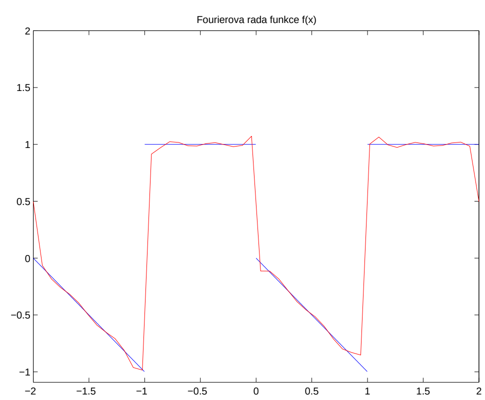
$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{0} \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_{0}^{1} -x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-\sin(\pi\, xn) + \pi\, xn\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}\right]_{0}^{1} =$

$= \frac{\cos(\pi\, n)-1}{\pi\, n} - \frac{\sin(\pi\, n)}{n^2\pi^2} + \frac{\cos(\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{-1+2\,(-1)^n}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2\,(-1)^n)\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} - \frac{((-1)^n - 1)\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41009 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ x, & x \in (1,2) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -1, 3 \rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41009 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^1 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 x\mathrm{d}x = [x]_0^1 + \left[1/2\, x^2\right]_1^2 = 5/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_0^1 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_0^1 + \left[\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} + \frac{x\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_1^2 =$

$= \frac{\sin(\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{\cos(2\,\pi\, n) + 2\,\pi\, n\sin(2\,\pi\, n) - \cos(\pi\, n) - \pi\, n\sin(\pi\, n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

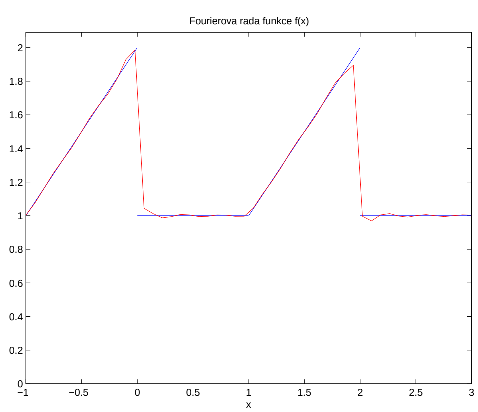
$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_0^1 + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} - \frac{x\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_1^2 =$

$= -\frac{\cos(\pi\, n) - 1}{\pi\, n} + \frac{\sin(2\,\pi\, n) - 2\,\pi\, n\cos(2\,\pi\, n) - \sin(\pi\, n) + \pi\, n\cos(\pi\, n)}{\pi^2 n^2} =$

$= -\frac{1}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 5/4 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(1-(-1)^n)\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41010 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \in (1,2) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -1, 3\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41010 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 1\mathrm{d}x = \left[1/2\, x^2\right]_0^1 + [x]_1^2 = 3/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_0^1 x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} + \frac{x\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_0^1 + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_1^2 =$

$= \frac{\sin(\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{\cos(\pi\, n)-1}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin(2\,\pi\, n)-\sin(\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}$

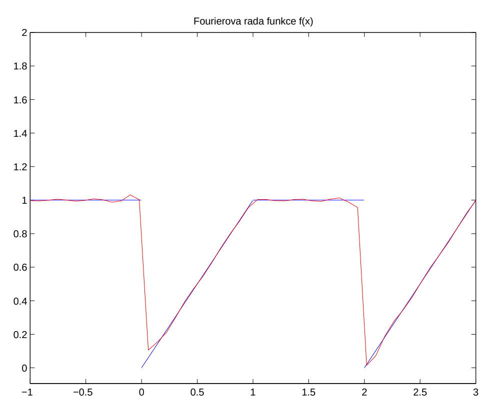
$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} - \frac{x\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_0^1 + \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_1^2 =$

$= \frac{\sin(\pi\, n)}{\pi^2 n^2} - \frac{\cos(\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{-\cos(2\,\pi\, n)+\cos(\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= -\frac{1}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 3/4 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{((-1)^n-1)\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41011 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \in (1,2) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -1, 3\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41011 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^1 -x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 1\mathrm{d}x = \left[-1/2\,x^2\right]_0^1 + [x]_1^2 = 1/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_0^1 -x\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 \cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\cos(\pi\,xn)-\pi\,xn\sin(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}\right]_0^1 + \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_1^2 =$

$= -\frac{\sin(\pi\,n)}{\pi\,n} - \frac{\cos(\pi\,n)-1}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin(2\,\pi\,n)-\sin(\pi\,n)}{\pi\,n} =$

$= \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

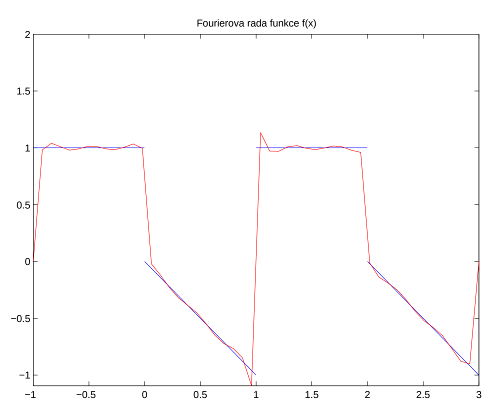
$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 -x\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 \sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\sin(\pi\,xn)+\pi\,xn\cos(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}\right]_0^1 + \left[-\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_1^2 =$

$= -\frac{\sin(\pi\,n)}{\pi^2 n^2} + \frac{\cos(\pi\,n)}{\pi\,n} + \frac{-\cos(2\,\pi\,n)+\cos(\pi\,n)}{\pi\,n} =$

$= \frac{2\,(-1)^n-1}{\pi\,n}$

$\varphi(x) = 1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\,(-1)^n-1)\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n} + \frac{(1-(-1)^n)\cos(\pi\,xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41012 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ -x, & x \in (1,2) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle -1, 3 \rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41012 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^1 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 -x\mathrm{d}x = [x]_0^1 + \left[-1/2\,x^2\right]_1^2 = -1/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_0^1 \cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 -x\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_0^1 + \left[\frac{-\cos(\pi\,xn) - \pi\,xn\sin(\pi\,xn)}{n^2\pi^2}\right]_1^2 =$

$= \frac{\sin(\pi\,n)}{\pi\,n} + \frac{-\cos(2\,\pi\,n) - 2\,\pi\,n\sin(2\,\pi\,n) + \cos(\pi\,n) + \pi\,n\sin(\pi\,n)}{n^2\pi^2} =$

$= \frac{-1 + (-1)^n}{n^2\pi^2}$

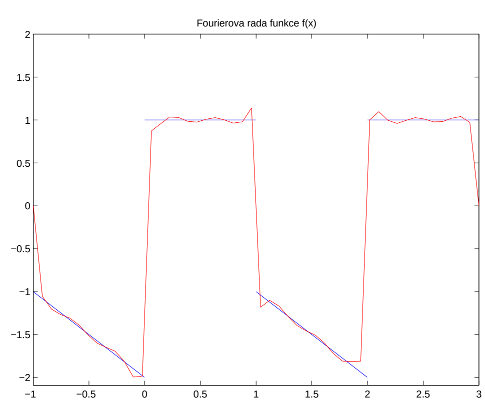
$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 \sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_1^2 -x\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_0^1 + \left[\frac{-\sin(\pi\,xn) + \pi\,xn\cos(\pi\,xn)}{n^2\pi^2}\right]_1^2 =$

$= -\frac{\cos(\pi\,n) - 1}{\pi\,n} + \frac{-\sin(2\,\pi\,n) + 2\,\pi\,n\cos(2\,\pi\,n) + \sin(\pi\,n) - \pi\,n\cos(\pi\,n)}{n^2\pi^2} =$

$= \frac{-2\,(-1)^n + 3}{\pi\,n}$

$\varphi(x) = -1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\,(-1)^n + 3)\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n} + \frac{(-1 + (-1)^n)\cos(\pi\,xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41013 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1,2) \\ x, & x \in (2,3) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 0,4\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41013 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_1^2 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 x\mathrm{d}x = [x]_1^2 + \left[1/2\,x^2\right]_2^3 = 7/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_1^2 \cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 x\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_1^2 + \left[\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2} + \frac{x\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_2^3 =$

$= \frac{\sin(2\,\pi\,n) - \sin(\pi\,n)}{\pi\,n} + \frac{\cos(3\,\pi\,n) + 3\,\pi\,n\sin(3\,\pi\,n) - \cos(2\,\pi\,n) - 2\,\pi\,n\sin(2\,\pi\,n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{-1+(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

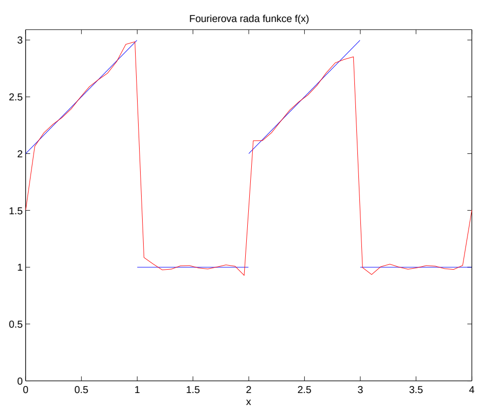
$b_n = \frac{2}{2}\int_1^2 \sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 x\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_1^2 + \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2} - \frac{x\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_2^3 =$

$= \frac{-\cos(2\,\pi\,n) + \cos(\pi\,n)}{\pi\,n} + \frac{\sin(3\,\pi\,n) - 3\,\pi\,n\cos(3\,\pi\,n) - \sin(2\,\pi\,n) + 2\,\pi\,n\cos(2\,\pi\,n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{-2\,(-1)^n + 1}{\pi\,n}$

$\varphi(x) = 7/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\,(-1)^n+1)\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n} + \frac{(-1+(-1)^n)\cos(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41014 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (1, 2) \\ 1, & x \in (2, 3) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41014 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_1^2 x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 1\mathrm{d}x = \left[1/2\, x^2\right]_1^2 + [x]_2^3 = 5/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_1^2 x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2} + \frac{x\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_1^2 + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_2^3 =$

$= \frac{\cos(2\,\pi\, n)+2\,\pi\, n\sin(2\,\pi\, n)-\cos(\pi\, n)-\pi\, n\sin(\pi\, n)}{n^2\pi^2} + \frac{\sin(3\,\pi\, n)-\sin(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}$

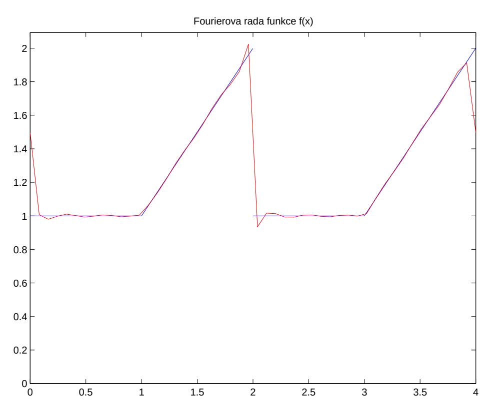
$b_n = \frac{2}{2}\int_1^2 x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_1^2 + \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_2^3 =$

$= \frac{\sin(2\,\pi\, n)-2\,\pi\, n\cos(2\,\pi\, n)-\sin(\pi\, n)+\pi\, n\cos(\pi\, n)}{n^2\pi^2} + \frac{-\cos(3\,\pi\, n)+\cos(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= -\frac{1}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 5/4 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(1-(-1)^n)\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41015 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (1,2) \\ 1, & x \in (2,3) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 0,4\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41015 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_1^2 -x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 1\mathrm{d}x = \left[-1/2\,x^2\right]_1^2 + [x]_2^3 = -1/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_1^2 -x\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 \cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\cos(\pi\,xn)-\pi\,xn\sin(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}\right]_1^2 + \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_2^3 =$

$= \frac{-\cos(2\,\pi\,n)-2\,\pi\,n\sin(2\,\pi\,n)+\cos(\pi\,n)+\pi\,n\sin(\pi\,n)}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin(3\,\pi\,n)-\sin(2\,\pi\,n)}{\pi\,n} =$

$= \frac{-1+(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

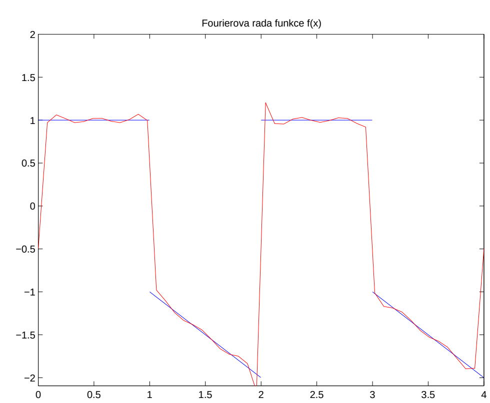
$b_n = \frac{2}{2}\int_1^2 -x\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 \sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\sin(\pi\,xn)+\pi\,xn\cos(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}\right]_1^2 + \left[-\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_2^3 =$

$= \frac{-\sin(2\,\pi\,n)+2\,\pi\,n\cos(2\,\pi\,n)+\sin(\pi\,n)-\pi\,n\cos(\pi\,n)}{\pi^2 n^2} + \frac{-\cos(3\,\pi\,n)+\cos(2\,\pi\,n)}{\pi\,n} =$

$= \frac{3-2\,(-1)^n}{\pi\,n}$

$\varphi(x) = -1/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2\,(-1)^n)\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n} + \frac{(-1+(-1)^n)\cos(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41016 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1,2) \\ -x, & x \in (2,3) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 0,4\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41016 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_1^2 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 -x\mathrm{d}x = [x]_1^2 + \left[-1/2\,x^2\right]_2^3 = -3/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_1^2 \cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 -x\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_1^2 + \left[\frac{-\cos(\pi\,xn)-\pi\,xn\sin(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}\right]_2^3 =$

$= \frac{\sin(2\,\pi\,n)-\sin(\pi\,n)}{\pi\,n} + \frac{-\cos(3\,\pi\,n)-3\,\pi\,n\sin(3\,\pi\,n)+\cos(2\,\pi\,n)+2\,\pi\,n\sin(2\,\pi\,n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

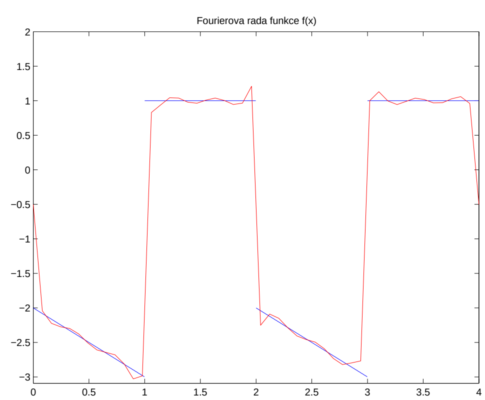
$b_n = \frac{2}{2}\int_1^2 \sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_2^3 -x\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_1^2 + \left[\frac{-\sin(\pi\,xn)+\pi\,xn\cos(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}\right]_2^3 =$

$= \frac{-\cos(2\,\pi\,n)+\cos(\pi\,n)}{\pi\,n} + \frac{-\sin(3\,\pi\,n)+3\,\pi\,n\cos(3\,\pi\,n)+\sin(2\,\pi\,n)-2\,\pi\,n\cos(2\,\pi\,n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{4\,(-1)^n-3}{\pi\,n}$

$\varphi(x) = -3/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4\,(-1)^n-3)\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n} + \frac{(1-(-1)^n)\cos(\pi\,xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41017 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (2,3) \\ x, & x \in (3,4) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 1, 5 \rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41017 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_2^3 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 x\mathrm{d}x = [x]_2^3 + \left[1/2\, x^2\right]_3^4 = 9/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_2^3 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_2^3 + \left[\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} + \frac{x\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 =$

$= \frac{\sin(3\,\pi\, n) - \sin(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{\cos(4\,\pi\, n) + 4\,\pi\, n\sin(4\,\pi\, n) - \cos(3\,\pi\, n) - 3\,\pi\, n\sin(3\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2}$

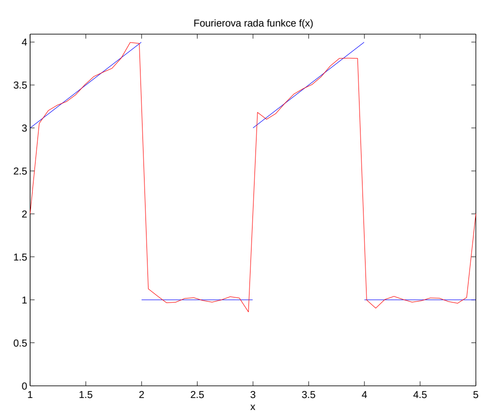
$b_n = \frac{2}{2}\int_2^3 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_2^3 + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} - \frac{x\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 =$

$= \frac{-\cos(3\,\pi\, n) + \cos(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{\sin(4\,\pi\, n) - 4\,\pi\, n\cos(4\,\pi\, n) - \sin(3\,\pi\, n) + 3\,\pi\, n\cos(3\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{-3 + 2\,(-1)^n}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 9/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+2\,(-1)^n)\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(1-(-1)^n)\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41018 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (2,3) \\ 1, & x \in (3,4) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 1, 5\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41018 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_2^3 x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 1\mathrm{d}x = \left[1/2\, x^2\right]_2^3 + [x]_3^4 = 7/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_2^3 x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} + \frac{x\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_2^3 + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 =$

$= \frac{\cos(3\,\pi\, n) + 3\,\pi\, n\sin(3\,\pi\, n) - \cos(2\,\pi\, n) - 2\,\pi\, n\sin(2\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin(4\,\pi\, n) - \sin(3\,\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$

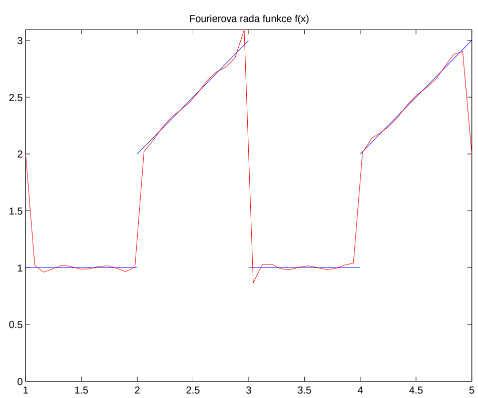
$b_n = \frac{2}{2}\int_2^3 x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_2^3 + \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 =$

$= \frac{\sin(3\,\pi\, n) - 3\,\pi\, n\cos(3\,\pi\, n) - \sin(2\,\pi\, n) + 2\,\pi\, n\cos(2\,\pi\, n)}{n^2\pi^2} + \frac{-\cos(4\,\pi\, n) + \cos(3\,\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{-2\,(-1)^n + 1}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 7/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\,(-1)^n + 1)\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{((-1)^n - 1)\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41019 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (2,3) \\ 1, & x \in (3,4) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 1,5 \rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41019 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_2^3 -x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 1\mathrm{d}x = \left[-1/2\, x^2\right]_2^3 + [x]_3^4 = -3/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_2^3 -x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\cos(\pi\, xn) - \pi\, xn \sin(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_2^3 + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 =$

$= \frac{-\cos(3\,\pi\, n) - 3\,\pi\, n \sin(3\,\pi\, n) + \cos(2\,\pi\, n) + 2\,\pi\, n \sin(2\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin(4\,\pi\, n) - \sin(3\,\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{-(-1)^n + 1}{\pi^2 n^2}$

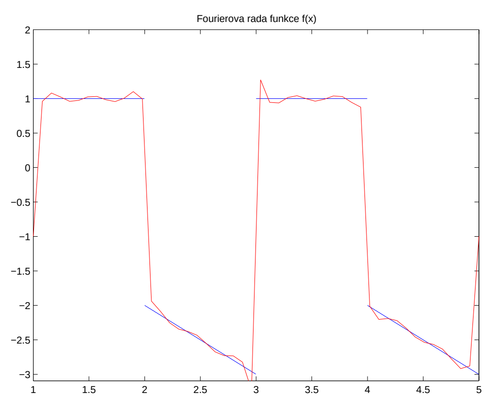
$b_n = \frac{2}{2}\int_2^3 -x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\sin(\pi\, xn) + \pi\, xn \cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_2^3 + \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 =$

$= \frac{-\sin(3\,\pi\, n) + 3\,\pi\, n \cos(3\,\pi\, n) + \sin(2\,\pi\, n) - 2\,\pi\, n \cos(2\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} + \frac{-\cos(4\,\pi\, n) + \cos(3\,\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{4\,(-1)^n - 3}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = -3/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4\,(-1)^n - 3)\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(-(-1)^n + 1)\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41020 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (2,3) \\ -x, & x \in (3,4) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 1, 5\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41020 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_2^3 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 -x\mathrm{d}x = [x]_2^3 + \left[-1/2\, x^2\right]_3^4 = -5/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_2^3 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 -x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_2^3 + \left[\frac{-\cos(\pi\, xn) - \pi\, xn\sin(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_3^4 =$

$= \frac{\sin(3\,\pi\, n) - \sin(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{-\cos(4\,\pi\, n) - 4\,\pi\, n\sin(4\,\pi\, n) + \cos(3\,\pi\, n) + 3\,\pi\, n\sin(3\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{-1+(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

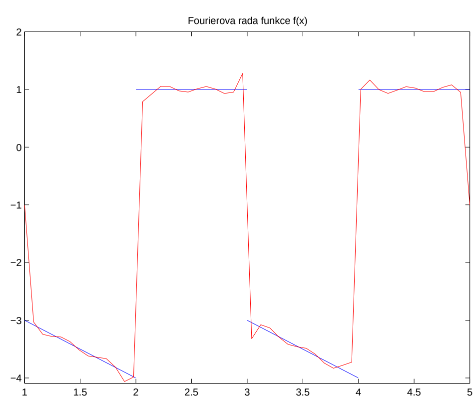
$b_n = \frac{2}{2}\int_2^3 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_3^4 -x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_2^3 + \left[\frac{-\sin(\pi\, xn) + \pi\, xn\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_3^4 =$

$= \frac{-\cos(3\,\pi\, n) + \cos(2\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{-\sin(4\,\pi\, n) + 4\,\pi\, n\cos(4\,\pi\, n) + \sin(3\,\pi\, n) - 3\,\pi\, n\cos(3\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{5-4\,(-1)^n}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = -5/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-4\,(-1)^n)\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(-1+(-1)^n)\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41021 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (3,4) \\ x, & x \in (4,5) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 2, 6\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41021 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_3^4 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 x\mathrm{d}x = [x]_3^4 + \left[1/2\, x^2\right]_4^5 = 11/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_3^4 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 + \left[\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2} + \frac{x\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_4^5 =$

$= \frac{\sin(4\,\pi\, n) - \sin(3\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{\cos(5\,\pi\, n) + 5\,\pi\, n\sin(5\,\pi\, n) - \cos(4\,\pi\, n) - 4\,\pi\, n\sin(4\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$

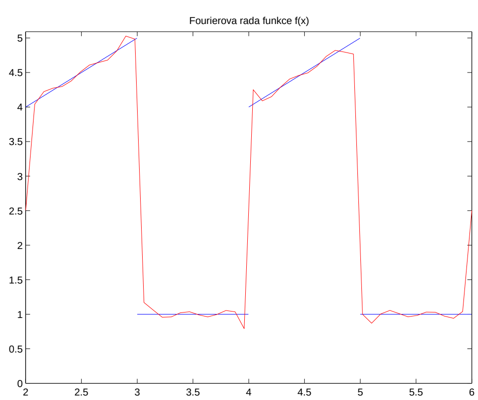
$b_n = \frac{2}{2}\int_3^4 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_4^5 =$

$= \frac{-\cos(4\,\pi\, n) + \cos(3\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{\sin(5\,\pi\, n) - 5\,\pi\, n\cos(5\,\pi\, n) - \sin(4\,\pi\, n) + 4\,\pi\, n\cos(4\,\pi\, n)}{n^2\pi^2} =$

$= \frac{-4\,(-1)^n + 3}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = 11/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4\,(-1)^n + 3)\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{((-1)^n - 1)\cos(\pi\, xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41022 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (3,4) \\ 1, & x \in (4,5) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 2, 6\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41022 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_3^4 x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 1\mathrm{d}x = \left[1/2\,x^2\right]_3^4 + [x]_4^5 = 9/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_3^4 x\cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 \cos(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\cos(\pi\,xn)}{n^2\pi^2} + \frac{x\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_3^4 + \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_4^5 =$

$= \frac{\cos(4\,\pi\,n)+4\,\pi\,n\sin(4\,\pi\,n)-\cos(3\,\pi\,n)-3\,\pi\,n\sin(3\,\pi\,n)}{n^2\pi^2} + \frac{\sin(5\,\pi\,n)-\sin(4\,\pi\,n)}{\pi\,n} =$

$= \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}$

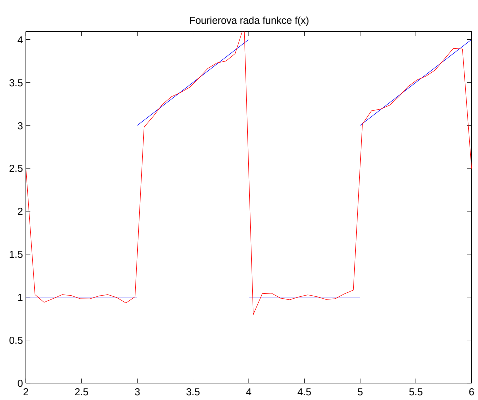
$b_n = \frac{2}{2}\int_3^4 x\sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 \sin(\pi\,xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\,xn)}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_3^4 + \left[-\frac{\cos(\pi\,xn)}{\pi\,n}\right]_4^5 =$

$= \frac{\sin(4\,\pi\,n)-4\,\pi\,n\cos(4\,\pi\,n)-\sin(3\,\pi\,n)+3\,\pi\,n\cos(3\,\pi\,n)}{n^2\pi^2} + \frac{-\cos(5\,\pi\,n)+\cos(4\,\pi\,n)}{\pi\,n} =$

$= \frac{-3+2\,(-1)^n}{\pi\,n}$

$\varphi(x) = 9/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+2\,(-1)^n)\sin(\pi\,xn)}{\pi\,n} + \frac{(1-(-1)^n)\cos(\pi\,xn)}{n^2\pi^2}$



Příklad 41023 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (3,4) \\ 1, & x \in (4,5) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 2, 6\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41023 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_3^4 -x\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 1\mathrm{d}x = \left[-1/2\, x^2\right]_3^4 + [x]_4^5 = -5/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_3^4 -x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\cos(\pi\, xn) - \pi\, xn \sin(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_3^4 + \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_4^5 =$

$= \frac{-\cos(4\,\pi\, n) - 4\,\pi\, n\sin(4\,\pi\, n) + \cos(3\,\pi\, n) + 3\,\pi\, n\sin(3\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} + \frac{\sin(5\,\pi\, n) - \sin(4\,\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{-1 + (-1)^n}{\pi^2 n^2}$

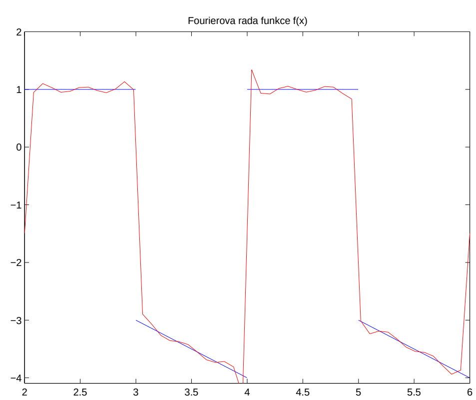
$b_n = \frac{2}{2}\int_3^4 -x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{-\sin(\pi\, xn) + \pi\, xn\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_3^4 + \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_4^5 =$

$= \frac{-\sin(4\,\pi\, n) + 4\,\pi\, n\cos(4\,\pi\, n) + \sin(3\,\pi\, n) - 3\,\pi\, n\cos(3\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} + \frac{-\cos(5\,\pi\, n) + \cos(4\,\pi\, n)}{\pi\, n} =$

$= \frac{5 - 4\,(-1)^n}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = -5/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 - 4\,(-1)^n)\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(-1 + (-1)^n)\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 41024 Stanovte Fourierovu řadu $\varphi(x)$ funkce $f(x)$, která je definována na základním intervalu periodicity následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (3,4) \\ -x, & x \in (4,5) \end{cases}$$

Načrtněte graf $f(x)$ a $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 2, 6\rangle$. V grafu vyznačte vechny body spojitosti či nespojitosti!

Řešení 41024 $T = 2, \quad \omega = \pi,$

$a_0 = \frac{2}{2}\int_3^4 1\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 -x\mathrm{d}x = [x]_3^4 + \left[-1/2\,x^2\right]_4^5 = -7/2$

$a_n = \frac{2}{2}\int_3^4 \cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 -x\cos(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 + \left[\frac{-\cos(\pi\, xn) - \pi\, xn\sin(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_4^5 =$

$= \frac{\sin(4\,\pi\, n) - \sin(3\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{-\cos(5\,\pi\, n) - 5\,\pi\, n\sin(5\,\pi\, n) + \cos(4\,\pi\, n) + 4\,\pi\, n\sin(4\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

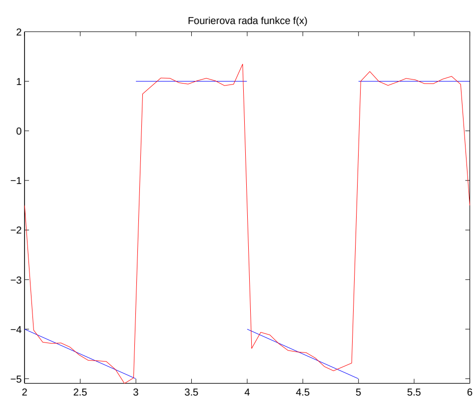
$b_n = \frac{2}{2}\int_3^4 \sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x + \frac{2}{2}\int_4^5 -x\sin(\pi\, xn)\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{\cos(\pi\, xn)}{\pi\, n}\right]_3^4 + \left[\frac{-\sin(\pi\, xn) + \pi\, xn\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}\right]_4^5 =$

$= \frac{-\cos(4\,\pi\, n) + \cos(3\,\pi\, n)}{\pi\, n} + \frac{-\sin(5\,\pi\, n) + 5\,\pi\, n\cos(5\,\pi\, n) + \sin(4\,\pi\, n) - 4\,\pi\, n\cos(4\,\pi\, n)}{\pi^2 n^2} =$

$= \frac{6\,(-1)^n - 5}{\pi\, n}$

$\varphi(x) = -7/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6\,(-1)^n - 5)\sin(\pi\, xn)}{\pi\, n} + \frac{(1-(-1)^n)\cos(\pi\, xn)}{\pi^2 n^2}$



Příklad 43001 Funkce $f = f(t)$ je dána předpisem

$$f(t) = 1 + 2\sin 2t, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Proveďte přímé periodické rozšíření a nakreslete graf výsledné funkce na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Rozviňte funkci ve Fourierovu řadu tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

Nakreslete graf součtové funkce (pokud existuje) této řady na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Řešení 43001 Díky znalostem získaných z předmětu ME4 by mělo být ihned zřejmé, že $a_k = \begin{cases} 2, & \text{pro } k = 0 \\ 0, & \text{pro } k = 1, 2, \dots \end{cases}$ a $b_k = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 1 \\ 2, & \text{pro } k = 2 \\ 0, & \text{pro } k = 3, 4, \dots \end{cases}$

Ověřme výpočtem:

$T = 2\pi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\sin 2t) dt = \frac{1}{\pi} \left([t]_{-\pi}^{\pi} + 2 \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi}(2\pi + 0) = 2$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\sin 2t) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} [\cos kt + \sin{(2+k)t} + \sin{(2-k)t}] dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin kt}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{\cos{(2+k)t}}{2+k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{\cos{(2-k)t}}{2-k} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi}(0 + 0 + 0) = 0$$

Výpočet má smysl pro $k \neq 2$, ale pro $k = 2$ bude třetí člen v integrálu roven nule a dostaneme tedy stejný výsledek.

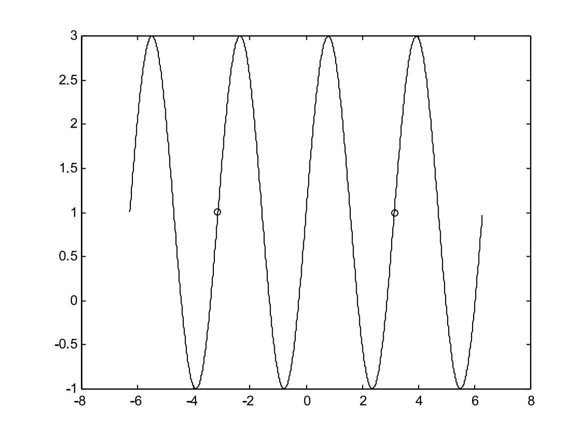
$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\sin 2t) \sin kt dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} [\sin kt + \cos{(2-k)t} - \cos{(2+k)t}] dt \right) =$$

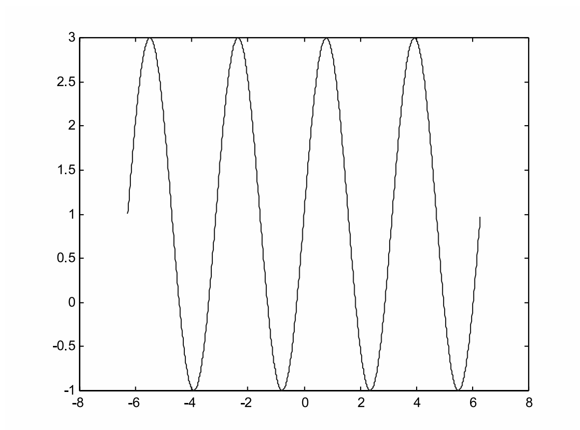
$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-\cos kt}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin{(2-k)t}}{2-k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{\sin{(2+k)t}}{2+k} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi}(0 + 0 - 0) = 0$$

Výpočet má smysl pro $k \neq 2$, ale pro $k = 2$ dostaneme:

$$b_2 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\sin 2t) \sin 2t dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} [\sin 2t + \cos{(2-2)t} - \cos{(2+2)t}] dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-\cos 2t}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} + [t]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{\sin 4t}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi}(0 + 2\pi - 0) = 2$$





Příklad 43002 Funkce $f = f(t)$ je dána předpisem

$$f(t) = 1 + 2\cos 2t, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Proveďte přímé periodické rozšíření a nakreslete graf výsledné funkce na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Rozviňte funkci ve Fourierovu řadu tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

Nakreslete graf součtové funkce (pokud existuje) této řady na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Řešení 43002 Díky znalostem získaných z předmětu ME4 by mělo být ihned zřejmé, že
$$a_k = \begin{cases} 2, & \text{pro } k = 0 \\ 0, & \text{pro } k = 1 \\ 2, & \text{pro } k = 2 \\ 0, & \text{pro } k = 3, 4, \ldots \end{cases} \quad \text{a } b_k = 0, \text{ pro } k = 1, 2, \ldots$$

Ověřme výpočtem:
$T = 2\pi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos 2t)dt = \frac{1}{\pi}\left([t]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(2\pi+0) = 2$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos 2t)\cos kt dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\cos kt + \cos(2+k)t + \cos(2-k)t]dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin kt}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(2+k)t}{2+k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(2-k)t}{2-k}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(0+0+0) = 0$$

Výpočet má smysl pro $k \neq 2$, ale pro $k = 2$ dostaneme:

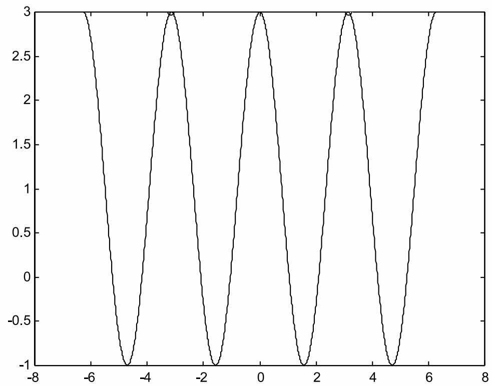
$$a_2 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos 2t)\cos 2t dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\cos 2t + \cos(2+2)t + \cos(2-2)t]dt\right) =$$

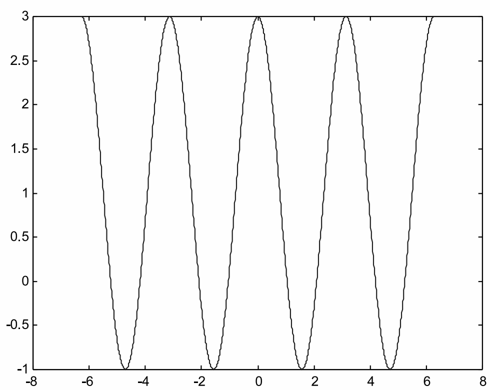
$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin 4t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} + [t]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(0+0+2\pi) = 2$$

$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos 2t)\sin kt dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\sin kt + \sin(2+k)t + \sin(k-2)t]dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-\cos kt}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{\cos(2+k)t}{2+k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{\cos(k-2)t}{k-2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(0+0+0) = 0$$

Výpočet má smysl pro $k \neq 2$, ale pro $k = 2$ bude třetí člen v integrálu roven nule a dostaneme tedy stejný výsledek.





Příklad 43003 Funkce $f = f(t)$ je dána předpisem

$$f(t) = 2 + 4\sin 4t, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Proveďte přímé periodické rozšíření a nakreslete graf výsledné funkce na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Rozviňte funkci ve Fourierovu řadu tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

Nakreslete graf součtové funkce (pokud existuje) této řady na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Řešení 43003 Díky znalostem získaných z předmětu ME4 by mělo být ihned zřejmé, že $a_k = \begin{cases} 4, & \text{pro } k = 0 \\ 0, & \text{pro } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$ a $b_k = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 1, 2, 3 \\ 4, & \text{pro } k = 4 \\ 0, & \text{pro } k = 5, 6, \ldots \end{cases}$

Ověřme výpočtem:

$T = 2\pi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2+4\sin 4t)dt = \frac{1}{\pi}\left(2\left[t\right]_{-\pi}^{\pi} + 4\left[-\frac{\cos 4t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(4\pi+0) = 4$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2+4\sin 4t)\cos kt dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[2\cos kt + 2\sin(4+k)t + 2\sin(4-k)t]dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\left[\frac{\sin kt}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[-\frac{\cos(4+k)t}{4+k}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[-\frac{\cos(4-k)t}{4-k}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(0+0+0) = 0$$

Výpočet má smysl pro $k \neq 4$, ale pro $k = 4$ bude třetí člen v integrálu roven nule a dostaneme tedy stejný výsledek.

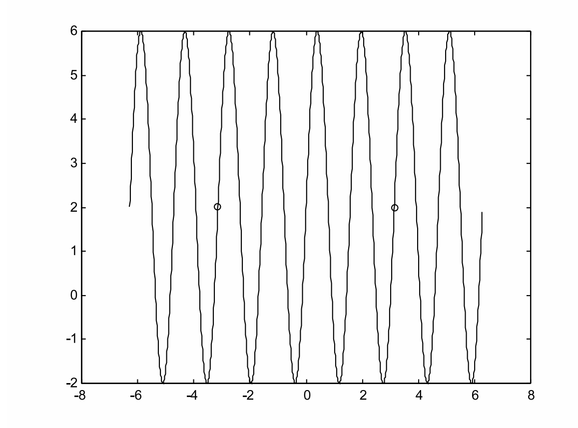
$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2+4\sin 4t)\sin kt dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[2\sin kt + 2\cos(4-k)t - 2\cos(4+k)t]dt\right) =$$

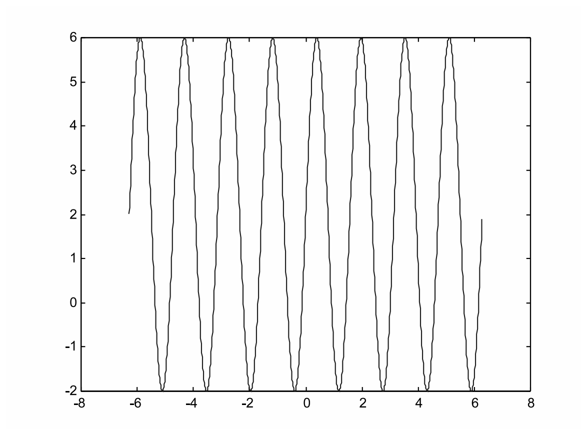
$$= \frac{1}{\pi}\left(2\left[\frac{-\cos kt}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[\frac{\sin(4-k)t}{4-k}\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\left[\frac{\sin(4+k)t}{4+k}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(0+0-0) = 0$$

Výpočet má smysl pro $k \neq 4$, ale pro $k = 4$ dostaneme:

$$b_4 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2+4\sin 4t)\sin 4t dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[2\sin 4t + 2\cos(4-4)t - 2\cos(4+4)t]dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\left[\frac{-\cos 4t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[t\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\left[\frac{\sin 8t}{8}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(0+4\pi-0) = 4$$





Příklad 43004 Funkce $f = f(t)$ je dána předpisem

$$f(t) = 2 + 4\cos 4t, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Proveďte přímé periodické rozšíření a nakreslete graf výsledné funkce na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Rozviňte funkci ve Fourierovu řadu tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

Nakreslete graf součtové funkce (pokud existuje) této řady na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Řešení 43004 Díky znalostem získaných z předmětu ME4 by mělo být ihned zřejmé, že

$$a_k = \begin{cases} 4, & \text{pro } k = 0 \\ 0, & \text{pro } k = 1, 2, 3 \\ 4, & \text{pro } k = 4 \\ 0, & \text{pro } k = 5, 6, \ldots \end{cases} \quad \text{a } b_k = 0, \text{ pro } k = 1, 2, \ldots$$

Ověřme výpočtem:
$T = 2\pi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2+4\cos 4t)dt = \frac{1}{\pi}\left(2\,[t]_{-\pi}^{\pi} + 4\left[\frac{\sin 4t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(4\pi+0) = 4$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2+4\cos 4t)\cos kt dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[2\cos kt + 2\cos(4+k)t + 2\cos(4-k)t]dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\left[\frac{\sin kt}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[\frac{\sin(4+k)t}{4+k}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[\frac{\sin(4-k)t}{4-k}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(0+0+0) = 0$$

Výpočet má smysl pro $k \neq 4$, ale pro $k = 4$ dostaneme:

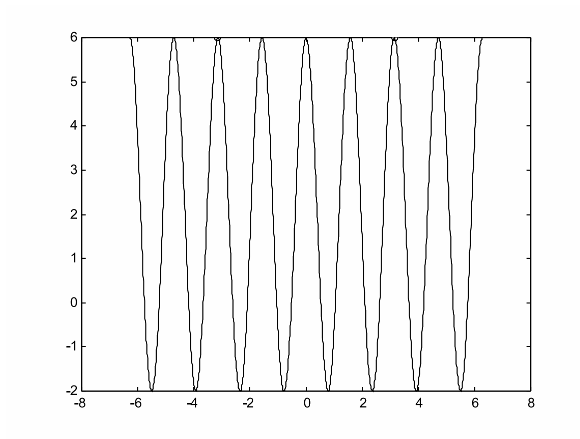
$$a_4 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2+4\cos 4t)\cos 4t dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[2\cos 4t + 2\cos(4+4)t + 2\cos(4-4)t]dt\right) =$$

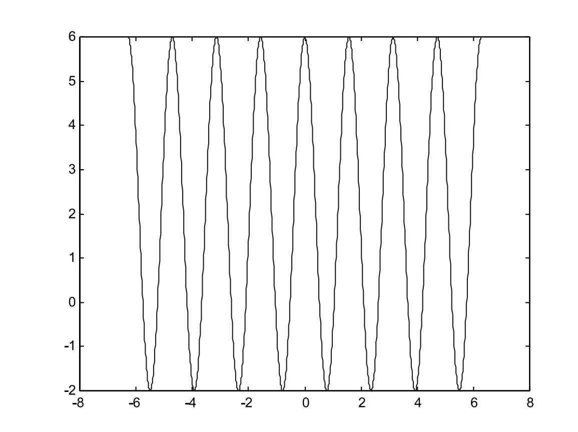
$$= \frac{1}{\pi}\left(2\left[\frac{\sin 4t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[\frac{\sin 8t}{8}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\,[t]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(0+0+4\pi) = 4$$

$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2+4\cos 4t)\sin kt dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[2\sin kt + 2\sin(4+k)t + 2\sin(k-4)t]dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\left[\frac{-\cos kt}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[-\frac{\cos(4+k)t}{4+k}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\left[-\frac{\cos(k-4)t}{k-4}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(0+0+0) = 0$$

Výpočet má smysl pro $k \neq 4$, ale pro $k = 4$ bude třetí člen v integrálu roven nule a dostaneme tedy stejný výsledek.

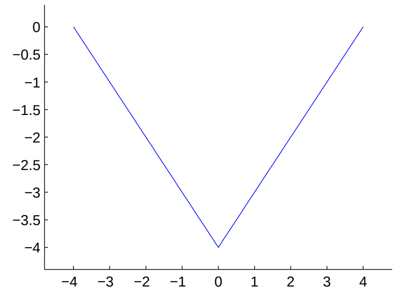




Příklad 50001 Nakreslete graf funkce $f = f(t)$ a vypočítejte její Fourierův obraz. Je funkce $f(t)$ Fourierovsky zobrazitelná?

$$f(t) = \begin{cases} |t| - 4, & |t| \leq 4 \\ 0, & |t| > 4. \end{cases}$$

Řešení 50001



$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-4}^{0} -(t+4)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{4} (t-4)e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$\left(\int te^{-i\omega t}\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-i\omega t} & v = -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t} \end{array} \right| = -\frac{t}{i\omega}e^{-i\omega t} - \frac{1}{(i\omega)^2}e^{-i\omega t} = \frac{1+i\omega t}{\omega^2}e^{-i\omega t}\right)$$

$$= -[\frac{1+i\omega t}{\omega^2}e^{-i\omega t}]_{-4}^{0} - 4[-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}]_{-4}^{0} + [\frac{1+i\omega t}{\omega^2}e^{-i\omega t}]_{0}^{4} - 4[-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}]_{0}^{4} =$$

$$= -(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1-i\omega 4}{\omega^2}e^{4i\omega}) - 4(-\frac{1}{i\omega} + \frac{1}{i\omega}e^{4i\omega}) + (\frac{1+i\omega 4}{\omega^2}e^{-4i\omega} - \frac{1}{\omega^2}) - 4(-\frac{1}{i\omega}e^{-4i\omega} + \frac{1}{i\omega}) =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(-2 + e^{4i\omega} + e^{-4i\omega}\right) = 2\frac{\cos(4\omega) - 1}{\omega^2}$$

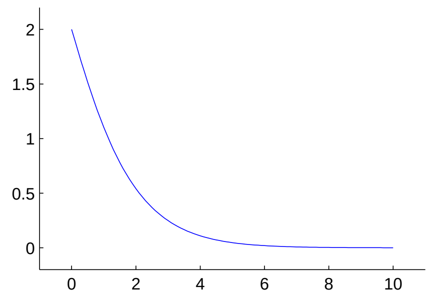
Je funkce $f(t)$ je Fourierovsky zobrazitelná, protože

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = 16 < \infty \qquad \text{(viz obrázek).}$$

Příklad 50002 Nakreslete graf funkce $f = f(t)$ a vypočítejte její Fourierův obraz. Je funkce $f(t)$ Fourierovsky zobrazitelná?

$$f(t) = \begin{cases} (t+2)e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Řešení 50002



$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} (t+2)e^{-(i\omega+1)t}\, dt =$$

$$\left(\int te^{-at}\, dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-at} & v = -\frac{1}{a}e^{-at} \end{array} \right| = -\frac{t}{a}e^{-at} - \frac{1}{a^2}e^{-at}\right)$$

$$= [-\frac{t}{(i\omega+1)}e^{-(i\omega+1)t} - \frac{1}{(i\omega+1)^2}e^{-(i\omega+1)t}]_0^{\infty} + 2[-\frac{1}{i\omega+1}e^{-(i\omega+1)t}]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{(i\omega+1)^2} + 2\frac{1}{i\omega+1} = \frac{3+2i\omega}{(i\omega+1)^2}$$

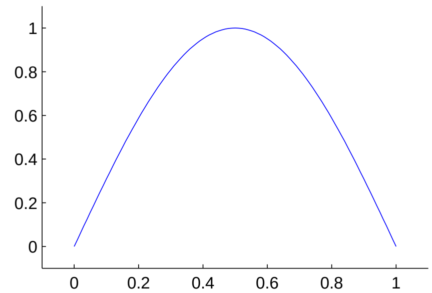
Je funkce $f(t)$ je Fourierovsky zobrazitelná, protože

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (t+2)e^{-t}\, dt = [-te^{-t} - 3e^{-t}]_0^{\infty} = 3 < \infty$$

Příklad 50003 Nakreslete graf funkce $f = f(t)$ a vypočítejte její Fourierův obraz. Je funkce $f(t)$ Fourierovsky zobrazitelná?

$$f(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & t \in (0,1) \\ 0, & t \notin (0,1) \end{cases}$$

Řešení 50003



$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^1 \sin(\pi t) e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$\Bigg(\underbrace{\int \sin at\, e^{-bt}\, dt}_{=I} = \left| \begin{array}{ll} u = \sin at & u' = a\cos at \\ v' = e^{-bt} & v = -\frac{1}{b} e^{-bt} \end{array} \right| = -\frac{1}{b} \sin at\, e^{-bt} + \frac{a}{b} \int \cos at\, e^{-bt}\, dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \cos at & u' = -a\sin at \\ v' = e^{-bt} & v = -\frac{1}{b} e^{-bt} \end{array} \right| = -\frac{1}{b} \sin at\, e^{-bt} + \frac{a}{b} \left(-\frac{1}{b} \cos at\, e^{-bt} - \frac{a}{b} \underbrace{\int \sin at\, e^{-bt}\, dt}_{=I} \right)$$

$$I = -\frac{1}{b} \sin at\, e^{-bt} - \frac{a}{b^2} \cos at\, e^{-bt} - \frac{a^2}{b^2} I$$

$$(a^2 + b^2) I = -b \sin at\, e^{-bt} - a \cos at\, e^{-bt}$$

$$I = -\frac{e^{-bt}}{a^2 + b^2} (b \sin at + a \cos at) \Bigg)$$

$$= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{\pi^2 + (i\omega)^2} (i\omega \sin \pi t + \pi \cos \pi t) \right]_0^1 = \frac{\pi (e^{-i\omega} + 1)}{\pi^2 - \omega^2}$$

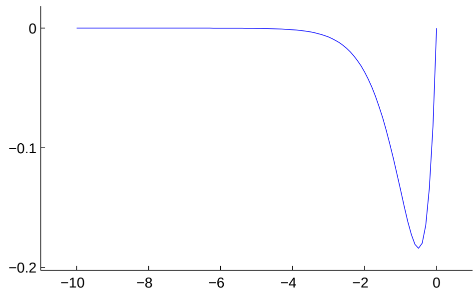
Je funkce $f(t)$ je Fourierovsky zobrazitelná, protože

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \int_0^1 \sin \pi t\, dt = [-\frac{1}{\pi} \cos \pi t]_0^1 = \frac{2}{\pi} < \infty \qquad \text{(viz obrázek).}$$

Příklad 50004 Nakreslete graf funkce $f = f(t)$ a vypočítejte její Fourierův obraz. Je funkce $f(t)$ Fourierovsky zobrazitelná?

$$f(t) = \begin{cases} te^{2t}, & t \in (-\infty, 0) \\ 0, & t \in \langle 0, \infty) \end{cases}$$

Řešení 50004



$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} te^{-(i\omega-2)t}\,dt =$$

$$\left(\int te^{-at}\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-at} & v = -\frac{1}{a}e^{-at} \end{array} \right| = -\frac{t}{a}e^{-at} - \frac{1}{a^2}e^{-at} \right)$$

$$= \left[-\frac{t}{(i\omega - 2)}e^{-(i\omega-2)t} - \frac{1}{(i\omega-2)^2}e^{-(i\omega-2)t} \right]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{(i\omega-2)^2}$$

Je funkce $f(t)$ je Fourierovsky zobrazitelná, protože

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{0} -te^{2t}\,dt = [-\frac{t}{2}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4} < \infty$$

Příklad 51001 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$.

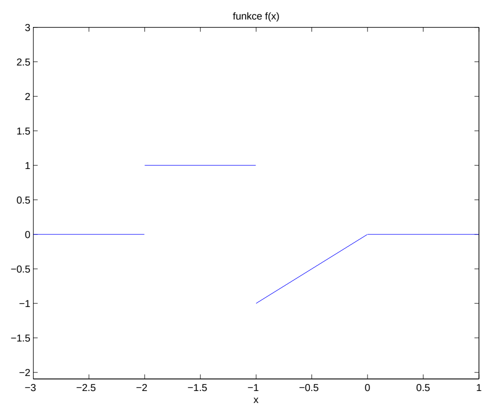
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2, -1) \\ x, & x \in (-1, 0) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51001 $F(\omega) = \int_{-2}^{-1} e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} x e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_{-1}^{0} =$

$= -\frac{\mathrm{i}\left(-e^{\mathrm{i}\omega}+e^{2\,\mathrm{i}\omega}\right)}{\omega} + \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{1-e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$

$= \frac{2\,\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}\omega e^{2\,\mathrm{i}\omega} + 1 - e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51002 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$.

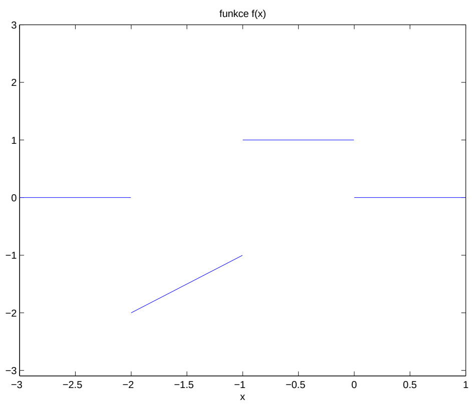
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-2, -1) \\ 1, & x \in (-1, 0) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51002 $F(\omega) = \int_{-2}^{-1} x e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega}+2\,\mathrm{i}e^{2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{e^{\mathrm{i}\omega}-e^{2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}}{\omega} - \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega} =$

$= \frac{-2\,\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega}+e^{\mathrm{i}\omega}+2\,\mathrm{i}\omega e^{2\,\mathrm{i}\omega}-e^{2\,\mathrm{i}\omega}+\mathrm{i}\omega}{\omega^2}$



Příklad 51003 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$.

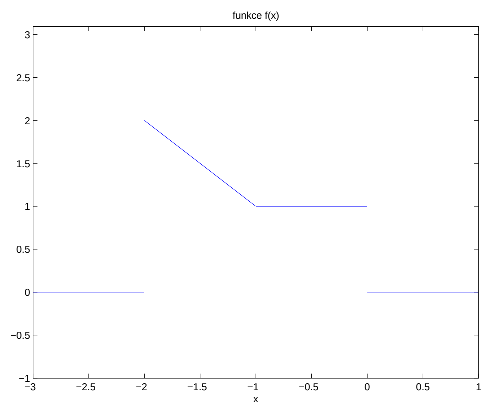
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-2,-1) \\ 1, & x \in (-1,0) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51003 $F(\omega) = \int_{-2}^{-1} -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_{-1}^{0} =$

$= \frac{\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega} - e^{\mathrm{i}\omega} - 2\,\mathrm{i}\omega e^{2\,\mathrm{i}\omega} + e^{2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}}{\omega} - \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega} =$

$= -\frac{e^{\mathrm{i}\omega} + 2\,\mathrm{i}\omega e^{2\,\mathrm{i}\omega} - e^{2\,\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}\omega}{\omega^2}$



Příklad 51004 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$.

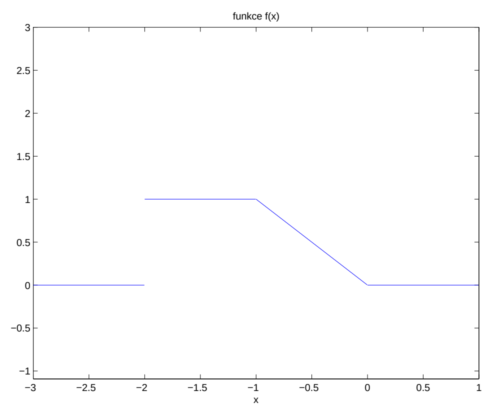
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2, -1) \\ -x, & x \in (-1, 0) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51004 $F(\omega) = \int_{-2}^{-1} e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} -x e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_{-1}^{0} =$

$= -\frac{\mathrm{i}\left(-e^{\mathrm{i}\omega}+e^{2\,\mathrm{i}\omega}\right)}{\omega} - \frac{1+\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega}-e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$

$= -\frac{\mathrm{i}\omega e^{2\,\mathrm{i}\omega}+1-e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51005 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.

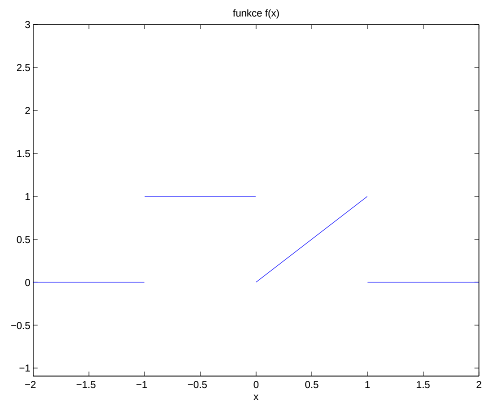
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 0) \\ x, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51005 $F(\omega) = \int_{-1}^{0} e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_{0}^{1} =$

$= \frac{\mathrm{i}}{\omega} - \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{e^{-\mathrm{i}\omega}-1}{\omega^2} =$

$= \frac{\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega} + \mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}\omega} - 1}{\omega^2}$



Příklad 51006 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.

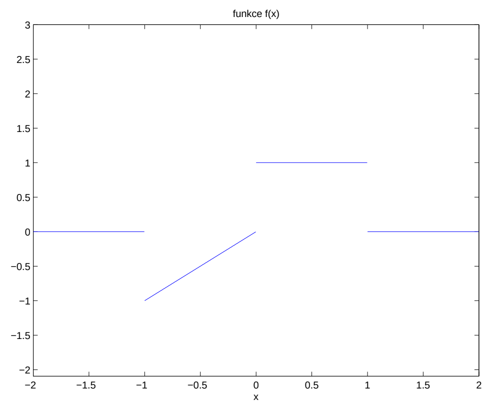
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51006 $F(\omega) = \int_{-1}^{0} x e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x + \int_0^1 e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x + 1)}{\omega^2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_0^1 =$

$= \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{1 - e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega}} - \frac{\mathrm{i}}{\omega} =$

$= \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega} + \mathrm{i}\left(e^{-\mathrm{i}\omega} - 1\right)}{\omega} + \frac{1 - e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51007 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.

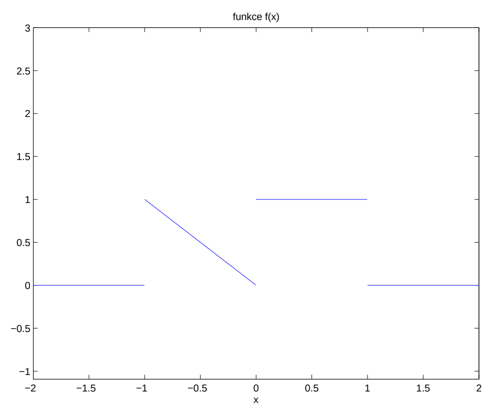
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-1,0) \\ 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51007 $F(\omega) = \int_{-1}^{0} -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_0^1 =$

$= -\frac{1+\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega} - e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega}} - \frac{\mathrm{i}}{\omega} =$

$= -\frac{1+\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega} - e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}\left(e^{-\mathrm{i}\omega}-1\right)}{\omega}$



Příklad 51008 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.

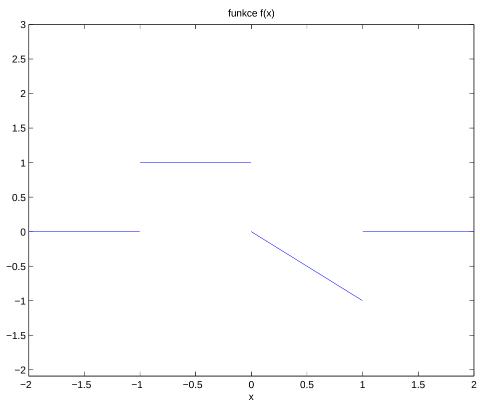
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1,0) \\ -x, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51008 $F(\omega) = \int_{-1}^{0} e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_{0}^{1} =$

$= \frac{\mathrm{i}}{\omega} - \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega}}{\omega} - \frac{\mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega}+e^{-\mathrm{i}\omega}-1}{\omega^2} =$

$= \frac{\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega}-\mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega}-e^{-\mathrm{i}\omega}+1}{\omega^2}$



Příklad 51009 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -1, 3\rangle$.

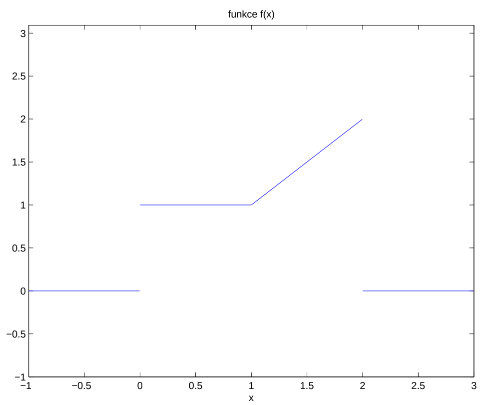
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ x, & x \in (1,2) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51009 $F(\omega) = \int_0^1 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_1^2 xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_1^2 =$

$= \frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega}} - \frac{\mathrm{i}}{\omega} + \frac{2\,\mathrm{i}e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$

$= \frac{-\mathrm{i}\omega + 2\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} + e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51010 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -1, 3\rangle$.

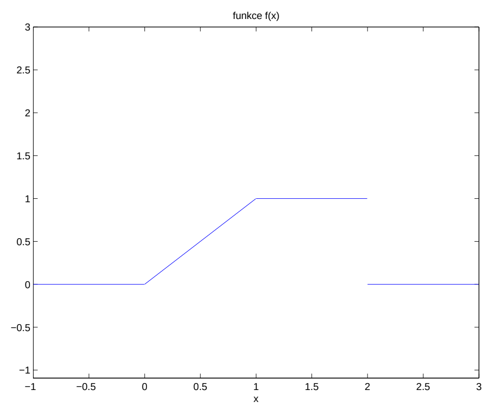
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \in (1,2) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51010 $F(\omega) = \int_0^1 x e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x + \int_1^2 e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_0^1 + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_1^2 =$

$= \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{e^{-\mathrm{i}\omega}-1}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}}{\omega (e^{\mathrm{i}\omega})^2} - \frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega}} =$

$= \frac{e^{-\mathrm{i}\omega}-1+\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51011 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -1, 3\rangle$.

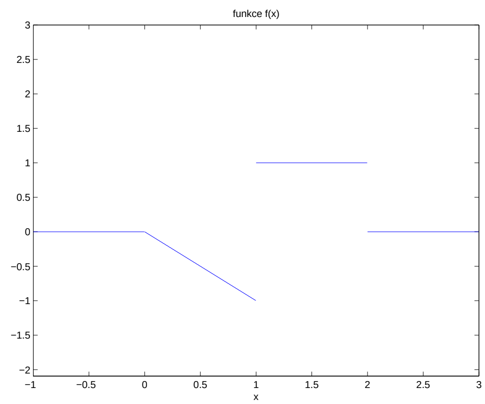
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \in (1,2) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51011 $F(\omega) = \int_0^1 -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_1^2 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_0^1 + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_1^2 =$

$= -\frac{\mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega}+e^{-\mathrm{i}\omega}-1}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}}{\omega (e^{\mathrm{i}\omega})^2} - \frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega}} =$

$= -\frac{2\,\mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega}+e^{-\mathrm{i}\omega}-1-\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51012 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle -1, 3\rangle$.

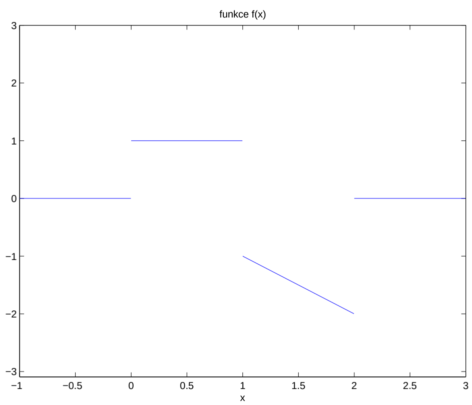
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ -x, & x \in (1,2) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51012 $F(\omega) = \int_0^1 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_1^2 -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_0^1 + \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_1^2 =$

$= \frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega}} - \frac{\mathrm{i}}{\omega} + \frac{-2\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega} + \mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$

$= \frac{2\,\mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}\omega - 2\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51013 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

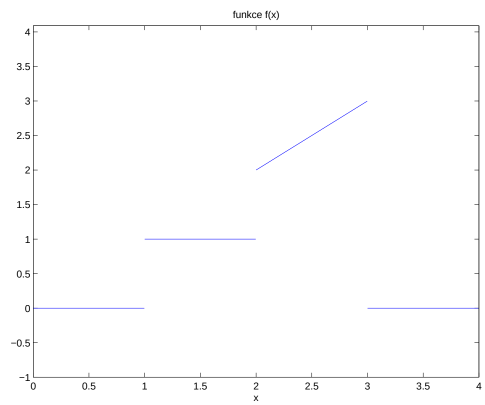
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1,2) \\ x, & x \in (2,3) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51013 $F(\omega) = \int_1^2 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_2^3 x e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_1^2 + \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_2^3 =$

$= \frac{\mathrm{i}\left(e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-\mathrm{i}\omega}\right)}{\omega} + \frac{3\,\mathrm{i}e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - 2\,\mathrm{i}e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$

$= -\frac{\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} + \mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega} - 3\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - e^{-3\,\mathrm{i}\omega} + e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51014 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

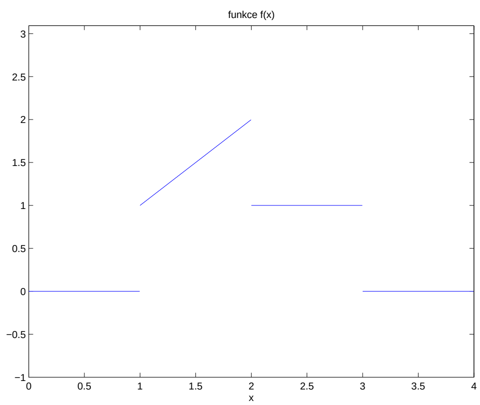
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (1,2) \\ 1, & x \in (2,3) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51014 $F(\omega) = \int_1^2 x e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x + \int_2^3 e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_1^2 + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_2^3 =$

$= \frac{2\,\mathrm{i}e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}\left(e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega}\right)}{\omega} =$

$= \frac{\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} + e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega} - e^{-\mathrm{i}\omega} + \mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51015 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

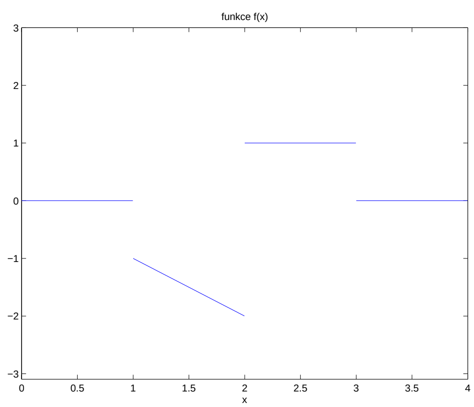
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (1,2) \\ 1, & x \in (2,3) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51015 $F(\omega) = \int_1^2 -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_2^3 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_1^2 + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_2^3 =$

$= \frac{-2\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega} + \mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}\left(e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega}\right)}{\omega} =$

$= \frac{-3\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega} + \mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega} + e^{-\mathrm{i}\omega} + \mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51016 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

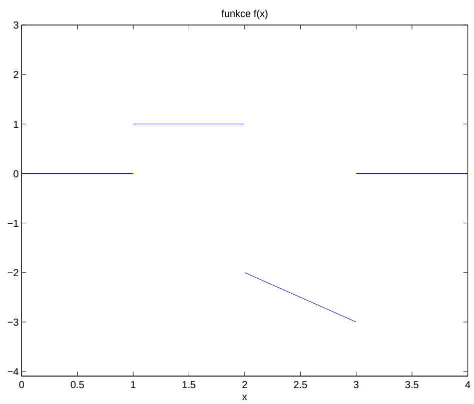
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1,2) \\ -x, & x \in (2,3) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51016 $F(\omega) = \int_1^2 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_2^3 -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_1^2 + \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_2^3 =$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{\omega (e^{\mathrm{i}\omega})^2} - \frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega}} - \frac{3\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega} + e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - 2\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$$

$$= \frac{3\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega} - 3\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - e^{-3\,\mathrm{i}\omega} + e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$$



Příklad 51017 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 1, 5\rangle$.

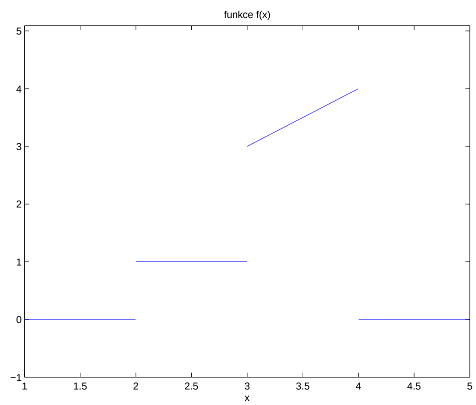
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (2,3) \\ x, & x \in (3,4) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51017 $F(\omega) = \int_2^3 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_3^4 xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_2^3 + \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_3^4 =$

$= \frac{\mathrm{i}\left(e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega}\right)}{\omega} + \frac{4\,\mathrm{i}e^{-4\,\mathrm{i}\omega} - 3\,\mathrm{i}e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{e^{-4\,\mathrm{i}\omega} - e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$

$= \frac{-2\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} + 4\,\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega} + e^{-4\,\mathrm{i}\omega} - e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51018 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 1,5\rangle$.

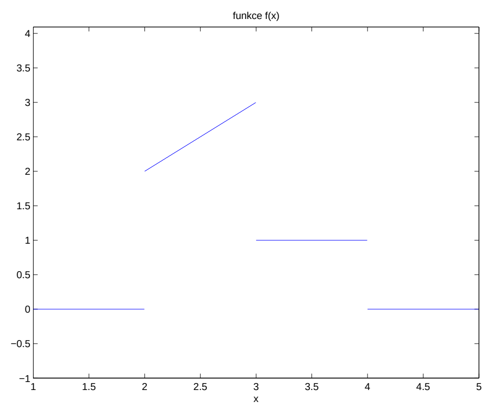
$$f(x) = \begin{cases} x, & x\in(2,3) \\ 1, & x\in(3,4) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51018 $F(\omega)=\int_2^3 x e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x+\int_3^4 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=$

$= \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_2^3+\left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_3^4=$

$= \frac{3\,\mathrm{i}e^{-3\,\mathrm{i}\omega}-2\,\mathrm{i}e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega}+\frac{e^{-3\,\mathrm{i}\omega}-e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}+\frac{\mathrm{i}}{\omega(e^{\mathrm{i}\omega})^4}-\frac{\mathrm{i}}{\omega(e^{\mathrm{i}\omega})^3}=$

$= \frac{2\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega}+e^{-3\,\mathrm{i}\omega}-2\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega}-e^{-2\,\mathrm{i}\omega}+\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51019 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 1, 5 \rangle$.

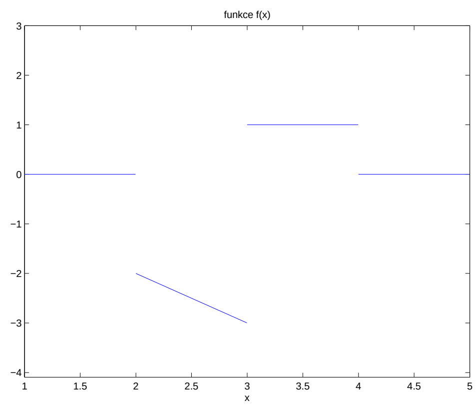
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (2,3) \\ 1, & x \in (3,4) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51019 $F(\omega) = \int_2^3 -xe^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x + \int_3^4 e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2} \right]_2^3 + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}} \right]_3^4 =$

$= -\frac{3\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega} + e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - 2\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}\left(e^{-4\,\mathrm{i}\omega} - e^{-3\,\mathrm{i}\omega}\right)}{\omega} =$

$= -\frac{4\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega} + e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - 2\,\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - e^{-2\,\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51020 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 1,5\rangle$.

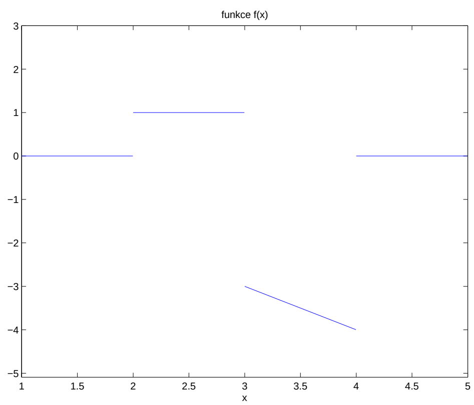
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (2,3) \\ -x, & x \in (3,4) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51020 $F(\omega) = \int_2^3 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_3^4 -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_2^3 + \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_3^4 =$

$= \frac{\mathrm{i}\left(e^{-3\,\mathrm{i}\omega}-e^{-2\,\mathrm{i}\omega}\right)}{\omega} + \frac{-4\,\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega}-e^{-4\,\mathrm{i}\omega}+3\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega}+e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$

$= \frac{4\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega}-\mathrm{i}\omega e^{-2\,\mathrm{i}\omega}-4\,\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega}-e^{-4\,\mathrm{i}\omega}+e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51021 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 2, 6\rangle$.

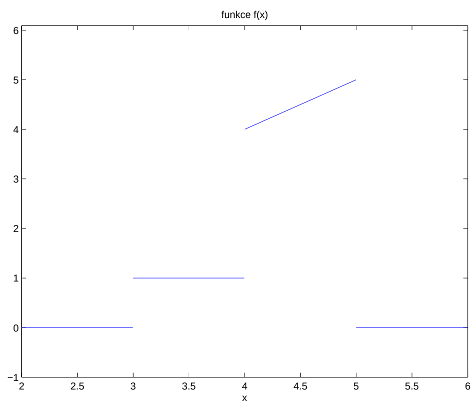
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (3,4) \\ x, & x \in (4,5) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51021 $F(\omega) = \int_3^4 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_4^5 x e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_3^4 + \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_4^5 =$

$= \frac{\mathrm{i}\left(e^{-4\,\mathrm{i}\omega}-e^{-3\,\mathrm{i}\omega}\right)}{\omega} + \frac{5\,\mathrm{i}e^{-5\,\mathrm{i}\omega}-4\,\mathrm{i}e^{-4\,\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{e^{-5\,\mathrm{i}\omega}-e^{-4\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$

$= \frac{-3\,\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega}-\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega}+5\,\mathrm{i}\omega e^{-5\,\mathrm{i}\omega}+e^{-5\,\mathrm{i}\omega}-e^{-4\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51022 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 2,6\rangle$.

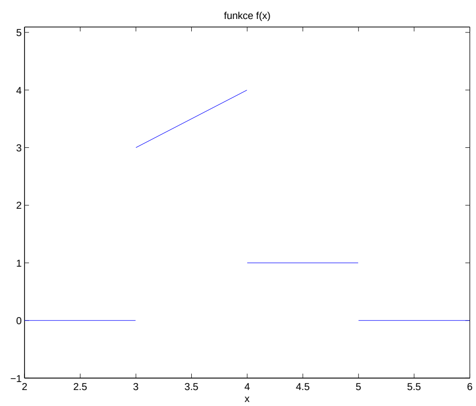
$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(3,4)\\ 1, & x\in(4,5)\\ 0, & \text{jinde}\end{cases}$$

Řešení 51022 $F(\omega)=\int_3^4 xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x+\int_4^5 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=$

$=\left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_3^4+\left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_4^5=$

$=\frac{4\,\mathrm{i}e^{-4\,\mathrm{i}\omega}-3\,\mathrm{i}e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega}+\frac{e^{-4\,\mathrm{i}\omega}-e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}+\frac{\mathrm{i}}{\omega(e^{\mathrm{i}\omega})^5}-\frac{\mathrm{i}}{\omega(e^{\mathrm{i}\omega})^4}=$

$=\frac{3\,\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega}+e^{-4\,\mathrm{i}\omega}-3\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega}-e^{-3\,\mathrm{i}\omega}+\mathrm{i}\omega e^{-5\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51023 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 2, 6\rangle$.

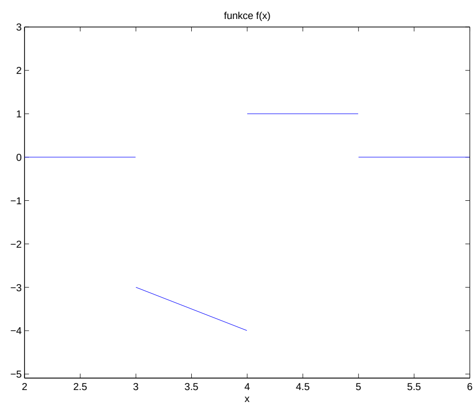
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (3,4) \\ 1, & x \in (4,5) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51023 $F(\omega) = \int_3^4 -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_4^5 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_3^4 + \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_4^5 =$

$= -\frac{4\,\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega}+e^{-4\,\mathrm{i}\omega}-3\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega}-e^{-3\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} + \frac{\mathrm{i}}{\omega(e^{\mathrm{i}\omega})^5} - \frac{\mathrm{i}}{\omega(e^{\mathrm{i}\omega})^4} =$

$= \frac{-5\,\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega}-e^{-4\,\mathrm{i}\omega}+3\,\mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega}+e^{-3\,\mathrm{i}\omega}+\mathrm{i}\omega e^{-5\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$



Příklad 51024 Vypočtěte Fourierův obraz funkce $f(x)$ a načrtněte graf $f(x)$ na intervalu $\langle 2, 6\rangle$.

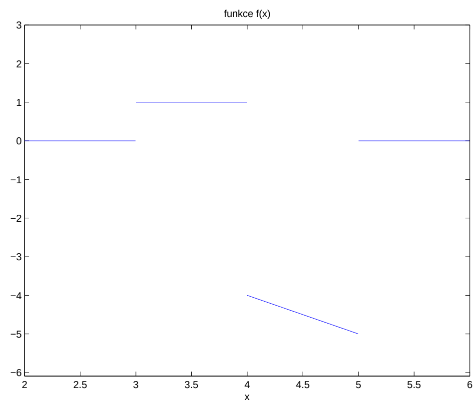
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (3,4) \\ -x, & x \in (4,5) \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

Řešení 51024 $F(\omega) = \int_3^4 e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x + \int_4^5 -xe^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega e^{\mathrm{i}\omega x}}\right]_3^4 + \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}(\mathrm{i}\omega x+1)}{\omega^2}\right]_4^5 =$

$= \frac{\mathrm{i}}{\omega(e^{\mathrm{i}\omega})^4} - \frac{\mathrm{i}}{\omega(e^{\mathrm{i}\omega})^3} + \frac{-5\,\mathrm{i}\omega e^{-5\,\mathrm{i}\omega} - e^{-5\,\mathrm{i}\omega} + 4\,\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega} + e^{-4\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} =$

$= \frac{5\,\mathrm{i}\omega e^{-4\,\mathrm{i}\omega} - \mathrm{i}\omega e^{-3\,\mathrm{i}\omega} - 5\,\mathrm{i}\omega e^{-5\,\mathrm{i}\omega} - e^{-5\,\mathrm{i}\omega} + e^{-4\,\mathrm{i}\omega}}{\omega^2}$

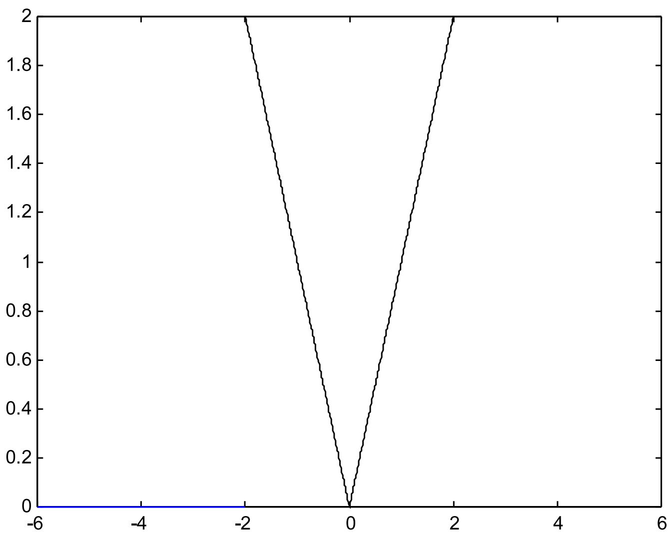


Příklad 53001 Mějme dánu funkci $f = f(t)$ předpisem

$$f(t) = \begin{cases} |t|, & t \in (-2,2) \\ 0, & t \notin (-2,2). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f a zjistěte, zda je Fourierovsky zobrazitelná. Jesliže ano, vypočítejte její Fourierův obraz.

Řešení 53001



Funkce $f(t)$ je Fourierovsky zobrazitelná, neboť je po částech spojitá, má po částech spojitou derivaci a navíc je absolutně integrovatelná, neboť platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = 4 < \infty \quad \text{(viz obrázek).}$$

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-2}^{0} -te^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{2} te^{-i\omega t}\,dt =$$

$$\left(\int te^{-i\omega t}\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-i\omega t} & v = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \end{array} \right| = -\frac{t}{i\omega} e^{-i\omega t} - \frac{1}{(i\omega)^2} e^{-i\omega t} = \frac{1 + i\omega t}{\omega^2} e^{-i\omega t} \right)$$

$$= -\left[\frac{1 + i\omega t}{\omega^2} e^{-i\omega t} \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1 + i\omega t}{\omega^2} e^{-i\omega t} \right]_{0}^{2} =$$

$$= -\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1 - 2i\omega}{\omega^2} e^{2i\omega} \right) + \left(\frac{1 + 2i\omega}{\omega^2} e^{-2i\omega} - \frac{1}{\omega^2} \right) =$$

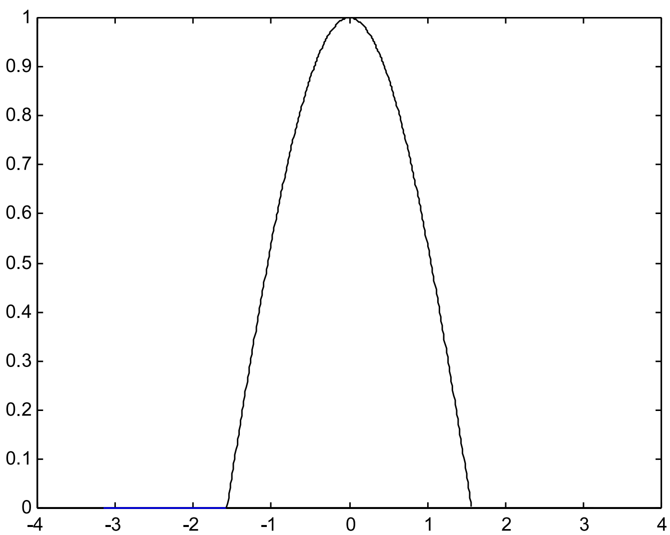
$$= \frac{1}{\omega^2} \left(-2 + (e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}) - 2i\omega(e^{2i\omega} - e^{2i\omega}) \right) = 2\frac{\cos 2\omega + 2\omega \sin 2\omega - 1}{\omega^2}$$

Příklad 53002 Mějme dánu funkci $f = f(t)$ předpisem

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & t \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f a zjistěte, zda je Fourierovsky zobrazitelná. Jestliže ano, vypočítejte její Fourierův obraz.

Řešení 53002



Funkce $f(t)$ je Fourierovsky zobrazitelná, neboť je po částech spojitá, má po částech spojitou derivaci a navíc je absolutně integrovatelná, neboť platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 < \infty \quad \text{(viz obrázek).}$$

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$\Bigg(\underbrace{\int \cos t\, e^{-bt}\, dt}_{=I} = \left| \begin{array}{ll} u = \cos t & u' = -\sin t \\ v' = e^{-bt} & v = -\frac{1}{b} e^{-bt} \end{array} \right| = -\frac{1}{b} \cos t\, e^{-bt} - \frac{1}{b} \int \sin t\, e^{-bt}\, dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sin t & u' = \cos t \\ v' = e^{-bt} & v = -\frac{1}{b} e^{-bt} \end{array} \right| = -\frac{1}{b} \cos t\, e^{-bt} - \frac{1}{b} \left(-\frac{1}{b} \sin t\, e^{-bt} + \frac{1}{b} \underbrace{\int \cos t\, e^{-bt}\, dt}_{=I} \right)$$

$$I = -\frac{1}{b} \cos t\, e^{-bt} + \frac{1}{b^2} \sin t\, e^{-bt} - \frac{1}{b^2} I$$

$$(1+b^2)I = -b\cos t\, e^{-bt} + \sin t\, e^{-bt}$$

$$I = -\frac{e^{-bt}}{1+b^2}(b\cos t - \sin t)\Big)$$

$$= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{1+(i\omega)^2}(i\omega\cos t - \sin t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

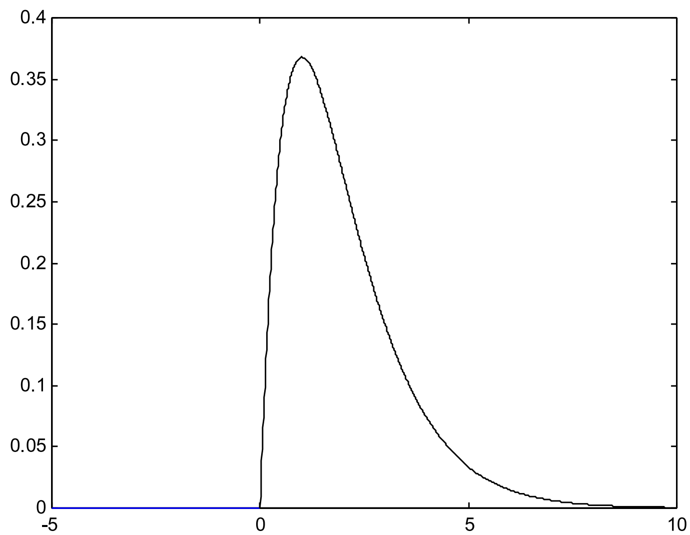
$$= \left(\frac{e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}}{1-\omega^2} + \frac{e^{i\omega\frac{\pi}{2}}}{1-\omega^2}\right) = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\omega^2}.$$

Příklad 53003 Mějme dánu funkci $f = f(t)$ předpisem

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t \in (0, +\infty) \\ 0, & t \notin (0, +\infty). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f a zjistěte, zda je Fourierovsky zobrazitelná. Jesliže ano, vypočítejte její Fourierův obraz.

Řešení 53003



Funkce $f(t)$ je Fourierovsky zobrazitelná, neboť je po částech spojitá, má po částech spojitou derivaci a navíc je absolutně integrovatelná, neboť platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-t}\, dt = [-te^{-t} - e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 < \infty \qquad \text{(viz obrázek).}$$

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} te^{-(i\omega+1)t}\, dt =$$

$$\left(\int te^{-at}\, dt = \begin{vmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-at} & v = -\frac{1}{a}e^{-at} \end{vmatrix} = -\frac{t}{a}e^{-at} - \frac{1}{a^2}e^{-at} \right)$$

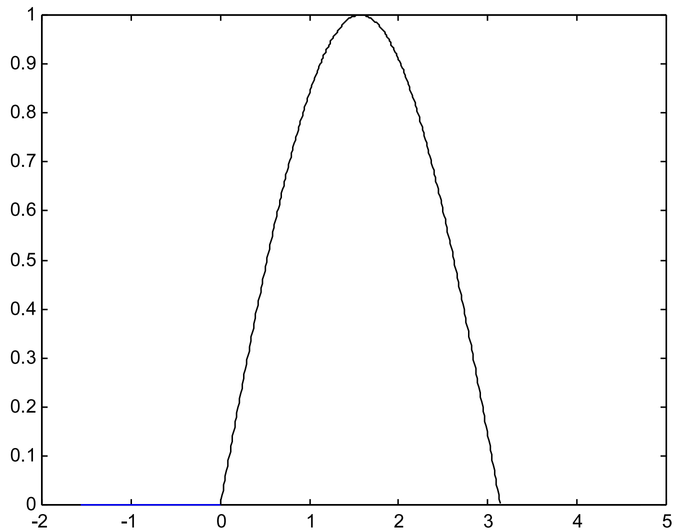
$$= \left[-\frac{t}{(i\omega+1)}e^{-(i\omega+1)t} - \frac{1}{(i\omega+1)^2}e^{-(i\omega+1)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{(i\omega+1)^2}.$$

Příklad 53004 Mějme dánu funkci $f = f(t)$ předpisem

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in (0, \pi) \\ 0, & t \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Nakreslete graf funkce f a zjistěte, zda je Fourierovsky zobrazitelná. Jesliže ano, vypočítejte její Fourierův obraz.

Řešení 53004



Funkce $f(t)$ je Fourierovsky zobrazitelná, neboť je po částech spojitá, má po částech spojitou derivaci a navíc je absolutně integrovatelná, neboť platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = [-\cos t]_0^{\pi} = 2 < \infty \qquad \text{(viz obrázek).}$$

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{\pi} \sin(t) e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$\left(\underbrace{\int \sin t\, e^{-bt}\, dt}_{=I} = \left| \begin{array}{ll} u = \sin t & u' = \cos t \\ v' = e^{-bt} & v = -\frac{1}{b} e^{-bt} \end{array} \right| = -\frac{1}{b} \sin t\, e^{-bt} + \frac{1}{b} \int \cos t\, e^{-bt}\, dt = \right.$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \cos t & u' = -\sin t \\ v' = e^{-bt} & v = -\frac{1}{b} e^{-bt} \end{array} \right| = -\frac{1}{b} \sin t\, e^{-bt} + \frac{1}{b} \left(-\frac{1}{b} \cos t\, e^{-bt} - \frac{1}{b} \underbrace{\int \sin t\, e^{-bt}\, dt}_{=I} \right)$$

$$I = -\frac{1}{b} \sin t\, e^{-bt} - \frac{1}{b^2} \cos t\, e^{-bt} - \frac{1}{b^2} I$$

$$(1+b^2)I = -b\sin t\, e^{-bt} - \cos t\, e^{-bt}$$

$$I = -\frac{e^{-bt}}{1+b^2}(b\sin t + \cos t)\Big)$$

$$= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{1+(i\omega)^2}(i\omega\sin t + \cos t)\right]_0^\pi = \frac{(e^{-i\pi\omega}+1)}{1-\omega^2}$$

Příklad 60001 Pomocí Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu

$$y'' - 2y' + y = t^2 e^t, \quad y(0_+) = 0, \ \ y'(0_+) = 0.$$

Řešení 60001

$$p^2 Y(p) - 2pY(p) + Y(p) = \frac{2}{(p-1)^3}$$

$$(p^2 - 2p + 1)Y(p) = \frac{2}{(p-1)^3}$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p-1)^5}$$

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{12} t^4 e^t}$$

Příklad 60002 Pomocí Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu

$$y'' - 2y' - 3y = 16e^{3t}, \quad y(0_+) = 0, \;\; y'(0_+) = 0.$$

Řešení 60002

$$p^2Y(p) - 2pY(p) - 3Y(p) = \frac{16}{p-3}$$

$$Y(p) = \frac{16}{(p+1)(p-3)^2}$$

$$Y(p) = \frac{4}{(p-3)^2} - \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p+1}$$

$$\boxed{y(t) = 4te^{3t} - e^{3t} + e^{-t}}$$

Příklad 60003 Pomocí Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0_+) = 2, \;\; y'(0_+) = 0.$$

Řešení 60003

$$p^2Y(p) - 2p + 3[pY(p) - 2] + 2Y(p) = \frac{1}{p+1}$$

$$(p^2 + 3p + 2)Y(p) = \frac{1}{p+1} + 2p + 6 = \frac{2p^2 + 8p + 7}{p+1}$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 + 8p + 7}{(p+2)(p+1)^2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{3}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$\boxed{y(t) = te^{-t} + 3e^{-t} - e^{-2t}}$$

Příklad 60004 Pomocí Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}, \quad y(0_+) = 1, \ \ y'(0_+) = 1.$$

Řešení 60004

$$p^2Y(p) - p - 1 - 3[pY(p) - 1] + 2Y(p) = \frac{1}{p-2}$$

$$(p^2 - 3p + 2)Y(p) = \frac{1}{p-2} + p - 2 = \frac{p^2 - 4p + 5}{p-2}$$

$$Y(p) = \frac{p^2 - 4p + 5}{(p-1)(p-2)^2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p-1}$$

$$\boxed{y(t) = te^{2t} - e^{2t} + 2e^t}$$

Příklad 60005 Pomocí Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu

$$y'' + y = 3\sin 2t, \quad y(0_+) = 1, \;\; y'(0_+) = 0.$$

Řešení 60005

$$p^2Y(p) - p + Y(p) = \frac{3.2}{p^2+4}$$

$$(p^2+1)Y(p) = \frac{6}{p^2+4} + p$$

$$Y(p) = \frac{p^3+4p+6}{(p^2+4)(p^2+1)}$$

$$Y(p) = -\frac{2}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p^2+1}$$

$$\boxed{y(t) = -\sin 2t + \cos t + 2\sin t}$$

Příklad 61001 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$\frac{d}{dt}x(t) + x(t) = -2\,e^{t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61001 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$1(pX(p)+1) + 1X(p) = \frac{-2}{p-1}$
$X(p) = \frac{-1p-1}{(p-1)(p+1)} = \frac{-1}{p-1} + \frac{0}{p+1}$
$x(t) = -1\mathrm{e}^{1t} + 0\mathrm{e}^{-1t}$
Zkouka:
$x(0) = -1\mathrm{e}^{0} + 0\mathrm{e}^{0} = -1$
$x'(t) = -1\mathrm{e}^{1t} + 0\mathrm{e}^{-1t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $1(-1\mathrm{e}^{1t} + 0\mathrm{e}^{-1t}) + 1(-1\mathrm{e}^{1t} + 0\mathrm{e}^{-1t}) = -2\mathrm{e}^{1t}$
R= $-2\mathrm{e}^{1t}$, tj. L=R

Příklad 61002 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$\frac{d}{dt}x(t) - x(t) = e^t, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61002 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$1(pX(p)+1) - 1X(p) = \frac{1}{p-1}$
$X(p) = \frac{-1p+2}{(p-1)^2} = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{-1}{p-1}$
$x(t) = 1t\mathrm{e}^{1t} - 1\mathrm{e}^{1t} = \mathrm{e}^{1t}(-1+1t)$
Zkouka:
$x(0) = 1 * 0 * \mathrm{e}^0 - 1\mathrm{e}^0 = -1$
$x'(t) = 1t\mathrm{e}^{1t} + 1\mathrm{e}^{1t} - 1\mathrm{e}^{1t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $1(1t\mathrm{e}^{1t} + 1\mathrm{e}^{1t} - 1\mathrm{e}^{1t}) - 1(\mathrm{e}^{1t}(-1+1t)) = 1\mathrm{e}^{1t}$
R= $1\mathrm{e}^{1t}$, tj. L=R

Příklad 61003 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$\frac{d}{dt}x(t) - 2\,x(t) = 2\,t + 3, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61003 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$1(pX(p) + 1) - 2X(p) = \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p}$
$X(p) = \frac{2+3p-1p^2}{p^2(p-2)} = \frac{-1}{p^2} + \frac{-2}{p} + \frac{1}{p-2}$
$x(t) = -1t - 2 + 1\mathrm{e}^{2t}$
Zkouka:
$x(0) = 0 - 2 + 1\mathrm{e}^0 = -1$
$x'(t) = -1 + 2\mathrm{e}^{2t}$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 1(-1 + 2\mathrm{e}^{2t}) - 2(-1t - 2 + 1\mathrm{e}^{2t}) = 2t + 3$
R$= 2t + 3$, tj. L=R

Příklad 61004   Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$\frac{d}{dt}x(t) = -2\,t + 1, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61004   Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$1(pX(p) + 1) = \frac{-2}{p^2} + \frac{1}{p}$
$X(p) = \frac{-2+1p-1p^2}{p^3} = \frac{-2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{-1}{p}$
$x(t) = -1t^2 + 1t - 1$
Zkouka:
$x(0) = 0 + 0 - 1 = -1$
$x'(t) = -2t + 1$
Dosazení do původní rovnice:
L= $1(-2t + 1) = -2t + 1$
R= $-2t + 1$, tj. L=R

Příklad 61005 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$2\,\frac{d}{dt}x(t) + 2\,x(t) = -8\,e^{t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61005 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$2(pX(p)+1) + 2X(p) = \frac{-8}{p-1}$
$X(p) = \frac{-1p-3}{(p-1)(p+1)} = \frac{-2}{p-1} + \frac{1}{p+1}$
$x(t) = -2\mathrm{e}^{1t} + 1\mathrm{e}^{-1t}$
Zkouka:
$x(0) = -2\mathrm{e}^{0} + 1\mathrm{e}^{0} = -1$
$x'(t) = -2\mathrm{e}^{1t} - 1\mathrm{e}^{-1t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $2(-2\mathrm{e}^{1t} - 1\mathrm{e}^{-1t}) + 2(-2\mathrm{e}^{1t} + 1\mathrm{e}^{-1t}) = -8\mathrm{e}^{1t}$
R= $-8\mathrm{e}^{1t}$, tj. L=R

Příklad 61006 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$2\,\frac{d}{dt}x(t) - 4\,x(t) = 2\,e^{2\,t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61006 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$2(pX(p)+1) - 4X(p) = \frac{2}{p-2}$
$X(p) = \frac{-1p+3}{(p-2)^2} = \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{-1}{p-2}$
$x(t) = 1t\mathrm{e}^{2t} - 1\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t}(-1+1t)$
Zkouka:
$x(0) = 1 * 0 * \mathrm{e}^0 - 1\mathrm{e}^0 = -1$
$x'(t) = 2t\mathrm{e}^{2t} + 1\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{2t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $2(2t\mathrm{e}^{2t} + 1\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{2t}) - 4(\mathrm{e}^{2t}(-1+1t)) = 2\mathrm{e}^{2t}$
R= $2\mathrm{e}^{2t}$, tj. L=R

Příklad 61007 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$2\,\frac{d}{dt}x(t) - 4\,x(t) = 4\,t + 10, \quad x(0) = -2.$$

Řešení 61007 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$2(pX(p) + 2) - 4X(p) = \frac{4}{p^2} + \frac{10}{p}$
$X(p) = \frac{2+5p-2p^2}{p^2(p-2)} = \frac{-1}{p^2} + \frac{-3}{p} + \frac{1}{p-2}$
$x(t) = -1t - 3 + 1\mathrm{e}^{2t}$
Zkouka:
$x(0) = 0 - 3 + 1\mathrm{e}^{0} = -2$
$x'(t) = -1 + 2\mathrm{e}^{2t}$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 2(-1 + 2\mathrm{e}^{2t}) - 4(-1t - 3 + 1\mathrm{e}^{2t}) = 4t + 10$
R$= 4t + 10$, tj. L=R

Příklad 61008 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$\frac{d}{dt}x(t) = -4\,t + 2, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61008 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$1(pX(p) + 1) = \frac{-4}{p^2} + \frac{2}{p}$
$X(p) = \frac{-4+2p-1p^2}{p^3} = \frac{-4}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{-1}{p}$
$x(t) = -2t^2 + 2t - 1$
Zkouka:
$x(0) = 0 + 0 - 1 = -1$
$x'(t) = -4t + 2$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 1(-4t + 2) = -4t + 2$
R$= -4t + 2$, tj. L=R

Příklad 61009 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$3\,\frac{d}{dt}x(t) + 3\,x(t) = -18\,e^{t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61009 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$3(pX(p)+1)+3X(p) = \frac{-18}{p-1}$
$X(p) = \frac{-1p-5}{(p-1)(p+1)} = \frac{-3}{p-1} + \frac{2}{p+1}$
$x(t) = -3\mathrm{e}^{1t} + 2\mathrm{e}^{-1t}$
Zkouka:
$x(0) = -3\mathrm{e}^{0} + 2\mathrm{e}^{0} = -1$
$x'(t) = -3\mathrm{e}^{1t} - 2\mathrm{e}^{-1t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $3(-3\mathrm{e}^{1t} - 2\mathrm{e}^{-1t}) + 3(-3\mathrm{e}^{1t} + 2\mathrm{e}^{-1t}) = -18\mathrm{e}^{1t}$
R= $-18\mathrm{e}^{1t}$, tj. L=R

Příklad 61010 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$3\,\frac{d}{dt}x(t) - 9\,x(t) = 3\,e^{3\,t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61010 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$3(pX(p)+1) - 9X(p) = \frac{3}{p-3}$
$X(p) = \frac{-1p+4}{(p-3)^2} = \frac{1}{(p-3)^2} + \frac{-1}{p-3}$
$x(t) = 1t\mathrm{e}^{3t} - 1\mathrm{e}^{3t} = \mathrm{e}^{3t}(-1+1t)$
Zkouka:
$x(0) = 1 * 0 * \mathrm{e}^{0} - 1\mathrm{e}^{0} = -1$
$x'(t) = 3t\mathrm{e}^{3t} + 1\mathrm{e}^{3t} - 3\mathrm{e}^{3t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $3(3t\mathrm{e}^{3t} + 1\mathrm{e}^{3t} - 3\mathrm{e}^{3t}) - 9(\mathrm{e}^{3t}(-1+1t)) = 3\mathrm{e}^{3t}$
R= $3\mathrm{e}^{3t}$, tj. L=R

Příklad 61011 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$3\,\frac{d}{dt}x(t) - 6\,x(t) = 6\,t + 21, \quad x(0) = -3.$$

Řešení 61011 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$3(pX(p) + 3) - 6X(p) = \frac{6}{p^2} + \frac{21}{p}$
$X(p) = \frac{2+7p-3p^2}{p^2(p-2)} = \frac{-1}{p^2} + \frac{-4}{p} + \frac{1}{p-2}$
$x(t) = -1t - 4 + 1\mathrm{e}^{2t}$
Zkouka:
$x(0) = 0 - 4 + 1\mathrm{e}^{0} = -3$
$x'(t) = -1 + 2\mathrm{e}^{2t}$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 3(-1 + 2\mathrm{e}^{2t}) - 6(-1t - 4 + 1\mathrm{e}^{2t}) = 6t + 21$
R$= 6t + 21$, tj. L=R

Příklad 61012 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$\frac{d}{dt}x(t) = -6\,t + 3, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61012 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$1(pX(p) + 1) = \frac{-6}{p^2} + \frac{3}{p}$
$X(p) = \frac{-6+3p-1p^2}{p^3} = \frac{-6}{p^3} + \frac{3}{p^2} + \frac{-1}{p}$
$x(t) = -3t^2 + 3t - 1$
Zkouka:
$x(0) = 0 + 0 - 1 = -1$
$x'(t) = -6t + 3$
Dosazení do původní rovnice:
L= $1(-6t + 3) = -6t + 3$
R= $-6t + 3$, tj. L=R

Příklad 61013 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$4\,\frac{d}{dt}x(t) + 4\,x(t) = -32\,e^{t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61013 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$4(pX(p)+1) + 4X(p) = \frac{-32}{p-1}$
$X(p) = \frac{-1p-7}{(p-1)(p+1)} = \frac{-4}{p-1} + \frac{3}{p+1}$
$x(t) = -4\mathrm{e}^{1t} + 3\mathrm{e}^{-1t}$
Zkouka:
$x(0) = -4\mathrm{e}^{0} + 3\mathrm{e}^{0} = -1$
$x'(t) = -4\mathrm{e}^{1t} - 3\mathrm{e}^{-1t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $4(-4\mathrm{e}^{1t} - 3\mathrm{e}^{-1t}) + 4(-4\mathrm{e}^{1t} + 3\mathrm{e}^{-1t}) = -32\mathrm{e}^{1t}$
R= $-32\mathrm{e}^{1t}$, tj. L=R

Příklad 61014 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$4\,\frac{d}{dt}x(t) - 16\,x(t) = 4\,e^{4\,t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61014 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$4(pX(p)+1) - 16X(p) = \frac{4}{p-4}$
$X(p) = \frac{-1p+5}{(p-4)^2} = \frac{1}{(p-4)^2} + \frac{-1}{p-4}$
$x(t) = 1t\mathrm{e}^{4t} - 1\mathrm{e}^{4t} = \mathrm{e}^{4t}(-1+1t)$
Zkouka:
$x(0) = 1 * 0 * \mathrm{e}^{0} - 1\mathrm{e}^{0} = -1$
$x'(t) = 4t\mathrm{e}^{4t} + 1\mathrm{e}^{4t} - 4\mathrm{e}^{4t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $4(4t\mathrm{e}^{4t} + 1\mathrm{e}^{4t} - 4\mathrm{e}^{4t}) - 16(\mathrm{e}^{4t}(-1+1t)) = 4\mathrm{e}^{4t}$
R= $4\mathrm{e}^{4t}$, tj. L=R

Příklad 61015 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$4\,\frac{d}{dt}x(t) - 8\,x(t) = 8\,t + 36, \quad x(0) = -4.$$

Řešení 61015 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$4(pX(p) + 4) - 8X(p) = \frac{8}{p^2} + \frac{36}{p}$
$X(p) = \frac{2+9p-4p^2}{p^2(p-2)} = \frac{-1}{p^2} + \frac{-5}{p} + \frac{1}{p-2}$
$x(t) = -1t - 5 + 1\mathrm{e}^{2t}$
Zkouka:
$x(0) = 0 - 5 + 1\mathrm{e}^0 = -4$
$x'(t) = -1 + 2\mathrm{e}^{2t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $4(-1 + 2\mathrm{e}^{2t}) - 8(-1t - 5 + 1\mathrm{e}^{2t}) = 8t + 36$
R= $8t + 36$, tj. L=R

Příklad 61016 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$\frac{d}{dt}x(t) = -8\,t + 4, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61016 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$1(pX(p) + 1) = \frac{-8}{p^2} + \frac{4}{p}$
$X(p) = \frac{-8+4p-1p^2}{p^3} = \frac{-8}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{-1}{p}$
$x(t) = -4t^2 + 4t - 1$
Zkouka:
$x(0) = 0 + 0 - 1 = -1$
$x'(t) = -8t + 4$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 1(-8t + 4) = -8t + 4$
R$= -8t + 4$, tj. L=R

Příklad 61017 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$5\,\frac{d}{dt}x(t) + 5\,x(t) = -50\,e^{t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61017 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$5(pX(p)+1)+5X(p)=\frac{-50}{p-1}$
$X(p)=\frac{-1p-9}{(p-1)(p+1)}=\frac{-5}{p-1}+\frac{4}{p+1}$
$x(t)=-5\mathrm{e}^{1t}+4\mathrm{e}^{-1t}$
Zkouka:
$x(0)=-5\mathrm{e}^{0}+4\mathrm{e}^{0}=-1$
$x'(t)=-5\mathrm{e}^{1t}-4\mathrm{e}^{-1t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $5(-5\mathrm{e}^{1t}-4\mathrm{e}^{-1t})+5(-5\mathrm{e}^{1t}+4\mathrm{e}^{-1t})=-50\mathrm{e}^{1t}$
R= $-50\mathrm{e}^{1t}$, tj. L=R

Příklad 61018 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$5\,\frac{d}{dt}x(t) - 25\,x(t) = 5\,e^{5\,t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61018 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$5(pX(p)+1) - 25X(p) = \frac{5}{p-5}$
$X(p) = \frac{-1p+6}{(p-5)^2} = \frac{1}{(p-5)^2} + \frac{-1}{p-5}$
$x(t) = 1t\mathrm{e}^{5t} - 1\mathrm{e}^{5t} = \mathrm{e}^{5t}(-1+1t)$
Zkouka:
$x(0) = 1 * 0 * \mathrm{e}^0 - 1\mathrm{e}^0 = -1$
$x'(t) = 5t\mathrm{e}^{5t} + 1\mathrm{e}^{5t} - 5\mathrm{e}^{5t}$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 5(5t\mathrm{e}^{5t} + 1\mathrm{e}^{5t} - 5\mathrm{e}^{5t}) - 25(\mathrm{e}^{5t}(-1+1t)) = 5\mathrm{e}^{5t}$
R$= 5\mathrm{e}^{5t}$, tj. L=R

Příklad 61019 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$5\,\frac{d}{dt}x(t) - 10\,x(t) = 10\,t + 55, \quad x(0) = -5.$$

Řešení 61019 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$5(pX(p) + 5) - 10X(p) = \frac{10}{p^2} + \frac{55}{p}$
$X(p) = \frac{2+11p-5p^2}{p^2(p-2)} = \frac{-1}{p^2} + \frac{-6}{p} + \frac{1}{p-2}$
$x(t) = -1t - 6 + 1\mathrm{e}^{2t}$
Zkouka:
$x(0) = 0 - 6 + 1\mathrm{e}^0 = -5$
$x'(t) = -1 + 2\mathrm{e}^{2t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $5(-1 + 2\mathrm{e}^{2t}) - 10(-1t - 6 + 1\mathrm{e}^{2t}) = 10t + 55$
R= $10t + 55$, tj. L=R

Příklad 61020 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$\frac{d}{dt}x(t) = -10\,t + 5, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61020 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$1(pX(p) + 1) = \frac{-10}{p^2} + \frac{5}{p}$
$X(p) = \frac{-10+5p-1p^2}{p^3} = \frac{-10}{p^3} + \frac{5}{p^2} + \frac{-1}{p}$
$x(t) = -5t^2 + 5t - 1$
Zkouka:
$x(0) = 0 + 0 - 1 = -1$
$x'(t) = -10t + 5$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 1(-10t + 5) = -10t + 5$
R$= -10t + 5$, tj. L=R

Příklad 61021 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$6\,\frac{d}{dt}x(t) + 6\,x(t) = -72\,e^{t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61021 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$6(pX(p) + 1) + 6X(p) = \frac{-72}{p-1}$
$X(p) = \frac{-1p-11}{(p-1)(p+1)} = \frac{-6}{p-1} + \frac{5}{p+1}$
$x(t) = -6\mathrm{e}^{1t} + 5\mathrm{e}^{-1t}$
Zkouka:
$x(0) = -6\mathrm{e}^{0} + 5\mathrm{e}^{0} = -1$
$x'(t) = -6\mathrm{e}^{1t} - 5\mathrm{e}^{-1t}$
Dosazení do původní rovnice:
L= $6(-6\mathrm{e}^{1t} - 5\mathrm{e}^{-1t}) + 6(-6\mathrm{e}^{1t} + 5\mathrm{e}^{-1t}) = -72\mathrm{e}^{1t}$
R= $-72\mathrm{e}^{1t}$, tj. L=R

Příklad 61022 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$6\,\frac{d}{dt}x(t) - 36\,x(t) = 6\,e^{6\,t}, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61022 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$6(pX(p)+1) - 36X(p) = \frac{6}{p-6}$
$X(p) = \frac{-1p+7}{(p-6)^2} = \frac{1}{(p-6)^2} + \frac{-1}{p-6}$
$x(t) = 1t\mathrm{e}^{6t} - 1\mathrm{e}^{6t} = \mathrm{e}^{6t}(-1+1t)$
Zkouka:
$x(0) = 1*0*\mathrm{e}^0 - 1\mathrm{e}^0 = -1$
$x'(t) = 6t\mathrm{e}^{6t} + 1\mathrm{e}^{6t} - 6\mathrm{e}^{6t}$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 6(6t\mathrm{e}^{6t} + 1\mathrm{e}^{6t} - 6\mathrm{e}^{6t}) - 36(\mathrm{e}^{6t}(-1+1t)) = 6\mathrm{e}^{6t}$
R$= 6\mathrm{e}^{6t}$, tj. L=R

Příklad 61023 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$6\,\frac{d}{dt}x(t) - 12\,x(t) = 12\,t + 78, \quad x(0) = -6.$$

Řešení 61023 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$6(pX(p) + 6) - 12X(p) = \frac{12}{p^2} + \frac{78}{p}$
$X(p) = \frac{2+13p-6p^2}{p^2(p-2)} = \frac{-1}{p^2} + \frac{-7}{p} + \frac{1}{p-2}$
$x(t) = -1t - 7 + 1\mathrm{e}^{2t}$
Zkouka:
$x(0) = 0 - 7 + 1\mathrm{e}^{0} = -6$
$x'(t) = -1 + 2\mathrm{e}^{2t}$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 6(-1 + 2\mathrm{e}^{2t}) - 12(-1t - 7 + 1\mathrm{e}^{2t}) = 12t + 78$
R$= 12t + 78$, tj. L=R

Příklad 61024 Řete počáteční úlohu pomocí Laplaceovy tranformace

$$\frac{d}{dt}x(t) = -12\,t + 6, \quad x(0) = -1.$$

Řešení 61024 Laplaceův obraz rovnice určený dle slovníku:
$1(pX(p) + 1) = \frac{-12}{p^2} + \frac{6}{p}$
$X(p) = \frac{-12+6p-1p^2}{p^3} = \frac{-12}{p^3} + \frac{6}{p^2} + \frac{-1}{p}$
$x(t) = -6t^2 + 6t - 1$
Zkouka:
$x(0) = 0 + 0 - 1 = -1$
$x'(t) = -12t + 6$
Dosazení do původní rovnice:
L$= 1(-12t + 6) = -12t + 6$
R$= -12t + 6$, tj. L=R

Příklad 63001 Užitím Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu

$$y' - y = t^2 e^t, \quad y(0_+) = 0.$$

Řešení 63001

$\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$
$\mathcal{L}[y'(t)] = pY(p) - y(0_+) = pY(p)$
$\mathcal{L}[t^2 e^t] = (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p-1}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{-1}{(p-1)^2}\right) = \frac{2}{(p-1)^3}$

$$pY(p) - Y(p) = \frac{2}{(p-1)^3}$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p-1)^4}$$

$$\mathcal{L}[t^3 e^t] = (-1)^3 \frac{d^3}{dp^3}\left(\frac{1}{p-1}\right) = -\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{-1}{(p-1)^2}\right) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{(p-1)^3}\right) = \frac{6}{(p-1)^4}$$

$$Y(p) = \frac{1}{3}\frac{6}{(p-1)^4}$$

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{3} t^3 e^t}$$

Příklad 63002 Užitím Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu

$$y' + y = 4e^{3t}, \quad y(0_+) = 0.$$

Řešení 63002

$\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$

$\mathcal{L}[y'(t)] = pY(p) - y(0_+) = pY(p)$

$\mathcal{L}[4e^{3t}] = \frac{4}{p-3}$

$$pY(p) + Y(p) = \frac{4}{p-3}$$

$$Y(p) = \frac{4}{(p+1)(p-3)}$$

$\frac{4}{(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-3} \Rightarrow 4 = A(p-3) + B(p+1) \Rightarrow A = -1, \quad B = 1$

$$Y(p) = \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+1}$$

$$\boxed{y(t) = e^{3t} - e^{-t}}$$

Příklad 63003 Užitím Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu

$$y' - y = 2\sin t, \quad y(0_+) = 0.$$

Řešení 63003 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$
$\mathcal{L}[y'(t)] = pY(p) - y(0_+) = pY(p)$
$\mathcal{L}[2\sin t] = \frac{2}{p^2+1}$

$$pY(p) - Y(p) = \frac{2}{p^2+1}$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p^2+1)(p-1)}$$

$$\frac{2}{(p^2+1)(p-1)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{p-1}$$

$$2 = (Ap+B)(p-1) + C(p^2+1) \Rightarrow A = B = -1, \quad C = 1$$

$$Y(p) = -\frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p-1}$$

$$\boxed{y(t) = -\sin t - \cos t + e^t}$$

Příklad 63004 Užitím Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu

$$y' + y = te^{-t}, \quad y(0_+) = 0.$$

Řešení 63004

$\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$

$\mathcal{L}[y'(t)] = pY(p) - y(0_+) = pY(p)$

$\mathcal{L}[te^{-t}] = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{(p+1)^2}$

$$pY(p) + Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$$

$\mathcal{L}[t^2e^t] = (-1)^2\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p+1}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{-1}{(p+1)^2}\right) = \frac{2}{(p+1)^3}$

$$Y(p) = \frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^3}$$

$$\boxed{y(t) = \tfrac{1}{2}t^2e^{-t}}$$

Příklad 70001 Pomocí $\mathcal{Z}$-transformace řešte počáteční úlohu pro diferenční rovnici

$$\Delta^2 y_n + y_n = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$

Řešení 70001

$$(z-1)^2 Y(z) - z\left((z-1)\underbrace{y_0}_{=1} + \underbrace{y_1}_{=0} - \underbrace{y_0}_{=1}\right) + Y(z) = 0$$

$$Y(z)[(z-1)^2 + 1] = z(z-2)$$

$$Y(z) = \frac{z(z-2)}{(z-1)^2+1} = \frac{z(z-1)}{(z-1)^2+1} - \frac{z}{(z-1)^2+1}$$

$$\boxed{y_n = (\sqrt{2})^n \cos\tfrac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^n \sin\tfrac{n\pi}{4}}$$

Příklad 70002 Pomocí $\mathcal{Z}$-transformace řešte počáteční úlohu pro diferenční rovnici

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

Řešení 70002

$$z^2 Y(z) - z^2 \underbrace{y_0}_{=0} - z \underbrace{y_1}_{=1} - 2(zY(z) - z \underbrace{y_0}_{=0}) + 2Y(z) = 0$$

$$Y(z)(z^2 - 2z + 2) = z$$

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 2}$$

$$\boxed{y_n = (\sqrt{2})^n \sin \tfrac{n\pi}{4}}$$

Příklad 70003 Pomocí $\mathcal{Z}$-transformace řešte počáteční úlohu pro diferenční rovnici

$$\Delta^2 y_n + 2\Delta y_n + 2y_n = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 2.$$

Řešení 70003

$$(z-1)^2 Y(z) - z\left((z-1)\underbrace{y_0}_{=1} + \underbrace{y_1}_{=2} - \underbrace{y_0}_{=1}\right) + 2\left((z-1)Y(z) - z\underbrace{y_0}_{=1}\right) + 2Y(z) = 0$$

$$Y(z)[\underbrace{(z-1)^2 + 2(z-1) + 2}_{=z^2+1}] = \underbrace{z^2 + 2z}_{=z(z+2)}$$

$$Y(z) = \frac{z(z+2)}{z^2+1} = \frac{z^2}{z^2+1} + \frac{2z}{z^2+1}$$

$$\boxed{y_n = \cos\tfrac{n\pi}{2} + 2\sin\tfrac{n\pi}{2}}$$

Příklad 70004 Pomocí $\mathcal{Z}$-transformace řešte počáteční úlohu pro diferenční rovnici

$$\Delta y_n = 2^n, \quad y_0 = 1.$$

Řešení 70004

$$(z-1)Y(z) - z\underbrace{y_0}_{=1} = \frac{z}{z-2}$$

$$(z-1)Y(z) = \frac{z}{z-2} + z = \frac{z + z^2 - 2z}{z-2} = \frac{z(z-1)}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-2}$$

$$\boxed{y_n = 2^n}$$

Příklad 70005 Pomocí $\mathcal{Z}$-transformace řešte počáteční úlohu pro diferenční rovnici

$$y_{n+1} + 3y_n = 0, \quad y_0 = 2.$$

Řešení 70005

$$zY(z) - z\underbrace{y_0}_{=2} + 3Y(z) = 0$$

$$(z+3)Y(z) = 2z$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z+3}$$

$$\boxed{y_n = 2 \cdot (-3)^n}$$

Příklad 70006 Pomocí $\mathcal{Z}$-transformace řešte počáteční úlohu pro diferenční rovnici

$$\Delta^2 y_n - 3\Delta y_n + 2y_n = 0, \quad y_0 = 1, \Delta y_0 = 1.$$

Řešení 70006

$$(z-1)^2 Y(z) - z\left((z-1)\underbrace{y_0}_{=1} + \underbrace{\Delta y_0}_{=1}\right) - 3\left((z-1)Y(z) - z\underbrace{y_0}_{=1}\right) + 2Y(z) = 0$$

$$Y(z)[\underbrace{(z-1)^2 - 3(z-1) + 2}_{=(z-2)(z-3)}] = \underbrace{z^2 - 3z}_{=z(z-3)}$$

$$Y(z) = \frac{z(z-3)}{(z-2)(z-3)} = \frac{z}{z-2}$$

$$\boxed{y_n = 2^n}$$

Příklad 70007 Pomocí $\mathcal{Z}$-transformace řešte počáteční úlohu pro diferenční rovnici

$$\Delta^2 y_n - 3\Delta y_n + 2y_n = 0, \quad y_0 = 1, \Delta y_0 = 2.$$

Řešení 70007

$$(z-1)^2 Y(z) - z\left((z-1)\underbrace{y_0}_{=1} + \underbrace{\Delta y_0}_{=2}\right) - 3\left((z-1)Y(z) - z\underbrace{y_0}_{=1}\right) + 2Y(z) = 0$$

$$Y(z)[\underbrace{(z-1)^2 - 3(z-1) + 2}_{=(z-2)(z-3)}] = \underbrace{z(z+1) - 3z}_{=z(z-2)}$$

$$Y(z) = \frac{z(z-2)}{(z-2)(z-3)} = \frac{z}{z-3}$$

$$\boxed{y_n = 3^n}$$

Příklad 70008 Pomocí $\mathcal{Z}$-transformace řešte počáteční úlohu pro diferenční rovnici

$$\Delta^2 y_n - 3\Delta y_n + 2y_n = 0, \quad y_0 = 1, \Delta y_0 = 3.$$

Řešení 70008 Není vypočítáno.