

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd · Katedra matematiky

Úvod od funkcionální analýzy
1993

Funkcionální analýza
1994

P. Drábek, A. Kufner

Předmluva

Matematická analýza (neboli, zhruba řečeno, diferenciální a integrální počet) – tedy matematický materiál, s nímž se dosud posluchači seznámili – vznikla v 17. až 19. století a vytvořila *matematický základ* pro řešení problémů přírodních a technických věd. A tento základ tvoří přes své „stáří“ dodnes (proto se také stále ještě přednáší).

V průběhu let se ovšem poněkud změnily *objekty*, s nimiž tento matematický aparát pracoval. Zatímco zpočátku šlo o vyšetřování jednotlivých (poměrně konkrétních) funkcí a o řešení různých rovnic (nejprve algebraických a pak diferenciálních či integrálních), ukázalo se koncem 19. a počátkem 20. století, že i samu funkci lze chápat jak jednotlivý objekt, jako prvek nějaké obecnější množiny (tzv. prostoru funkcí). Takový prvek lze chápat opět jako „nezávisle proměnnou“, kterou „dosazujeme“ do složitějších „funkcí“, zvaných *zobrazení* nebo *operátory*, a můžeme nyní vyšetřovat chování takovýchto „funkcí od funkcí“. Ukázalo se, že v těchto prostorech lze přirozeným způsobem zavést pojmy, názorné a důvěrně známé z geometrie jako je vzdálenost, úhel atd. Výsledkem byla jistá „geometrizace analýzy“, která umožnila vyjádřit složité analytické problémy v jednoduché geometrické řeči.

Tento vývoj pokračoval i v dalších desetiletích jako přirozený důsledek „matematizace“ celé řady oblastí fyziky, techniky, biologie atd. Počátkem třicátých let se funkcionální analýza etablovala jako samostatná matematická disciplína a její *základy* jsou dnes už standardní součástí vyššího matematického vzdělání, takže tato přednáška by se vlastně mohla jmenovat

„Matematická analýza VI.“

Výrazným rysem funkcionální analýzy je tedy skutečnost, že v sobě sjednocuje výsledky a metody řady *klasických* matematických disciplín (algebry, geometrie, analýzy), nachází a zdůrazňuje jejich *společné rysy* a dále je *zobecňuje*. I dnes se stále ještě bouřlivě rozvíjí, proniká více a více do nejrůznějších odvětví matematiky a jejích aplikací a vytváří matematický aparát, umožňující formulovat (a také řešit) i velmi *složité problémy praxe*.

Tato přednáška je skutečně jen *úvodem* do této i pro praxi důležité matematické disciplíny. Hlubší výsledky pak budou předmětem další přednášky „Funkcionální analýza“ v následujícím semestru.

Děkujeme paní Janě Lepičové za přepsání tohoto textu.

Plzeň, říjen 1993

Autoři

Obsah

Předmluva	2
1 Základní pojmy, některé aplikace	5
2 Prostory	26
2.1 Úplný metrický prostor. Banachův prostor	26
2.2 Prostory funkcí, prostory posloupností	38
2.3 Lineární funkcionály, slabá konvergence	59
2.4 Hilbertovy prostory	70
3 Operátory v Banachových a Hilbertových prostorech	84
3.1 Základní vlastnosti operátorů, lineární operátory	84
3.2 Lineární <u>ope</u> tátory na Hilbertových prostorech, vlastní čísla a vlastní vektory	97
3.3 Minimum kvadratického funkcionálu	106

Kapitola 1

Základní pojmy, některé aplikace

Než přejdeme k systematickému výkladu, uvedeme několik základních pojmů v rozsahu nutném k pochopení matematického obsahu několika aplikací.

Základním pojmem funkcionální analýzy je *prostor* jako abstraktní množina M vhodně zvolených prvků, které budeme značit $u, v, w, \dots$. Matematický charakter a původ těchto prvků nebude podstatný a může být v různých případech velmi rozdílný: existují prostory bodů, prostory vektorů, prostory funkcí, prostory matic, prostory posloupností atd.

V aplikacích funkcionální analýzy jsou užitečné především **lineární prostory**.

Definice 1.1 Nechť je na prostoru M definováno *sčítání* a *násobení* reálným, resp. komplexním číslem λ , tj. nechť je každé dvojici prvků $u, v \in M$ přiřazen prvek $w \in M$, nazvaný *součet prvků* u a v a označovaný $u + v$:

$$w = u + v,$$

a nechť je každému prvku $u \in M$ a každému číslu λ přiřazen prvek $z \in M$, nazvaný λ -*násobek prvku* u a označovaný λu :

$$z = \lambda u.$$

Předpokládejme, že operace sčítání a násobení číslem mají následující vlastnosti:

$$(L\ 1) \quad u + v = v + u \quad (\textit{komutativní zákon}).$$

$$(L\ 2) \quad u + (v + w) = (u + v) + w \quad (\textit{asociativní zákon vzhledem ke sčítání}).$$

$$(L\ 3) \quad \text{Existuje prvek } o \in M \text{ tak, že pro všechny prvky } u \in M \text{ platí}$$

$$u + o = u ;$$

prvek o nazýváme *nulovým prvkem* prostoru M .

(L 4) Ke každému prvku $u \in M$ existuje prvek $(-u) \in M$ vyhovující vztahu

$$u + (-u) = o;$$

prvek $(-u)$ nazýváme *prvkem opačným k prvku u* . Místo součtu $u + (-v)$ píšeme obvykle $u - v$ a máme tak definováno *odčítání*.

(L 5) $\mu(\lambda u) = (\mu\lambda)u$ pro $u \in M$ a pro čísla λ, μ (*asociativní zákon vzhledem k násobení číslem*).

(L 6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
 $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ (*distributivní zákony*).

(L 7) $1 \cdot u = u$.

Pak nazýváme M *reálným resp. komplexním lineárním prostorem*.

Podmnožinu $G \subset M$ nazveme *lineárním podprostorem* prostoru M , je-li množina G sama lineárním prostorem vzhledem k operacím „sčítání“ a „násobení číslem λ “, definovaným na M .

[To znamená: Je-li $u, v \in G$, je současně $u, v \in M$ a výrazy $u + v$ a λu mají smysl a patří do M . Jestliže patří také do G (pro každou volbu $u, v \in G$ a pro každé číslo λ), je G sama lineárním prostorem a tedy lineárním podprostorem lineárního prostoru M .]

Cvičení 1.1 Dokažte, že z vlastností (L 1) až (L 7) už plynou tato tvrzení:

- (i) Prvky o a $(-u)$ jsou určeny jednoznačně.
- (ii) $0 \cdot u = o$ pro každé $u \in M$ (tj. nulový prvek dostaneme z libovolného prvku po vynásobení nulou).
- (iii) $(-1) \cdot u = (-u)$ pro každé $u \in M$ (tj. opačný prvek k prvku u dostaneme vynásobením prvku u číslem -1).

Vlastnosti (L 1) až (L 7) jsou vlastně dobře známé vlastnosti ze sčítání a násobení čísel či vektorů. Pro *abstraktní* množiny M lze ovšem sčítání a násobení číslem definovat různými způsoby a vlastnosti (L 1) – (L 7) pak už nemusí být „samozřejmé“.

Příklad 1.1 (i) Množina $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ reálných resp. komplexních čísel s *obvyklým* sčítáním je reálný resp. komplexní lineární prostor.

(ii) Množina $\mathbb{R}^N$ všech N -tic reálných čísel $u = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ [tj. množina N -rozměrných vektorů] je reálný lineární prostor, definujeme-li součet vektorů u a $v = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ resp. λ -násobek vektoru u obvyklým způsobem, tj.

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u + v &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N), \\ \lambda u &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N). \end{aligned}$$

(iii) Množina (prostor) všech reálných, resp. komplexních funkcí $u = u(t)$, definovaných a spojitých na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, je reálný, resp. komplexní lineární prostor, definujeme-li součet $u + v$ a λ -násobek λu funkcí $u = u(t)$, $v = v(t)$ předpisem

$$(1.2) \quad \begin{aligned} (u + v)(t) &= u(t) + v(t), \\ (\lambda u)(t) &= \lambda \cdot u(t). \end{aligned}$$

Tento lineární prostor značíme

$$(1.3) \quad C(\langle 0, 1 \rangle).$$

(iv) Budiž $p \geq 1$ a uvažujme množinu (prostor) všech *nekonečných* posloupností reálných, resp. komplexních čísel: $u = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, takových, že řada

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$$

konverguje. Tento prostor značíme

$$l^p.$$

Definujme součet dvou prvků u a $v = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ z l^p , resp. λ -násobek prvku u jako posloupnost

$$w = u + v = \{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \text{resp.} \quad z = \lambda u = \{\lambda x_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Takto definované operace splňují podmínky (L 1) až (L 7). Je ovšem třeba dokázat, že $u + v$ i λu opět patří do l^p , tj. že

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p < \infty \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p < \infty.$$

U λ -násobku je to ihned zřejmé: $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p = |\lambda|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$, ale u součtu je to trochu složitější: Musíme využít *známé nerovnosti*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p),$$

která platí pro každou dvojici nezáporných čísel a, b , a podle níž je

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \leq 2^{p-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right) < \infty,$$

pokud $u \in l^p$ (tj. $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$) a $v \in l^p$ (tj. $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < \infty$).

Prostor l^p je tedy lineárním prostorem, nulovým prvkem je zde posloupnost složená ze samých nul: $o = \{0, 0, \dots, 0, \dots\}$.

(v) Stejným způsobem můžeme dokázat, že prostor

$$(1.5) \quad L^p(0, 1)$$

všech funkcí $u = u(t)$ definovaných na $\langle 0, 1 \rangle$ a takových, že Lebesgueův integrál

$$(1.6) \quad \int_0^1 |u(t)|^p dt$$

je konečný, je lineární prostor, definujeme-li součet $u + v$ dvou funkcí a λ -násobek λu funkce u opět pomocí vztahů (1.2).

Nulovým prvkem prostoru $L^p(0, 1)$ je funkce u rovná nule *skoro všude* v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ ve smyslu Lebesgueovy míry.

□

Příklad 1.2 Budiž M množina všech těch funkcí $u = u(t)$ z prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$ [viz příklad 1.1 (iii)], které splňují podmínku

$$(1.7) \quad u(0) = a,$$

kde a je pevné číslo. Definujme na množině M součet a λ -násobek pomocí vztahů (1.2). Pak množina M *není lineárním prostorem*, pokud je číslo $a \neq 0$. Je totiž

$$(u + v)(0) = u(0) + v(0) = a + a = 2a,$$

a pro $a \neq 0$ je $2a \neq a$, takže součet $u + v$ nesplňuje podmínku (1.7) a tudíž *nepatří* do M .

Množina M všech funkcí $u \in C(\langle 0, 1 \rangle)$, které splňují podmínku (1.7) s $a \neq 0$, je tedy podmnožinou prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$, která *není* lineárním podprostorem lineárního prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$.

□

Se samotným pojmem lineárního prostoru v aplikacích nevystačíme. Tam totiž pracujeme s *přibližnými metodami*, ale operace sčítání a násobení číslem nám ještě nic neříkají o vzájemné poloze dvou prvků, o tom zda leží „blízko“ či „daleko“ od sebe. Tento vztah můžeme popsat pomocí tzv. *metriky*, umožňující definovat „vzdálenost“ dvou prvků.

Definice 1.2 Nechť je na prostoru M přiřazeno každé dvojici u, v prvků z M nezáporné číslo

$$\rho(u, v)$$

nazvané *vzdáleností* prvků u a v a mající následující vlastnosti:

(M 1) $\rho(u, v) = 0$ právě tehdy, je-li $u = v$.

(M 2) Pro každé dva prvky $u, v \in M$ je

$$(1.8) \quad \rho(u, v) = \rho(v, u)$$

(symetrie vzdálenosti).

(M 3) Pro každou trojici prvků $u, v, w \in M$ platí

$$(1.9) \quad \rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$$

(tzv. trojúhelníková nerovnost).

Funkci ρ pak nazýváme *metrikou* a prostor M *metrickým prostorem*.

Protože na témže prostoru M lze metriku ρ zavést různým způsobem, budeme někdy pro metrický prostor s metrikou ρ používat označení

$$(M, \rho).$$

Příklad 1.3 Na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^N$ lze zavést metriku tímto předpisem: Pro $u = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ a $v = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ položíme

$$(1.10) \quad \rho(u, v) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}.$$

Čtenář si jistě ihned uvědomí, že to je „běžná“ (tzv. euklidovská) vzdálenost v N -rozměrném prostoru a že podmínky (M 1) až (M 3) jsou splněny.

Na téže množině lze zavést metriku např. předpisem

$$\rho_1(u, v) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_N - y_N|;$$

také v tomto případě jsou zřejmě splněny podmínky (M 1) až (M 3).

Položíme-li pro $p \geq 1$

$$(1.11) \quad \rho_p(u, v) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \dots + |x_N - y_N|^p)^{\frac{1}{p}},$$

jsou opět splněny podmínky (M 1) - (M 3) (důkaz trojúhelníkové nerovnosti je poněkud obtížnější – viz např. [3]). V závislosti na hodnotě čísla p tak dostáváme různé metrické prostory

$$(\mathbb{R}^N, \rho_p).$$

Pro $p = 2$ je $\rho_2(u, v)$ euklidovská vzdálenost definovaná vztahem (1.10).

□

Cvičení 1.2 Budiž ρ metrika v $\mathbb{R}^N$, daná vzorcem (1.10); položme pro $u, v \in \mathbb{R}^N$

$$(1.12) \quad \sigma(u, v) = \begin{cases} \rho(u, v), & \text{je-li } u = \lambda v \text{ nebo } v = \mu u, \\ \rho(u, o) + \rho(v, o) & \text{v ostatních případech;} \end{cases}$$

přitom je o počátek, $o = (0, 0, \dots, 0)$. Dokažte, že také σ je metrika na $\mathbb{R}^N$.

Příklad 1.4 Na libovolném prostoru M lze zavést metriku předpisem

$$(1.13) \quad \rho(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u \neq v, \\ 0 & \text{pro } u = v; \end{cases}$$

přesvědčte se o tom, že podmínky (M 1) až (M 3) jsou skutečně splněny. Funkce ρ definovaná vztahem (1.13) se nazývá *diskrétní metrika*. □

Předcházející příklad ukazuje, že metriku lze zavést na libovolném prostoru. Jedná-li se ovšem o *lineární* prostor, klademe většinou na metriku ρ ještě další požadavky.

(M 4) Pro všechny trojice $u, v, w \in M$ platí

$$(1.14) \quad \rho(u + w, v + w) = \rho(u, v)$$

(*invariance vůči translaci*).

(M 5) Je-li $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost čísel, pro níž platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$, a je-li o nulový prvek prostoru M , pak platí pro všechny prvky $u \in M$ vztah

$$(1.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\lambda_n u, o) = 0.$$

Je ihned vidět, že M musí být lineární prostor, aby podmínky (M 4) a (M 5) měly smysl: Ve vzorci (1.14) se sčítá, ve vzorci (1.15) se násobí čísla λ_n . Vlastnost (M 4) má opět názorný *geometrický význam*: Vzdálenost dvou prvků z M (např. dvou vektorů v rovině) se nemění, když oba prvky posuneme rovnoběžně o prvek (vektor) w . Vlastnost (M 5) pak vyjadřuje jistou *spojitost* metriky ρ .

Cvičení 1.3 Přesvědčte se, že metrika σ z formule (1.12) nesplňuje vlastnost (M 4) a metrika ρ z formule (1.13) nesplňuje vlastnost (M 5), i když budeme předpokládat, že M je lineární prostor.

V dalším se budeme zabývat *lineárními prostory* M . Tam lze zavést pojem *normy*, který zobecňuje pojem délky vektoru.

Definice 1.3 Budiž M lineární prostor (reálný resp. komplexní) a nechť je každému prvku $u \in M$ přiřazeno nezáporné číslo

$$\|u\|$$

nazvané *normou* prvku u a mající následující vlastnosti:

(N 1) $\|u\| = 0$ právě tehdy, je-li $u = o$.

(N 2) Pro každý prvek $u \in M$ a pro každé (reálné resp. komplexní) číslo λ platí

$$(1.16) \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|.$$

(N 3) Pro každou dvojici prvků $u, v \in M$ platí tzv. *trojúhelníková nerovnost*

$$(1.17) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Pak se M nazývá (reálný resp. komplexní) *lineární normovaný prostor*.

Protože na témže prostoru M lze normu $\|u\|$ prvku u zavést různými způsoby, budeme někdy pro lineární normovaný prostor používat označení

$$(M, \|\cdot\|).$$

V každém lineárním normovaném prostoru $(M, \|\cdot\|)$ lze zavést metriku ρ předpisem

$$(1.18) \quad \rho(u, v) = \|u - v\|, \quad u, v \in M.$$

Tato metrika splňuje nejen podmínky (M 1) až (M 3), ale také podmínky (M 4) a (M 5) (přesvědčte se o tom!). Každý lineární normovaný prostor je tedy také současně (lineární) metrický prostor.

Poznámka Opačné tvrzení obecně *neplatí*. Existuje řada důležitých lineárních metrických prostorů, jejichž metriku *nelze* odvodit z vhodné normy vztahem (1.18).

Příklad 1.5 V lineárním prostoru $\mathbb{R}^N$ lze zavést normu $\|u\|$ prvku $u = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ různými způsoby. Lze například položit

$$(1.19) \quad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

nebo

$$(1.20) \quad \|u\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$$

nebo obecně pro $p \geq 1$

$$(1.21) \quad \|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Je ihned vidět, že norma $\|\cdot\|_p$ souvisí s metrikou ρ_p [viz příklad 1.3] formulí

$$(1.22) \quad \rho_p(u, v) = \|u - v\|_p,$$

kde $v = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. To je však právě vztah (1.18). Na druhé straně je

$$(1.23) \quad \|u\|_p = \rho_p(u, o),$$

kde $o = (0, 0, \dots, 0)$ je nulový prvek prostoru $\mathbb{R}^N$ (tj. počátek). Nyní lze ukázat, že norma $\|\cdot\|_p$ skutečně splňuje podmínky (N 1) až (N 3). Například trojúhelníková

nerovnost (1.17) plyne z trojúhelníkové nerovnosti (1.9) pro metriku: Použijeme-li nerovnost (1.9) pro $-v$ místo v a pro $w = o$, je vzhledem k (1.22) a (1.23)

$$\begin{aligned}\|u + v\|_p &= \rho_p(u, -v) \leq \rho_p(u, o) + \rho_p(-v, o) = \\ &= \|u\|_p + \|-v\|_p = \|u\|_p + \|v\|_p,\end{aligned}$$

neboť podle (N 2) je $\|-v\|_p = \|(-1)v\|_p = |-1| \cdot \|v\|_p = \|v\|_p$.

Další normu lze v $\mathbb{R}^N$ zavést předpisem

$$(1.24) \quad \|u\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|);$$

dokažte, že i v tomto případě jsou splněny podmínky (N 1) až (N 3).

Normu $\|u\|_2$ nazýváme *euklidovskou normou*.

□

Příklad 1.6 (i) Zcela analogicky lze dokázat, že v lineárním prostoru posloupností l^p resp. v lineárním prostoru funkcí $L^p(0, 1)$ [viz příklad 1.1 (iv) resp. (v)] lze zavést normu předpisem

$$(1.25) \quad \|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pro } u = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^p$$

resp.

$$(1.26) \quad \|u\|_p = \left(\int_0^1 |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pro } u = u(t) \in L^p(0, 1).$$

(ii) Na lineárním prostoru $C((0, 1))$ z příkladu 1.1 (iii) lze zavést normu předpisem

$$(1.27) \quad \|u\| = \max_{t \in (0, 1)} |u(t)|$$

(využíváme skutečnosti, že spojitá funkce nabývá na uzavřeném intervalu svého maxima). Na témže prostoru lze ovšem také zavést normu $\|u\|_p$ předpisem (1.26) s libovolným $p \geq 1$.

□

Zavedení pojmů, které známe důvěrně z geometrie (prostor, vzdálenost čili metrika, délka vektoru čili norma), i pro *abstraktní množiny* M ukazuje, v čem spočívá význam funkcionální analýzy: v tom, že s její pomocí dovedeme komplikované problémy z nejrůznějších oblastí popsat a řešit v jednoduché, geometricky názorné podobě. A toto spojení s geometrickým názorem vynikne ještě více, budeme-li mít k dispozici i analogii „úhlu“, který prvky (vektory) spolu svírají, především pak analogii „kolmosti“. Dosáhneme toho zavedením dalšího pojmu – *skalárního součinu*.

Definice 1.4 Budiž M komplexní (resp. reálný) lineární prostor a necht' je každé dvojici u, v prvků z M přiřazeno komplexní (resp. reálné) číslo

$$(u, v)$$

nazvané *skalárním součinem* prvku u a prvku v (v tomto pořadí!) a mající následující vlastnosti:

- (S 1) $(u, u) > 0$ pro všechna $u \neq o$.
 - (S 2) $(u, v) = \overline{(v, u)}$ pro všechna $u, v \in M$.
 - (S 3) $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ pro všechna $u, v \in M$ a pro každé komplexní (resp. reálné) číslo λ .
 - (S 4) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ pro všechna $u, v, w \in M$.
- Prostor M opatřený skalárním součinem nazýváme *unitárním prostorem*.

Z této definice vyplývají ihned některé další vlastnosti skalárního součinu:

$$(1.28) \quad (u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v)$$

(připomínáme, že pruh označuje číslo *komplexně sdružené*) a

$$(1.29) \quad (u, v + w) = (u, v) + (u, w).$$

Vztah (1.28) plyne z (S 3) a (S 2):

$$(u, \lambda v) = \overline{(\lambda v, u)} = \overline{\lambda(v, u)} = \overline{\lambda} \overline{(v, u)} = \overline{\lambda}(u, v).$$

Vztah (1.29) plyne z (S 4) a (S 2):

$$\begin{aligned} (u, v + w) &= \overline{(v + w, u)} = \overline{(v, u) + (w, u)} = \overline{(v, u)} + \overline{(w, u)} = \\ &= (u, v) + (u, w). \end{aligned}$$

Dále plyne z (S 2), že $(u, u) = \overline{(u, u)}$, tj. číslo (u, u) je *reálné*. Protože pro $u = o$ je $(o, o) = (0.u, o) = 0.(u, o) = 0$, je tedy

$$(1.30) \quad (u, u) \geq 0 \text{ pro každé } u \in M.$$

Připomeňme, že v případě reálného lineárního prostoru lze podmínku (S 2) nahradit podmínkou

$$(S 2)^* \quad (u, v) = (v, u)$$

a místo vztahu (1.28) dostáváme vztah

$$(u, \lambda v) = \lambda(u, v).$$

Příklad 1.7 (i) Lineární prostor $\mathbb{R}^N$ je unitární prostor, definujeme-li pro $u = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ a $v = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ skalární součin předpisem

$$(1.31) \quad (u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N.$$

(ii) Prostor $C([0, 1])$ všech komplexních spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$ je unitární prostor, definujeme-li skalární součin předpisem

$$(1.32) \quad (u, v) = \int_0^1 u(t) \overline{v(t)} dt.$$

(iii) Uvažujme prostor posloupností l^2 z příkladu 1.1 (iv): Posloupnosti $u = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ a $v = \{y_i\}_{i=1}^\infty$ komplexních čísel x_i, y_i patří do l^2 , je-li

$$(1.33) \quad \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^\infty |y_i|^2 < \infty.$$

Definujme nyní

$$(1.34) \quad (u, v) = \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i}.$$

Snadno se přesvědčíme, že toto číslo má všechny vlastnosti skalárního součinu, ovšem za předpokladu, že má smysl, tj. že řada v (1.34) konverguje. To však plyne z (1.33): je totiž

$$|x_i \overline{y_i}| = |x_i| \cdot |y_i| \leq \frac{1}{2}(|x_i|^2 + |y_i|^2),$$

a tedy vzhledem k (1.33)

$$\sum_{i=1}^\infty |x_i \overline{y_i}| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 + \sum_{i=1}^\infty |y_i|^2 \right) < \infty,$$

tj. řada (1.34) konverguje dokonce absolutně.

Prostor l^2 je tedy unitární prostor.

(iv) Stejně lze ukázat, že prostor $L^2(0, 1)$ z příkladu 1.1 (v) je unitární, definujeme-li skalární součin předpisem (1.32): Toto číslo je pro $u, v \in L^2(0, 1)$ konečné, neboť stačí integrovat nerovnost

$$|u(t) \overline{v(t)}| \leq \frac{1}{2}(|u(t)|^2 + |v(t)|^2).$$

□

Poznámka Prostor $\mathbb{R}^N$ se skalárním součinem (1.31) a s normou (délkou vektoru) $\|\cdot\|_2$ je nám důvěrně známý euklidovský prostor. Prostor l^2 z příkladu 1.7

(iii), přesněji řečeno jeho *reálná* varianta, kdy uvažujeme nekonečné posloupnosti reálných čísel x_i, y_i a skalární součin definujeme jako řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

je vlastně *nekonečněrozměrným zobecněním* N -rozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^N$. Systematické studium vlastností a aplikací této konkrétní množiny, jímž se zabýval na konci minulého století David HILBERT (1862 – 1943), vlastně znamenalo začátek funkcionální analýzy.

V souvislosti s tím se unitární prostory někdy také nazývají *prehilbertovské*.

Každý unitární (čili prehilbertovský) prostor je současně normovaným lineárním prostorem: Normu definujeme předpisem

$$(1.35) \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Toto číslo má smysl, neboť podle (1.30) je číslo (u, u) nezáporné. Abychom ovšem mohli ukázat, že má vlastnosti normy (N 1) – (N 3), musíme dokázat tzv. *Schwarzovu nerovnost*.

Věta 1.1 *Budiž M unitární prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$. Pak platí pro každé dva prvky $u, v \in M$ nerovnost*

$$(1.36) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

kde $\|\cdot\|$ je definováno vzorcem (1.35). Znaménko rovnosti v (1.36) platí právě tehdy, je-li buď $u = \lambda v$ nebo $v = \lambda u$ s nějakým (komplexním) číslem λ .

Důkaz je elementární:

Je-li $v = 0$, jsou obě strany v (1.36) rovny nule a nerovnost tedy platí.

Předpokládejme tedy, že $v \neq 0$; podle (S 1) je pak

$$(v, v) = \|v\|^2 > 0.$$

Budiž dále λ libovolné číslo. Podle (1.30) je

$$(u - \lambda v, u - \lambda v) \geq 0$$

a podle (S 2) – (S 4) je

$$\begin{aligned} (u - \lambda v, u - \lambda v) &= (u, u - \lambda v) + (-\lambda v, u - \lambda v) = \\ &= (u, u) + (u, -\lambda v) + (-\lambda v, u) + (-\lambda v, -\lambda v) = \\ &= \|u\|^2 - \bar{\lambda}(u, v) - \lambda(v, u) + \lambda\bar{\lambda}(v, v) = \\ &= \|u\|^2 - \bar{\lambda}(u, v) - \lambda(v, u) + |\lambda|^2\|v\|^2. \end{aligned}$$

Zvolme nyní

$$\lambda = \frac{(u, v)}{(v, v)} = \frac{(u, v)}{\|v\|^2}, \quad \text{tj.} \quad \bar{\lambda} = \frac{(v, u)}{\|v\|^2}.$$

Pak z předcházejících vztahů plyne

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u - \lambda v, u - \lambda v) = \|u\|^2 - \frac{(v, u)(u, v)}{\|v\|^2} - \frac{(u, v)(v, u)}{\|v\|^2} + \frac{|(v, u)|^2}{\|v\|^4} \|v\|^2 = \\ &= \|u\|^2 - \frac{|(v, u)|^2}{\|v\|^2} \end{aligned}$$

a odtud po jednoduché úpravě obdržíme (1.36). Současně je vzhledem k (S 1) ihned vidět, že rovnost zde platí pouze tehdy, je-li $u - \lambda v = 0$ čili $u = \lambda v$.

Je-li naopak $u = \lambda v$, je $|(u, v)| = |(\lambda v, v)| = |\lambda|(v, v) = \|v\|^2 |\lambda|$ a $\|u\| \cdot \|v\| = \|\lambda v\| \cdot \|v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \cdot \|v\|$, takže obě strany v (1.36) jsou si rovny.

Nyní už můžeme snadno dokázat, že číslo $\|u\|$ z formule (1.35) má vlastnosti normy:

(N 1) plyne z (S 1) a (1.30).

(N 2) plyne z definice (1.35):

$$\begin{aligned} \|\lambda u\| &= \sqrt{(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} (u, u)} = \sqrt{|\lambda|^2 (u, u)} = \\ &= |\lambda| \sqrt{(u, u)} = |\lambda| \|u\|. \end{aligned}$$

(N 3) plyne ze Schwarzovy nerovnosti (1.36):

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = (u, u) + (u, v) + \overbrace{(v, u)}^{(v, u)} + (v, v) = \\ &= \|u\|^2 + (v, u) + (u, v) + \|v\|^2 \end{aligned}$$

a podle (1.36) je

$$|(v, u)| + |(u, v)| \leq \|v\| \cdot \|u\| + \|u\| \cdot \|v\| = 2\|u\| \cdot \|v\|,$$

tj. $\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$ a tedy

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

■

Příklad 1.8 Zvolíme-li za unitární prostor M prostor posloupností l^2 , bude mít Schwarzova nerovnost (1.36) tvar

$$(1.37) \quad \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

zatímco v prostoru $L^2(0, 1)$ bude mít tvar

$$(1.38) \quad \left| \int_0^1 u(t) \overline{v(t)} dt \right| \leq \left(\int_0^1 |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nerovnost (1.37) se nazývá *Cauchyova*, nerovnost (1.38) *Bunjakovského*, proto se používá těchto názvů spolu se Schwarzovým jménem i pro obecnou nerovnost (1.36). □

Cvičení 1.4 Dokažte, že je-li $\|\cdot\|$ norma definována pomocí skalárního součinu vzorcem (1.35), platí pro každé dva prvky $u, v \in M$ tzv. *rovnost rovnoběžníka*

$$(1.39) \quad \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Ověřte obrázkem, že v unitárním prostoru $\mathbb{R}^2$ vyjadřuje rovnost (1.39) skutečně známý vztah mezi stranami a úhlopříčkami rovnoběžníka.

Díky vzorci (1.35) je tedy každý unitární prostor normovaným lineárním prostorem. *Opačné tvrzení* však obecně *neplatí*, tj. ne pro každý normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|$ lze najít takový skalární součin $(\cdot, \cdot)$, aby platil vztah (1.35). Tuto konstrukci lze provést *právě tehdy, splňuje-li norma $\|\cdot\|$ rovnost rovnoběžníka*, a skalární součin je pak definován v případě *komplexního* lineárního prostoru takto:

$$(1.40) \quad (u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2)$$

(zde je $i^2 = -1$). Viz např. [3].

V trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ pracujeme se souřadnými osami, které jsou navzájem kolmé, přesněji s jednotkovými vektory $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, které jsou navzájem kolmé. Díky pojmu skalárního součinu nyní můžeme *kolmost* a analogii souřadnicových vektorů e_i přenést i do abstraktního unitárního prostoru.

Definice 1.5 Budiž M unitární prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$. Řekneme, že dva prvky $u, v \in M$ jsou navzájem *ortogonální* (kolmé), platí-li

$$(1.41) \quad (u, v) = 0.$$

Posloupnost $u_1, u_2, \dots$ prvků prostoru M nazveme *ortogonálním systémem*, platí-li pro $j, k = 1, 2, \dots$, $j \neq k$,

$$(1.42) \quad (u_j, u_k) = 0.$$

Posloupnost $e_1, e_2, \dots$ prvků prostoru M nazveme *ortonormálním systémem*, platí-li pro $j, k = 1, 2, \dots$.

$$(1.43) \quad (e_j, e_k) = \delta_{jk},$$

kde δ_{jk} je tzv. *Kroneckerovo delta*, tj.

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq k, \\ 1 & \text{pro } j = k. \end{cases}$$

Každý ortonormální systém je tedy současně ortogonální systém: prvky takového systému jsou navzájem kolmé. V ortonormálním systému navíc platí

$$(1.44) \quad \|e_j\| = \sqrt{(e_j, e_j)} = 1, \quad j = 1, 2, \dots;$$

říkáme, že prvky e_j jsou *normované* (mají normu rovnou jedné). Vzhledem k (1.44) nemůže ortonormální systém $\{e_j\}$ obsahovat nulový prvek.

Příklad 1.9 (i) V unitárním prostoru $\mathbb{R}^N$ se skalárním součinem (1.31) tvoří ortonormální systém vektory $e_1, e_2, \dots, e_N$, kde $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ s jedničkou na j -tém místě. Tento systém je *konečný*.

(ii) V unitárním prostoru l^2 se skalárním součinem (1.33) tvoří ortonormální systém nekonečné posloupnosti $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, mající na i -tém místě jedničku a jinak nuly. Tento systém je *nekonečný*.

(iii) V unitárním prostoru $L^2(0, 1)$ se skalárním součinem (1.32) tvoří ortogonální systém např. funkce

$$1, \cos \pi t, \cos 2\pi t, \cos 3\pi t, \dots, \cos k\pi t, \dots$$

□



Ukážeme si nyní na dvou jednoduchých příkladech, jakým způsobem lze použít funkcionální analýzu k řešení praktických problémů. Postup je přitom rozdělen do tří kroků:

- I. Analytická formulace problému (vytvoření matematického modelu).
- II. Abstraktní funkcionálně analytická formulace tohoto problému, motivovaná názornými (geometrickými) úvahami.
- III. Vyšetření původního problému na základě *obecných* metod, využitelných v druhém kroku.

Problém z teorie aproximace

Typický problém, který se v aplikacích stále objevuje, je problém přibližného nahrazení jisté komplikované a početně obtížně zpracovatelné funkce funkcí pokud možno jednoduchou, jejíž vlastnosti se dají snadno popsat a se kterou lze snáze pracovat. Abychom byli konkrétní, půjde nám o problém aproximace dané spojitě funkce pomocí trigonometrických polynomů.

Krok I. Budiž tedy $f = f(x)$ pevná reálná funkce, definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Pro libovolné, ale pevné přirozené číslo n budeme uvažovat množinu $\mathcal{T}$ všech trigonometrických polynomů stupně nejvýše n -tého:

$$(1.45) \quad T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Mezi všemi takovými funkcemi T_n hledáme tu, která danou funkci f pokud možno dobře aproximuje.

Aby úloha měla smysl, musíme říci, co znamená v tomto případě „aproximovat.“ Možností je mnoho; my si zvolíme za míru přiblížení tzv. *střední kvadratickou odchylku*, tj. budeme hledat ty trigonometrické polynomy, pro něž bude výraz

$$(1.46) \quad R = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

co možná nejmenší.

Tím jsme problém formulovali *analyticky*. Zatím neurčené koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ chceme volit tak, aby hodnota R v (1.46) byla minimální.

Krok II. Abstrahujme na chvíli od konkrétního charakteru funkcí f a T_n a chápeme je jako prvky jistého prostoru M . Všechny funkce T_n tvaru (1.45) pak tvoří podmnožinu $\mathcal{T}$ tohoto prostoru. V našem případě je účelné zvolit za prostor M lineární normovaný prostor $C(\langle 0, 2\pi \rangle)$ všech funkcí spojitých na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, v němž normu volíme takto:

$$(1.47) \quad \|f\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$[C(\langle 0, 2\pi \rangle)]$ je skutečně lineární prostor a výraz (1.47) definuje skutečně normu – viz příklady 1.1 a 1.6.]. Metrika ρ , odpovídající normě $\|\cdot\|$, pak má tvar

$$(1.48) \quad \rho(f, g) = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

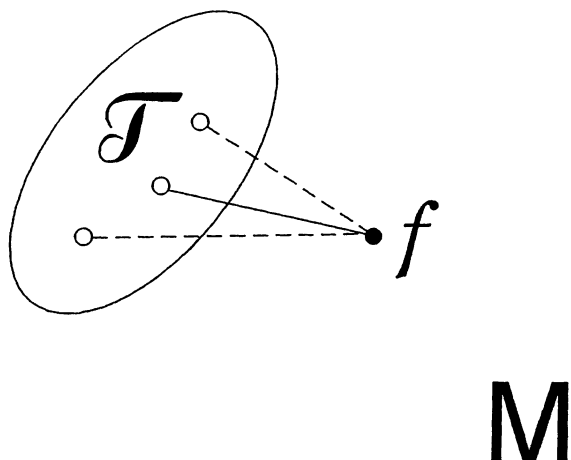
Z formulí (1.48) a (1.46) plyne, že

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - T_n\|.$$

Protože faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ je nepodstatný, stačí hledat minimum výrazu $\sqrt{2\pi} \cdot R = \|f - T_n\|$ a problém z kroku I můžeme nyní formulovat takto:

„Hledáme ten prvek T_n množiny $\mathcal{T}$, který má nejmenší vzdálenost od prvku f prostoru M .“

Geometricky si to můžeme znázornit na obrázku:



M

Vzdálenost prvku f od prvků množiny $\mathcal{T}$ dovedeme „měřit,“ protože máme k dispozici metriku.

Stále ovšem ještě není jasné, jak daný problém řešit. K tomu využijeme skutečnost, že množina $\mathcal{T}$ sama opět tvoří *lineární podprostor* prostoru M . Díky tomu si můžeme předcházející obrázek upřesnit, znázorníme-li si lineární podprostor $\mathcal{T}$ jako přímku procházející počátkem. Obrázek nám dává návod, jak nejbližší prvek T_n na $\mathcal{T}$ hledat: Bude to ten prvek T_n^* , jehož spojnice s bodem (prvkem) f bude na $\mathcal{T}$ *kolmá*. Protože spojnice prvku $T_n \in \mathcal{T}$ s prvkem f je prvek $T_n - f$, a protože v našem prostoru $C(\langle 0, 2\pi \rangle)$ s normou (1.47) máme k dispozici skalární součin, můžeme tento geometrický názor zapsat takto: Hledáme ty prvky $T_n \in \mathcal{T}$, pro něž je

$$(1.49) \quad (T_n, T_n - f) = 0 \quad 1.5$$

(tj. prvek T_n je kolmý k prvku $T_n - f$ ve smyslu definice 10.5).

Budiž tedy T_n^* prvek z $\mathcal{T}$, pro který platí (1.49) (pozor: zatím nevíme, zda takový prvek vůbec existuje!) a porovnejme vzdálenost prvku f od libovolného prvku $T_n \in \mathcal{T}$ – číslo $\|f - T_n\|$ – se vzdáleností od prvku T_n^* – číslem $\|f - T_n^*\|$. Využijeme-li pravidel pro počítání se skalárním součinem, vztahu (1.49) pro T_n^* a toho, že $\|T_n - T_n^*\|^2 \geq 0$, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\|f - T_n\|^2 &= (f - T_n, f - T_n) = \\
&= (f - T_n^* + [T_n^* - T_n], f - T_n^* + [T_n^* - T_n]) = \\
&= \|f - T_n^*\|^2 + 2(f - T_n^*, T_n^* - T_n) + \|T_n - T_n^*\|^2 = \\
&= \|f - T_n^*\|^2 + 2(f - T_n^*, T_n^*) - 2(f - T_n^*, T_n) + \|T_n - T_n^*\|^2 \geq \\
&\geq \|f - T_n^*\|^2 - 2(f - T_n^*, T_n).
\end{aligned}$$

Zatím jsme požadovali, aby pro prvek T_n^* platilo (1.49), tj. aby bylo $(T_n^*, T_n^* - f) = 0$. Jestliže tento požadavek zpřesníme a budeme chtít, aby T_n^* splňovalo podmínku

$$(1.50) \quad (T_n, T_n^* - f) = 0 \text{ pro všechna } T_n \in \mathcal{T},$$

pak plyne z předcházející nerovnosti vztah

$$\|f - T_n\|^2 \geq \|f - T_n^*\|^2$$

čili

$$(1.51) \quad \|f - T_n\| \geq \|f - T_n^*\|.$$

Prvek $T_n^* \in \mathcal{T}$, který splňuje podmínku (1.50), tedy má ze všech prvků z $\mathcal{T}$ nejmenší vzdálenost od prvku f a tudíž minimalizuje výraz R z (1.46).

Krok III. Využijeme nyní získaných poznatků, především podmínky (1.50), k řešení naší původní úlohy. Předpokládáme, že obecný trigonometrický polynom T_n má tvar (1.45) a naše řešení T_n^* tvar

$$(1.52) \quad T_n^*(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx);$$

podmínku (1.50) pak můžeme zapsat takto:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^n (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx) - f(x) \right] dx = 0,$$

a tento vztah musí platit pro všechna $T_n \in \mathcal{T}$, tj. pro všechny hodnoty $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Provedeme-li naznačené početní úkony, dostaneme

$$\begin{aligned}
(1.53) \quad & \pi \left[\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \alpha_k + b_k \beta_k) \right] - \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} f(x) dx - \\
& - \sum_{k=1}^n \left[a_k \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \right] = 0
\end{aligned}$$

[využili jsme skutečnosti, že funkce $1, \sin kx, \cos kx$ ($k = 1, 2, \dots$) tvoří v $C(\langle 0, 2\pi \rangle)$ s naším skalárním součinem ortogonální systém a že je

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi].$$

V (1.53) jsou všechny koeficienty a_0, a_k, b_k libovolné. Zvolíme-li $a_j = 1$ pro nějaké j z množiny $\{0, 1, \dots, n\}$ a ostatní a_k a všechna b_k rovná nule resp. $b_j = 1$ a ostatní b_k a všechna a_k rovná nule, dostaneme pro α_j, β_j tyto hodnoty

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos jx \, dx \quad (j = 0, 1, \dots, n), \\ \beta_j &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin jx \, dx \quad (j = 1, 2, \dots, n).\end{aligned}$$

To jsou však známé *Fourierovy koeficienty* funkce f . Protože takto zvolená α_j, β_j splňují (1.53) [přesvědčte se o tom!], vyhovuje T_n^* podmínce (1.50) a řeší naši původní úlohu: *Nejlepší aproximací spojitě funkce trigonometrickým polynomem T_n ve smyslu střední kvadratické odchylky je částečný součet její Fourierovy řady.*

Poznámka V našem konkrétním případě jsme řešení dokonce rovnou sestrojili. Lze ukázat, že T_n^* je určeno *jednoznačně*: Kdyby totiž vedle T_n^* existovalo ještě další řešení T_n^{**} , musela by pro ně platit analogie vztahu (1.50), tj.

$$(T_n, T_n^{**} - f) = 0 \quad \text{pro všechna } T_n \in \mathcal{T}.$$

Pak ale také musí platit

$$(1.54) \quad (T_n, T_n^* - T_n^{**}) = 0 \quad \text{pro všechna } T_n \in \mathcal{T},$$

neboť $(T_n, T_n^* - T_n^{**}) = (T_n, (T_n^* - f) - (T_n^{**} - f)) = (T_n, T_n^* - f) - (T_n, T_n^{**} - f) = 0 - 0 = 0$. Speciálně musí platit (1.54) pro $T_n = T_n^* - T_n^{**}$, tj. bude

$$(T_n^* - T_n^{**}, T_n^* - T_n^{**}) = \|T_n^* - T_n^{**}\|^2 = 0.$$

Pak však musí být $T_n^* - T_n^{**} = 0$, tj. $T_n^{**} = T_n^*$.

Jeden „ekonomický“ problém

Uvažujme ekonomickou soustavu, tvořenou N výrobci; nechť i -tý výrobce produkuje množství x_i , nechť j -tému výrobcí dodává množství p_{ij} a mimo soustavu dodává množství b_i . Nechť je p_{ij} úměrné celkové výrobě x_j j -tého výrobce:

$$p_{ij} = a_{ij}x_j.$$

Bilanční vztahy tedy můžeme zapsat takto

$$x_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

To je soustava N rovnic pro N neznámých $x_1, x_2, \dots, x_N$ a problém nyní můžeme formulovat takto (krok I): Hledáme vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^n$ tak, aby pro danou matici $A = (a_{ij})$ a pro daný vektor $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ byla splněna rovnice

$$(1.55) \quad x = Ax + b.$$

Pokusíme se nyní tuto úlohu formulovat (a řešit) funkcionálně-analyticky (krok II). V rovnici (1.55) se neznámý prvek x vyskytuje na pravé i na levé straně. Budeme pravou stranu v (1.55) chápat jako *zobrazení*, jako *operátor* $\mathcal{A}$, který vektoru $x \in \mathbb{R}^N$ přiřazuje jako obraz vektor $Ax + b$. Rovnice (1.55) bude vyřešena, najdeme-li vektor x^* , pro který bude

$$(1.56) \quad x^* = \mathcal{A}x^*.$$

Takový vektor se nazývá *pevný bod operátoru* $\mathcal{A}$, a to i v obecnější situaci, kdy $\mathcal{A}$ je operátor, který prvky z obecného prostoru M zobrazuje opět do téhož prostoru M .

Vznikají dvě otázky: Za jakých podmínek existuje pro daný operátor $\mathcal{A}$ jeho pevný bod? [Pro $x \in \mathbb{R}$ nemá zobrazení $\mathcal{A}x = x + 1$ žádný pevný bod.] Jak lze pevný bod najít?

Na obě otázky odpovídá velmi obecná *Banachova věta*, s níž se setkáme později. Tam se uvažuje obecný *metrický* prostor (M, ρ) a požaduje se, aby operátor $\mathcal{A}$ byl tzv. *kontrahující operátor*, tj. aby existovalo číslo γ , $0 < \gamma < 1$, tak, že pro každé dva prvky $u, v \in M$ platí

$$(1.57) \quad \rho(\mathcal{A}u, \mathcal{A}v) \leq \gamma \rho(u, v),$$

tj. vzdálenost *obrazů* prvků u, v při zobrazení $\mathcal{A}$ je „ γ -krát“ menší (s číslem $\gamma < 1$) než vzdálenost prvků u, v samotných. Pak je zaručena existence pevného bodu operátoru $\mathcal{A}$ a Banachova věta dokonce udává metodu, jak tento pevný bod sestrojit.

Nyní použijeme těchto výsledků pro náš konkrétní případ, kdy je $M = \mathbb{R}^N$ a $\mathcal{A}x = Ax + b$ pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ (krok III).

Budiž $\|\cdot\|$ norma v $\mathbb{R}^N$ a ρ odpovídající metrika: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Pevný bod operátoru $\mathcal{A}$ – a tím i řešení rovnice (1.55) – můžeme najít, bude-li operátor $\mathcal{A}$ kontrahující. V našem případě je

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) &= \|Ax - Ay\| = \|(Ax + b) - (Ay + b)\| = \\ &= \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\|. \end{aligned}$$

Označíme-li $z = x - y$, bude operátor $\mathcal{A}$ kontrahující, bude-li platit

$$(1.58) \quad \|Az\| \leq \gamma \|z\|, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Jak víme z předcházejících příkladů, můžeme v $\mathbb{R}^N$ volit normu různým způsobem:

(a) Pro euklidovskou normu $\|\cdot\|_2$ – viz (1.19) – je pro $z = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N$

$$\|z\|_2^2 = \sum_{i=1}^N z_i^2;$$

dále je $Az = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, kde $u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}z_j$, a tedy

$$\begin{aligned} \|Az\|_2^2 &= \sum_{i=1}^N u_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}z_j \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^N z_j^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \right) \|z\|_2^2 \end{aligned}$$

[použili jsme Cauchyovu nerovnost (1.37) pro konečné posloupnosti]. Při použití této normy tedy bude operátor $\mathcal{A}$ kontrahující [a úloha (1.55) bude mít řešení], bude-li pro prvky a_{ij} matice A platit

$$0 < \gamma = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \right) < 1.$$

(b) Při použití normy $\|\cdot\|_1$ podle (1.20) bude

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^N |z_i|$$

a

$$\begin{aligned} \|Az\|_1 &= \sum_{i=1}^N |u_i| = \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N a_{ij}z_j \right| \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \cdot |z_j| = \\ &= \sum_{j=1}^N |z_j| \cdot \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \leq \left(\max_j \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \right) \|z\|_1 \end{aligned}$$

a operátor $\mathcal{A}$ bude kontrahující, bude-li

$$0 < \gamma = \max_j \sum_{i=1}^N |a_{ij}| < 1$$

(zde sečteme absolutní hodnoty prvků matice A v každém sloupci a z těchto součtů bereme maximum).

(c) Při použití normy $\|\cdot\|_\infty$ podle (1.24) bude

$$\|z\|_\infty = \max_i |x_i|,$$

$$\begin{aligned} \|Az\|_\infty &= \max_i |u_i| = \max_i \left| \sum_{j=1}^N a_{ij} z_j \right| \leq \\ &\leq \max_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \cdot |z_j| \leq \max_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \max_j |z_j| = \\ &= \left(\max_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right) \cdot \|z\|_\infty \end{aligned}$$

a operátor $\mathcal{A}$ bude kontrahující, bude-li

$$0 < \gamma = \max_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}| < 1$$

(zde sčítáme absolutní hodnoty prvků matice A v každém řádku a z těchto součtů bereme maximum).

Poznámka Rovnice (1.55) (či přesněji soustava lineárních algebraických rovnic) je poměrně jednoduchá a vlastně nebylo třeba používat tak silného aparátu jako je Banachova věta o pevném bodě. Použili jsme zde tento příklad spíše pro ilustraci; Banachova věta je vhodná pro řešení komplikovaných nelineárních rovnic. Použili jsme ji vlastně již v přednášce „Obyčejné diferenciální rovnice“ k důkazu existence řešení Cauchyovy úlohy pro diferenciální rovnici $y' = f(x, y)$, i když jsme neužívali jazyk funkcionální analýzy (viz [10]).

Kapitola 2

Prostory

2.1 Úplný metrický prostor. Banachův prostor

Protože řada praktických problémů se musí řešit přibližnými metodami, musíme upřesnit pojem „přibližně“. K tomu nám poslouží *metrika*, zavedená v definici 1.2 a umožňující zachytit rozdíl (vzdálenost) mezi přesným a přibližným řešením, a dále pojem *konvergence* (vzhledem k dané metrice), který umožňuje charakterizovat posloupnosti přibližných řešení, blížících se k přesnému řešení.

Všude v dalším budeme *prostor* jako abstraktní množinu s prvky $u, v, w, \dots$ značit X .

Definice 2.1 Budiž (X, ρ) metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků $u_n \in X$ je *konvergentní*, existuje-li prvek $u \in X$ tak, že platí

$$(2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u) = 0$$

[tj. *číselná* posloupnost vzdáleností prvků u_n od u konverguje k nule]. Prvek u nazýváme *limitou* posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zapíšeme to takto:

$$(2.2) \quad u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Poznámka Limita u konvergentní posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je určena *jednoznačně*. Kdyby totiž existoval další prvek $v \in X$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, v) = 0$, bylo by podle trojúhelníkové nerovnosti (M 2) a podle (M 3)

$$0 \leq \rho(u, v) \leq \rho(u, u_n) + \rho(u_n, v) = \rho(u_n, u) + \rho(u_n, v).$$

Provedeme-li zde limitní přechod pro $n \rightarrow \infty$, bude

$$0 \leq \rho(u, v) \leq 0 + 0 = 0;$$

to však znamená, že $\rho(u, v) = 0$, a tedy podle (M 1) musí být $u = v$.

Definice 2.2 Budiž $M \subset X$ podmnožina metrického prostoru (X, ρ) . Řekneme, že množina M je *uzavřená*, platí-li implikace

$$\left. \begin{array}{l} u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \\ u_n \in M \end{array} \right\} \Rightarrow u \in M.$$

[Jinými slovy: Množinu nazveme uzavřenou, jestliže limita každé konvergentní posloupnosti prvků z M rovněž patří do M .]

Úmluva Prázdnou množinu $\emptyset$ považujeme za uzavřenou.

Cvičení 2.1 Dokažte, že pro $X = \mathbb{R}$ a $\rho(x, y) = |x - y|$ ($x, y \in \mathbb{R}$) není množina M_1 všech *racionálních* čísel uzavřená a množina $M_2 = \langle 0, 1 \rangle$ je uzavřená.

Definice 2.3 Budiž u_0 prvek metrického prostoru (X, ρ) a r kladné číslo. Označme

$$K(u_0; r) = \{u \in X; \rho(u, u_0) < r\},$$

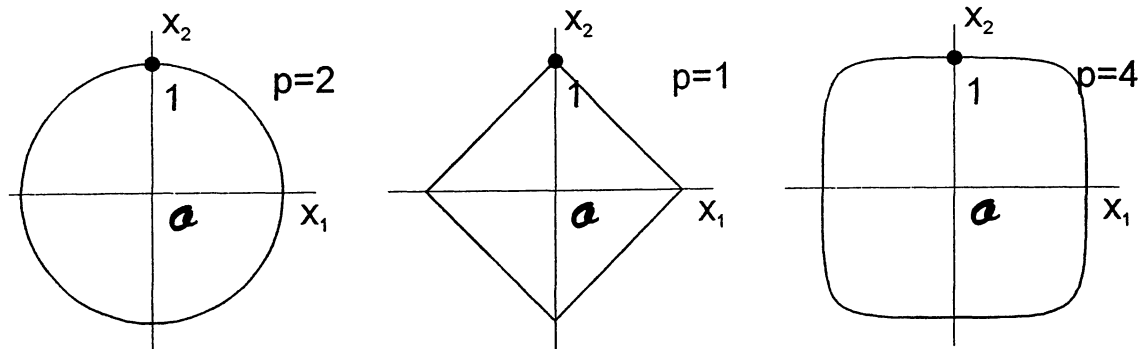
$$\overline{K}(u_0; r) = \{u \in X; \rho(u, u_0) \leq r\},$$

$$S(u_0; r) = \{u \in X; \rho(u, u_0) = r\}.$$

Pak nazveme $K(u_0; r)$ *otevřenou koulí* (o středu u_0 a poloměru r), $\overline{K}(u_0; r)$ *uzavřenou koulí* a $S(u_0; r)$ *sférou* (kulovou plochou).

Poznámka Množiny $\overline{K}(u_0; r)$ a $S(u_0; r)$ jsou uzavřené množiny (ve smyslu definice 2.2). Proto je název „uzavřená koule“ pro $\overline{K}(u_0; r)$ oprávněný.

Příklad 2.1 Zvolíme-li za X reálný lineární prostor $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) a za ρ euklidovskou metriku – viz (1.10), bude $K(u_0; r)$ otevřený kruh (resp. koule) a $S(u_0; r)$ kružnice (resp. povrch koule). Názvy v definici 2.3 tedy představují zobecnění geometricky názorných pojmů. Ale už volba $(X, \rho) = (\mathbb{R}^2, \rho_p)$, kde metrika ρ_p je dána vzorcem (1.11), ukazuje, že i v rovině může mít „kružnice“ $S(u_0; r)$ velice „nečekaný“ tvar. Následující obrázky znázorňují „jednotkové kružnice“ $S(o, 1)$ [za u_0 volíme počátek a klademe $r = 1$] v $(\mathbb{R}^2, \rho_p)$ pro různá p :



V obecném metrickém prostoru (X, ρ) s diskrétní metrikou ρ podle (1.13) pak už vůbec s názorem nevystačíme: Vzhledem k definici je zde

$$K(u_0; r) = \begin{cases} \{u_0\} & \text{pro } r \leq 1 \\ X & \text{pro } r > 1 \end{cases}, S(u_0; r) = \begin{cases} \emptyset & \text{pro } r \neq 1 \\ X \setminus \{u_0\} & \text{pro } r = 1 \end{cases}.$$

□

Definice 2.4 Budiž $M \subset X$ podmnožina metrického prostoru (X, ρ) . Řekneme, že množina M je *otevřená*, jestliže s každým ze svých prvků u obsahuje i vhodnou kouli $K(u, r)$.

[Jinými slovy: Množinu M nazveme otevřenou, když pro každý prvek $u \in M$ existuje kladné číslo $r = r(u)$ tak, že $K(u; r) \subset M$.]

Úmluva Prázdnou množinu $\emptyset$ považujeme za otevřenou. (Množina $\emptyset$ je tedy současně otevřená i uzavřená. Také množina X jako podmnožina metrického prostoru (X, ρ) je současně otevřená i uzavřená; zde to však plyne přímo z definic 2.2 a 2.4.)

Příklad 2.2 Zvolme X a ρ jako ve cvičení 2.1. Pak je množina $(0, 1)$ otevřená, množiny $\langle 0, 1 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ a $(0, 1]$ nejsou otevřené (dokažte!).

□

Příklad 2.3 Je-li (X, ρ) obecný metrický prostor, je množina $K(u_0; r_0)$ pro libovolné $u_0 \in X$ a pro libovolné $r_0 > 0$ otevřená množina (a název otevřená koule má tedy své oprávnění).

Budiž u libovolný prvek z $K(u_0; r_0)$. Potom $\rho(u, u_0) < r_0$ a tedy $r = r_0 - \rho(u, u_0) > 0$. Dokážeme, že $K(u; r) \subset K(u_0; r_0)$ [jinými slovy: pro každé $v \in K(u; r)$ platí $\rho(v, u) < r$].

Podle trojúhelníkové nerovnosti (M 3) je

$$\rho(v, u_0) \leq \rho(v, u) + \rho(u, u_0) < r + \rho(u, u_0) = r_0 - \rho(u, u_0) + \rho(u, u_0) = r_0,$$

a tedy $v \in K(u_0; r_0)$. Každý prvek v z $K(u; r)$ tedy patří současně do $K(u_0; r_0)$, tj. $K(u; r) \subset K(u_0; r_0)$. Tím jsme ukázali, že ke každému $u \in K(u_0; r_0)$ existuje koule se středem v u , která celá leží v $K(u_0; r_0)$, tj. $K(u_0; r_0)$ je podle definice 2.4 otevřená množina. □

Vztah mezi otevřenou a uzavřenou množinou udává následující tvrzení:

Věta 2.1 *Podmnožina M metrického prostoru (X, ρ) je uzavřená právě tehdy, je-li její doplněk $X \setminus M$ otevřená množina.*

Poznámka Vlastně bychom správně měli říkat, že množina M je otevřená (resp. uzavřená) „v X “, neboť budeme-li uvažovat pro $M \subset X$ dva metrické prostory, (X, ρ) a (M, ρ) (s metrikou definovanou v obou případech stejným způsobem), bude M jako podmnožina metrického prostoru (M, ρ) vždy uzavřená (i otevřená), ať je jako podmnožina metrického prostoru (X, ρ) jakákoliv. Zde si však dodatek „v X “ odpustíme, protože budeme mít vždy na mysli jeden *pevný* metrický prostor (X, ρ) .

Dále platí následující tvrzení, které je analogií známých vlastností množin v $\mathbb{R}^N$. Poznamenejme, že tyto vlastnosti jsou východiskem v teorii *topologických* prostorů, založených na pojmu otevřené množiny.

Věta 2.2 *Sjednocení libovolného počtu otevřených množin a průnik konečného počtu otevřených množin metrického prostoru (X, ρ) je opět otevřená množina. Průnik libovolného počtu uzavřených množin a sjednocení konečného počtu uzavřených množin je opět uzavřená množina.*

Každá podmnožina M metrického prostoru je podmnožinou nějaké uzavřené množiny, např. množiny X . Průnik všech uzavřených množin, které množinu M obsahují, je podle věty 2.2 opět uzavřenou množinou; současně je tento průnik (vzhledem k definici průniku) obsažen v každé z těchto uzavřených množin, a je tedy nejmenší uzavřenou množinou, která množinu M obsahuje. Tento průnik nazýváme *uzávěrem* množiny M a značíme ho $\overline{M}$.

Definice 2.5 Budiž (X, ρ) metrický prostor a $M \subset X$ podmnožina množiny X . Množinu

$$\overline{M} = \bigcap \{F; F \text{ je uzavřená, } M \subset F\}$$

nazýváme *uzávěrem* množiny M .

Uzávěr můžeme charakterizovat také pomocí následující věty:

Věta 2.3 Budiž M podmnožina metrického prostoru (X, ρ) . Prvek $u \in X$ patří do uzávěru $\overline{M}$ množiny M právě tehdy, existuje-li posloupnost $\{u_n\}$ prvků z M , pro něž platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

Uzávěr $\overline{M}$ je tedy množina všech limit konvergentních posloupností prvků z M . Zřejmě platí

$$(2.3) \quad M \subset \overline{M}.$$

Množina M je uzavřená právě tehdy, platí-li

$$(2.4) \quad M = \overline{M}.$$

Příklad 2.4 Budiž $X = \mathbb{R}$ a $\rho(x, y) = |x - y|$. Množiny $M_1 = (0, 1)$ a $M_2 = \langle 0, 1 \rangle$ mají též uzávěr: $\overline{M}_1 = \overline{M}_2 = \langle 0, 1 \rangle$. Množina $M_3 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ není podle věty 2.3 a podle (2.4) uzavřená, protože prvek 0 je limitou posloupnosti prvků z M_3 a nepatří do M_3 . Podle věty 2.3 je $\overline{M}_3 = M_3 \cup \{0\}$.

□

V analýze jsme se zabývali vlastně právě prostorem (X, ρ) z předcházejícího příkladu. Tam jsme se také setkali v tzv. *Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou*: Posloupnost reálných čísel u_n je konvergentní právě tehdy, existuje-li ke každému $\varepsilon > 0$ přirozené číslo $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tak, že platí

$$|u_n - u_m| < \varepsilon \quad \text{pro } m, n \geq n_0.$$

Pomocí metriky ρ můžeme poslední podmínku zapsat takto:

$$(2.5) \quad \rho(u_n, u_m) < \varepsilon \quad \text{pro } m, n \geq n_0.$$

Podívejme se, jak to vypadá v *obecném* metrickém prostoru.

Definice 2.6 Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků metrického prostoru (X, ρ) se nazývá *cauchyovská* (nebo také *fundamentální*), existuje-li ke každému $\varepsilon > 0$ přirozené číslo $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tak, že platí (2.5).

Věta 2.4 Každá konvergentní posloupnost prvků metrického prostoru (X, ρ) je *cauchyovská*.

Důkaz plyne z trojúhelníkové nerovnosti (M 3): Je-li $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní posloupnost, tj. existuje-li prvek u tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u) = 0$, znamená to, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $\rho(u_n, u) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $n \geq n_0$. Ale pak je podle (M 3) (pro $m, n \geq n_0$)

$$\rho(u_n, u_m) \leq \rho(u_n, u) + \rho(u, u_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a to je právě (2.5). ■

Příklad 2.5 V prostoru (X, ρ) s $X = \mathbb{R}$ a $\rho(x, y) = |x - y|$ lze tuto větu *obrátit*; plyne to z výše uvedeného Bolzanova-Cauchyova kritéria. Obecně však větu 2.4 nelze obrátit: Zvolíme-li $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ a $\rho(x, y) = |x - y|$, je posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ s $u_n = \frac{1}{n}$ *cauchyovská*, ale *není v prostoru (X, ρ) konvergentní*. □

Poznámka Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \rho)$, ale v prostoru $(\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}, \rho)$ nekonverguje, protože nula do prostoru X nepatří. To ukazuje, že je důležité, ve kterém metrickém prostoru danou posloupnost uvažujeme.

Existují tedy metrické prostory, v nichž ne každá cauchyovská posloupnost konverguje (viz též později příklad 2.8). Platí však

Lemma 2.1 *Budiž $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru (X, ρ) a nechť existuje konvergentní podposloupnost $\{u_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak je také posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j}.$$

Důkaz Budiž $u = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j}$ a budiž $\varepsilon > 0$. Pak existuje j_0 tak, že $\rho(u_{n_j}, u) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $j \geq j_0$. Protože posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, existuje n_0 tak, že pro $m, n \geq n_0$ je $\rho(u_m, u_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože $n_j \rightarrow \infty$ pro $j \rightarrow \infty$, existuje číslo $j_1 \geq j_0$ tak, že $n_j \geq n_0$ pro $j \geq j_1$. Protože $n_j \geq n_0$ a $j_1 \geq j_0$, platí pro $n \geq n_0$ podle (M 3)

$$\rho(u_n, u) \leq \rho(u_n, u_{n_j}) + \rho(u_{n_j}, u) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
■

Definice 2.7 Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *úplný*, je-li každá cauchyovská posloupnost prvků prostoru X konvergentní.

Definice 2.8 Řekneme, že *metrický prostor (X, ρ) je kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků prostoru X lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Podmnožinu $M \subset X$ nazveme kompaktní, je-li metrický prostor (M, ρ) [jako podprostor metrického prostoru (X, ρ)] kompaktní.

Z lemmatu 2.1 ihned plyne

Věta 2.5 *Každý kompaktní metrický prostor je úplný.*

Ani tuto větu *nelze obrátit*. Ukazuje to tento příklad.

Příklad 2.6 Budiž $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ [viz příklad 1.1 (iii)] a

$$\rho(u, v) = \max_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |u(t) - v(t)|$$

[viz příklad 1.6 (ii) a vzorec (1.18)]. Konvergence v tomto metrickém prostoru je *stejněměrná konvergence*, a z vlastností stejnoměrné konvergence plyne, že prostor (X, ρ) je úplný. Není však kompaktní: Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $u_n(t) = n$ pro $0 \leq t \leq 1$, je tvořena prvky z (X, ρ) , ale žádná její podposloupnost nekonverguje k prvku z $C(\langle 0, 1 \rangle)$. □

Chování podmnožin metrického prostoru (X, ρ) (chápaných jako podprostory, tj. opatřených stejnou metrikou) je popsána následujícími větami.

Věta 2.6 Budiž (X, ρ) úplný metrický prostor. Podmnožina $M \subset X$ je úplná právě tehdy, je-li uzavřená.

Věta 2.7 Budiž (X, ρ) kompaktní metrický prostor. Podmnožina $M \subset X$ je kompaktní právě tehdy, je-li uzavřená.

Nejjednodušším příkladem metrického prostoru je množina $\mathbb{R}$ reálných čísel, opatřená metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ (viz příklad 2.5). Označíme-li $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ množinu všech *racionálních* čísel, pak metrický prostor $(\mathcal{R}, \rho)$ *není úplný*, protože množina $\mathcal{R}$ není uzavřená: Posloupnost racionálních čísel $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k *iracionálnímu* číslu e , $e \notin \mathcal{R}$.

Víme ovšem z analýzy, že každé iracionální číslo je limitou posloupnosti čísel racionálních a že tedy množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ můžeme konstruovat pomocí množiny racionálních čísel $\mathcal{R}$. Tento přechod od *neúplného* prostoru $\mathcal{R}$ k *úplnému* prostoru $\mathbb{R}$ je příkladem obecného procesu, kterému říkáme „zúplnění“.

Definice 2.9 Budiž (X, ρ) metrický prostor. Řekneme, že podmnožina $M \subset X$ je *hustá* v X , platí-li

$$\overline{M} = X.$$

Příklad 2.7 Množina $\mathcal{R}$ všech racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$ (vzhledem k metrice $\rho(x, y) = |x - y|$), neboť každé reálné číslo x je limitou posloupnosti racionálních čísel x_n (např. můžeme x_n zvolit tak, že v desetinném rozvoji čísla x nahradíme číslice za n -tým místem za desetinnou čárkou nulou, $n = 1, 2, \dots$). □

Definice 2.10 Nechť jsou (X, ρ) a (Y, σ) dva metrické prostory. Prostor (X, ρ) nazýváme *zúplněním* (nebo *úplným obalem*) prostoru (Y, σ) , jsou-li splněny následující podmínky:

- (i) Prostor (Y, σ) je podprostorem prostoru (X, ρ) , tj. Y je podmnožina množiny X a pro $u, v \in Y$ je $\rho(u, v) = \sigma(u, v)$.
- (ii) Množina Y je hustá v X , tj. uzávěr množiny Y (v prostoru (X, ρ) !) je roven X .
- (iii) Prostor (X, ρ) je úplný.

Platí následující důležité tvrzení.

Věta 2.8 *Každý metrický prostor má úplný obal.*

Důkaz této věty zde nebudeme provádět; popis konstrukce úplného obalu lze najít např. v [3] a spočívá zhruba řečeno v tom, že se pro neúplný metrický prostor (Y, σ) definují jisté tzv. „ideální“ prvky, ty se přidají k prvkům množiny Y a na tuto rozšířenou množinu se rozšíří i metrika σ . Nevýhodou je, že konkrétní charakter těchto ideálních prvků nelze vždy uspokojivě udat, i když jejich existenci lze dokázat.

Úplný obal lze ovšem zkonstruovat snadno tehdy, je-li neúplný metrický prostor (Y, σ) podprostorem úplného metrického prostoru (X, ρ) : Zúplněním bude uzávěr $\bar{Y}$ množiny Y , který opatříme metrikou ρ , omezenou ovšem jen na množinu $\bar{Y}$.

Definice 2.11 Dva metrické prostory (X_1, ρ_1) a (X_2, ρ_2) nazveme *izometrickými*, existuje-li zobrazení F prostoru X_1 na prostor X_2 , tj.

$$F : X_1 \rightarrow X_2, \quad F(X_1) = X_2,$$

takové, že platí

$$\rho_2(F(u), F(v)) = \rho_1(u, v).$$

Každé takové zobrazení F nazveme *izometrií* (X_1 na X_2).

Věta 2.9 *Každé dva úplné obaly téhož metrického prostoru jsou izometrické.*

Vzhledem k této větě můžeme různé úplné obaly téhož prostoru (X, ρ) *ztožňit*.

Zúplnění metrického prostoru (X, ρ) závisí podstatně na tom, *jaké metriky je použito*. Ukazuje to tento příklad:

Příklad 2.8 Budiž $X = C([0, 1])$ a $\rho(u, v) = \max_{t \in [0, 1]} |u(t) - v(t)|$. Pak je metrický prostor (X, ρ) úplný (viz příklad 2.6). Zvolíme-li pro týž prostor X metriku

$$(2.6) \quad \rho_p(u, v) = \left(\int_0^1 |u(t) - v(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

[viz příklad 1.6 (i) a vzorec (1.18)], bude prostor (X, ρ_p) neúplný: Položíme-li totiž

$$(2.7) \quad u_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 1 - n(t - \frac{1}{2}), & t \in \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \rangle, \\ 0, & t \in \langle \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1 \rangle, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \dots$ (nakreslete si obrázek!), bude pro $m \geq n$

$$\rho_p(u_m, u_n) = \frac{m-n}{m} \left(\frac{1}{p+1} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{p+1} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}}$$

a posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská (vzhledem k metrice ρ_p !), ale přesto neexistuje žádná spojitá funkce $u \in C(\langle 0, 1 \rangle)$, pro kterou by platilo $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_p(u_n, u) = 0$.

Podle věty 2.8 tedy existuje úplný obal prostoru (X, ρ_p) ; později ukážeme, že to je metrický prostor

$$(L^p(0, 1), \rho_p),$$

kde prostor $L^p(0, 1)$ je definován v příkladu 2.1 (v). V tomto úplném metrickém prostoru konverguje posloupnost $\{u_n\}$ z (2.7) k funkci

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 0 & \text{pro } t \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \end{cases}$$

kteřá je ovšem nespojitá, a tedy nepatří do $C(\langle 0, 1 \rangle)$.

□



I když jsme v předcházejících příkladech pracovali většinou s lineárními prostory, není zde linearita podstatná; u metrických prostorů je důležitý především pojem metriky, umožňující definovat vzdálenost dvou prvků a rozhodnout o konvergenci dané posloupnosti. V dalším se však omezíme na lineární prostory, a na jejich speciální třídu, nesoucí jméno Stefana BANACHA (1892 – 1945). Jeho kniha „Théorie des opérations linéaires“, vydaná v roce 1932, vlastně znamenala vznik funkcionální analýzy jako samostatné disciplíny.

Definice 2.12 Normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|)$ nazveme *Banachovým prostorem* (krátce též *B-prostorem*), je-li vzhledem k metrice ρ , definované pomocí normy $\|\cdot\|$ vzorcem

$$(2.8) \quad \rho(u, v) = \|u - v\|, \quad u, v \in X,$$

úplným metrickým prostorem.

Příklad 2.9 K nejjednodušším Banachovým prostorům patří prostor $\mathbb{R}^N$ N -dimenzionálních reálných vektorů $u = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, opatřený euklidovskou normou

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

resp. prostor $\mathbb{C}^N$ N -dimenzionálních komplexních vektorů $u = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ (zde jsou x_i komplexní čísla), opatřený toutéž normou. □

Cvičení 2.2 Protože Banachův prostor je speciální případ metrického prostoru, lze všechny dosud zavedené pojmy přenést na B -prostory. Proveďte proto „přeformulování“ definic konvergence, koule, sféry atd. pro případ, kdy je metrika dána vzorcem (2.8).

Poznámka O konvergenci posloupnosti $\{u_n\}$ v B -prostoru $(X, \|\cdot\|)$ hovoříme někdy jako o silné konvergenci, abychom ji odlišili od slabé konvergence, s níž se setkáme později. Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ tedy konverguje silně k u v $(X, \|\cdot\|)$, platí-li

$$(2.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Normu prvku u v Banachově prostoru X budeme někdy značit též symbolem

$$(2.10) \quad \|u\|_X.$$

Než si všimneme důležitých konkrétních B -prostorů, zavedeme ještě několik pojmů.

Definice 2.13 Budiž X lineární prostor a nechť jsou na X dány dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Řekneme, že tyto normy jsou *ekvivalentní*, existují-li dvě kladná čísla c, C tak, že pro všechna $u \in X$ platí

$$(2.11) \quad c\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C\|u\|_1.$$

Použití ekvivalentních norem je často výhodné v aplikacích. Především se při přechodu od normy $\|\cdot\|_1$ k ekvivalentní normě $\|\cdot\|_2$ (a naopak) zachovává konvergence, neboť z (2.11) plyne

$$c\|u_n - u\|_1 \leq \|u_n - u\|_2 \leq C\|u_n - u\|_1.$$

Příklad 2.10 Budiž $X = \mathbb{R}^N$ a $u = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Víme už, že výraz

$$(2.12) \quad \|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

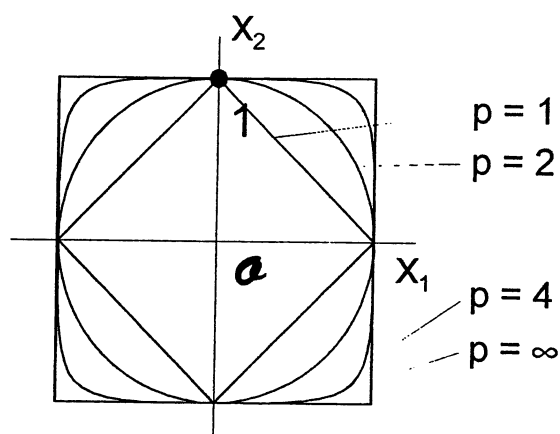
je pro libovolné $p \geq 1$ normou (viz příklad 1.5). Všechny tyto normy jsou (pro různá p) navzájem ekvivalentní a jsou také ekvivalentní s normou

$$\|u\|_{\infty} = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|).$$

Plyne to mj. i z tvaru (uzavřených) jednotkových koulí v $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$, tj. množin

$$\overline{K}(0; 1) = \{u; \|u\|_p \leq 1\}$$

(viz obrázek, kde je $N = 2$).



□

Definice 2.14 Budiž dán konečný počet normovaných lineárních prostorů $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2), \dots, (X_N, \|\cdot\|_N)$. Označme

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$$

kartézský součin množin $X_1, X_2, \dots, X_N$, tj. X je množina všech N -tic $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, kde $u_i \in X_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Definujeme-li součet prvků u a $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ z X a λ -násobek prvku $u \in X$ předpisem

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_N + v_N), \\ \lambda u &= (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_N), \end{aligned}$$

bude X opět lineární prostor. Definujeme na X normu předpisem

$$(2.13) \quad \|u\| = \sum_{j=1}^N \|u_j\|_j, \quad u \in X$$

a lineární normovaný prostor $(X, \|\cdot\|)$ nazveme *kartézským součinem* lineárních normovaných prostorů $(X_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Jsou-li prostory $(X_j, \|\cdot\|_j)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) Banachovy prostory, je i prostor $(X, \|\cdot\|)$ Banachův.

Operace „násobení“ tedy umožňuje vytvářet ze známých B -prostorů další nové Banachovy prostory. Přitom je zřejmé, že jde o analogii s vlastnostmi prostoru $\mathbb{R}^N$ resp. $\mathbb{C}^N$, kde ovšem vzhledem k (2.13) pracujeme v kartézském součinu s analogií normy $\|u\|_1$ z (2.12) (tj. volíme zde $p = 1$ a místo $|x_j|$ klademe $\|u_j\|_j$).

Další operací nad Banachovými prostory je tvoření tzv. *faktorových prostorů*: Budiž nejprve X libovolný lineární prostor a $X_0 \subset X$ jeho lineární podprostor. Zavedeme na množině X relaci $\sim$ předpisem

$$(2.14) \quad u \sim v \iff u - v \in X_0.$$

Relaci $\sim$ nazveme ekvivalencí; je ihned vidět, že má „běžné“ vlastnosti *reflexivity*: $u \sim u$, *symetrie*: $u \sim v \iff v \sim u$ a *transitivity*: $u \sim v, v \sim w \Rightarrow u \sim w$. Pro pevný prvek $u \in X$ zavedeme množinu

$$(2.15) \quad [u] = \{v \in X; u - v \in X_0\} = \{v \in X; u \sim v\}$$

a nazveme ji *třídou ekvivalence* (odpovídající prvku u). V množině všech těchto tříd definujeme součet dvou tříd $[u]$, $[v]$ a λ -násobek třídy $[u]$ předpisem

$$\begin{aligned} [u] + [v] &= [u + v], \\ \lambda[u] &= [\lambda u]. \end{aligned}$$

Dostaneme tak lineární prostor [dokažte, že podmínky (L 1) – (L 7) z definice 1.1 jsou skutečně splněny], který nazveme *faktorovým prostorem* (X podle X_0) a označíme symbolem

$$(2.16) \quad X|X_0.$$

Je-li navíc $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor a X_0 uzavřený podprostor prostoru X , lze na faktorovém prostoru $X|X_0$ zavést normu předpisem

$$(2.17) \quad \|[u]\|_{X|X_0} = \inf\{\|v\|; v \in [u]\}.$$

Tím bude faktorový prostor dokonce normovaným lineárním prostorem. Platí nyní následující tvrzení.

Věta 2.10 *Je-li $(X, \|\cdot\|)$ Banachův prostor a $X_0 \subset X$ uzavřený lineární podprostor, je také faktorový prostor $(X|X_0, \|\cdot\|_{X|X_0})$ Banachovým prostorem.*

Příklad 2.11 Budiž X unitární prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$ [viz definici 1.4]. Ten je pak současně normovaným lineárním prostorem vzhledem k normě $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Budiž u_0 pevný prvek prostoru X a definujme

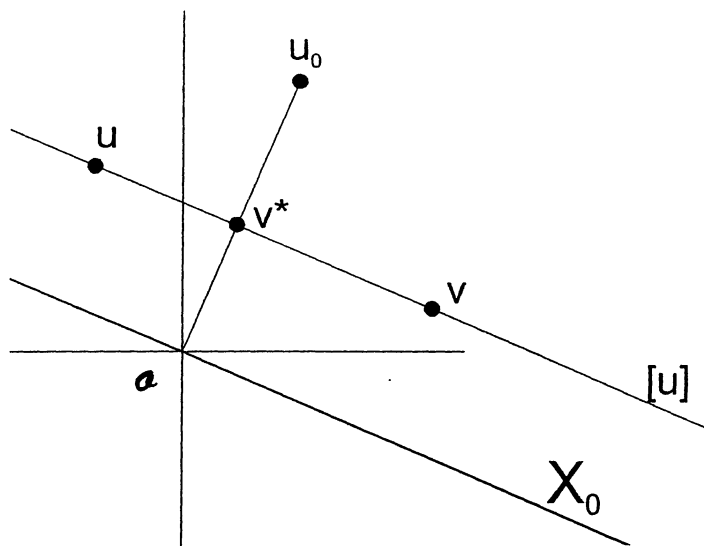
$$(2.18) \quad X_0 = \{w \in X; (w, u_0) = 0\}.$$

Z vlastností skalárního součinu plyne, že X_0 je lineárním podprostorem prostoru X , a to dokonce uzavřeným. Podle definice je pro pevné $u \in X$

$$\begin{aligned} [u] &= \{v \in X; u \sim v\} = \{v \in X; u - v \in X_0\} = \\ &= \{v \in X; (u - v, u_0) = 0\}, \end{aligned}$$

tj. $[u]$ je množina všech těch prvků $v \in X$, pro něž je skalární součin (v, u_0) roven konstantě (u, u_0) (uvědomte si, že u_0 i u jsou zde pevné prvky).

Využijeme-li toho, že (2.18) znamená, že prvek w je kolmý k u_0 , můžeme si celou situaci znázornit na obrázku:



X_0 je „přímka“ procházející počátkem o a kolmá ke spojnici prvků u_0 a o . Pro pevné u je $[u]$ „přímka“ rovnoběžná s X_0 a procházející bodem (prvkem) u , neboť pro běžný prvek $v \in [u]$ je spojnice u a v kolmá ke spojnici o a u_0 . Navíc je

$$\|[u]\|_{X|X_0} = \|v^*\|,$$

kde v^* je „průsečík“ „přímky“ $[u]$ a „přímky“, určené prvky o a u_0 . □

2.2 Prostory funkcí, prostory posloupností

K nejdůležitějším lineárním normovaným prostorům, s nimiž se v aplikacích setkáváme, patří tzv. *prostory funkcí*. Jejich prvky jsou funkce (reálné nebo komplexní), které mají společný definiční obor. Budeme uvažovat funkce $u = u(x)$,

kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ je bod N -rozměrného euklidovského prostoru ($N \geq 1$) a za společný definiční obor zvolíme množinu

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

Uvažujme tedy reálné nebo komplexní funkce N reálných proměnných $x_1, x_2, \dots, x_N$, které jsou všechny definovány na množině Ω , a pro funkce $u = u(x)$ a $v = v(x)$ definujeme jejich součet $u + v$ resp. jejich λ -násobek λu , kde λ je reálné nebo komplexní číslo, obvyklým způsobem, totiž bodově:

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

$$(\lambda u)(x) = \lambda \cdot u(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Je ihned vidět, že takto definované operace sčítání a násobení číslem mají vlastnosti (L 1) až (L 7), požadované v definici 1.1. Nulový prvek o je funkce identicky rovná nule.

Definice 2.15 Symbolem

$$C(\Omega)$$

označíme množinu všech funkcí $u = u(x)$ definovaných a *spojitých* na Ω .

Definice 2.16 Budiž Ω omezená množina v $\mathbb{R}^N$, tj. existuje koule $K(0, R)$ v $\mathbb{R}^N$ se středem v počátku 0 a o dostatečně velkém poloměru $R > 0$, takže

$$\Omega \subset K(0, R),$$

a budiž $\partial\Omega$ hranice množiny Ω . Označme

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

uzávěr množiny Ω (v euklidovské metrice prostoru $\mathbb{R}^N$) a budiž

$$C(\overline{\Omega})$$

množina všech funkcí $u = u(x)$ spojitých na $\overline{\Omega}$. Dále budiž pro $u \in C(\overline{\Omega})$

$$(2.19) \quad \|u\|_C = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Množiny $C(\Omega)$ i $C(\overline{\Omega})$ jsou zřejmě lineární prostory, protože součet dvou spojitých funkcí a λ -násobek spojitě funkce je opět funkce spojitá. Výraz $\|u\|_C$ má smysl pro $u \in C(\overline{\Omega})$, neboť podle Weierstrassovy věty spojitá funkce nabývá na omezené uzavřené množině svého maxima.

Cvičení 2.3 Dokažte, že výraz $\|u\|_C$ má vlastnosti normy (N 1) – (N 3) (viz definici 1.3).

Prostor $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_C)$ je tedy lineární normovaný prostor. Konvergence v odpovídající metrice

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_C = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x) - v(x)|$$

je vlastně *stejněměrná konvergence*. Platí dokonce následující tvrzení.

Věta 2.11 *Prostor $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_C)$ je Banachův prostor.*

Důkaz plyne z Bolzanova-Cauchyova kritéria konvergence číselných řad a ze skutečnosti, že limita stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých funkcí je opět funkce spojitá. ■

Všude v dalším budeme předpokládat, že množina Ω je *oblast*, tj. otevřená *souvislá* množina v $\mathbb{R}^N$ (připomeňme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je souvislá množina, pokud každé dva její body je možné spojit jednoduchou křivkou, která celá leží v Ω , viz např. [9]). Dále zavedeme tzv. *multiindex* α jako vektor

$$(2.20) \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N), \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$$

jehož složky α_j jsou nezáporná celá čísla. Číslo $|\alpha|$ nazveme *délkou multiindexu* α . Multiindex budeme používat k zápisu (parciálních) derivací funkce $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N)$:

$$(2.21) \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Poznámka Poslední zápis nerespektuje pořadí derivování. Např. pro $N = 2$ a $\alpha = (1, 2)$ může symbol

$$D^\alpha u, \quad |\alpha| = 1 + 2 = 3$$

znamenat jak $\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}$, tak $\frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}$ nebo $\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1}$. Z analýzy víme, že tyto derivace třetího řádu jsou totožné, jsou-li spojitě, a my budeme v dalším vždy uvažovat funkce se spojitými derivacemi.

Definice 2.17 Budiž Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ a k nezáporné celé číslo ($k = 0, 1, \dots$). Množinu všech funkcí $u = u(x)$ definovaných na $\overline{\Omega}$, majících na Ω spojitě (parciální) derivace až do řádu k včetně a takových, že pro každý multiindex α , $|\alpha| \leq k$ existuje funkce $v_\alpha = v_\alpha(x) \in C(\overline{\Omega})$ tak, že platí

$$D^\alpha u(x) = v_\alpha(x) \text{ pro všechna } x \in \Omega,$$

označíme

$$C^k(\overline{\Omega}).$$

Poznámky (i) Pro $k = 0$ píšeme někdy $C(\overline{\Omega})$ místo $C^0(\overline{\Omega})$. Je zřejmé, že $C^0(\overline{\Omega})$ není nic jiného než prostor $C(\overline{\Omega})$ z definice 2.16.

(ii) Protože derivaci $D^\alpha u$ můžeme definovat jen pro vnitřní body množiny Ω , je nutné v definici 2.17 zavést ještě funkci v_α , která je uvnitř Ω totožná s $D^\alpha u$, ale je spojitá na $\overline{\Omega}$, tj. až do hranice. Říkáme též, že derivace $D^\alpha u$ se dá spojitě prodloužit na celou uzavřenou množinu $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Proto budeme většinou (poněkud nepřesně) uvažovat derivaci $D^\alpha u(x)$ i pro $x \in \partial\Omega$ s tím, že budeme mít na mysli její spojitě prodloužení v_α .

Protože také derivování je lineární operace, je $C^k(\overline{\Omega})$ lineární prostor. Navíc platí

Věta 2.12 *Zavedeme-li na množině $C^k(\overline{\Omega})$ normu předpisem*

$$(2.22) \quad \|u\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|,$$

je $(C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k})$ Banachův prostor.

Důkaz využívá věty 2.11 a toho, že prostor $C^k(\overline{\Omega})$ lze chápat jako součin prostorů $C(\overline{\Omega})$ (viz definici 2.14). Funkci u ztotožníme s vektorovou funkcí $v(x)$, jejímiž složkami jsou funkce u a její derivace $D^\alpha u$ pro všechny multiindexy α délky nejvýše k : $|\alpha| \leq k$. Ve smyslu předchozí poznámky ztotožníme $D^\alpha u$ s funkcí v_α a v_α patří podle definice do $C(\overline{\Omega})$, takže se jedná o součin prostorů $X_\alpha = C(\overline{\Omega})$, $v_\alpha \in X_\alpha$, $|\alpha| \leq k$.

(POZOR: Už v definici normy (2.22) jsme $D^\alpha u$ ztotožnili s v_α , jinak bychom nemohli hovořit o maximu derivací na uzávěru $\overline{\Omega}$!)

■

Definice 2.18 *Nosičem funkce $u = u(x)$ definované na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ nazveme množinu*

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$$

(pruh značí uzávěr v euklidovské metrice; supp je odvozeno od slova *support*).

Symbolem

$$C_0^\infty(\Omega)$$

označíme množinu všech funkcí $u = u(x)$ definovaných na Ω , které tam mají derivace všech řádů a pro jejichž nosič platí: množina $\text{supp } u$ je omezená a je částí oblasti Ω :

$$\text{supp } u \subset \Omega.$$

Pro omezenou oblast Ω zavedeme ještě množinu

$$C^\infty(\overline{\Omega})$$

předpisem

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Množiny $C^\infty(\overline{\Omega})$ a $C_0^\infty(\Omega)$ jsou lineární prostory (dokažte!).

Budiž $u = u(x)$ funkce definovaná na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a budiž λ reálný parametr, $0 < \lambda \leq 1$. Řekneme, že funkce u splňuje na Ω *Hölderovu podmínku* (s exponentem λ), existuje-li konstanta $C > 0$ (závislá ovšem na u) tak, že pro všechna $x, y \in \Omega$ je

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\lambda.$$

Zřejmě pak platí $u \in C(\Omega)$.

Pro funkci $u \in C(\overline{\Omega})$ označme

$$(2.23) \quad H_\lambda(u) = \sup_{\substack{x, y \in \overline{\Omega}, \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Poznámka Pro funkci $u \in C(\overline{\Omega})$ značí tedy $H_\lambda(u)$ nejmenší konstantu $C > 0$, pro niž je splněna Hölderova podmínka.

Definice 2.19 Symbolem

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$$

označíme množinu všech funkcí $u = u(x) \in C^k(\overline{\Omega})$, pro něž platí

$$H_\lambda(D^\alpha u) < \infty \text{ pro všechna } \alpha, \quad |\alpha| = k.$$

(Tj. $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ je podmnožina všech funkcí $u \in C^k(\overline{\Omega})$, jejichž k -té derivace $D^k u$ splňují Hölderovu podmínku s konstantou $C = H_\lambda(D^k u)$. Opět ztotožňujeme $D^\alpha u$ s funkcí v_α – viz definici 2.17.)

Cvičení 2.4 Dokažte tato tvrzení: (i) $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ je Banachův prostor, zavedeme-li normu předpisem

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}} = \|u\|_{C^k} + \sum_{|\alpha|=k} H_\lambda(D^\alpha u).$$

(ii) Platí

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^{k,\mu}(\overline{\Omega}) \text{ pro } 0 < \mu < \lambda \leq 1,$$

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^k(\overline{\Omega}) \text{ pro } k \geq 1, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Příklad 2.12 Prostory $C^k(\overline{\Omega})$ a $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ hrají důležitou roli při vyšetřování okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice. Zavedeme-li např. tzv. *Laplaceův operátor* Δ předpisem

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$$

pro $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, pak tzv. *Dirichletova úloha*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ v } \Omega, \\ u &= g \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

popisuje např. rozdělení teploty v tělese tvaru Ω , průhyb membrány (pro $N = 2$) atd. Zde jsou f a g dané funkce, definované v Ω , resp. na $\partial\Omega$ a u je hledané řešení. O klasickém řešení Dirichletovy úlohy pak hovoříme, je-li

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

□

Prostory typu C^k , $C^{k,\lambda}$ nazýváme souhrně *prostory spojitých funkcí*. V praxi se ukazuje, že požadavek spojitosti funkce u a jejích derivací je značně restriktivní, a proto zavedeme obecnější *prostory integrovatelných funkcí*. Nejprve si však uvedeme ještě jedno kritérium kompaktnosti množin v prostoru $C^k(\overline{\Omega})$; následující větu dokázali italští matematikové ARZELÀ a ASCOLI, a proto nese jejich jméno.

Věta 2.13 *Budiž Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ a budiž M uzavřená podmnožina prostoru $(C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k})$. K tomu, aby množina M byla kompaktní, je nutné a stačí, aby*

(i) *funkce $u \in M$ byly stejně omezené, tj. existuje číslo $C_0 > 0$ tak, že pro všechny funkce $u \in M$ platí*

$$\|u\|_{C^k} \leq C_0,$$

(ii) *funkce $u \in M$ byly stejně spojitě, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (které nezávisí na $u \in M$) tak, že ze vztahu*

$$|x - y| < \delta, \quad x, y \in \Omega$$

plyne

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| < \varepsilon$$

pro všechna α , $|\alpha| \leq k$, a pro všechny funkce $u \in M$.

Definice 2.20 Budiž $p > 0$ a Ω oblast v $\mathbb{R}^N$. Symbolem

$$\mathcal{L}^p(\Omega)$$

označíme množinu všech měřitelných funkcí $u = u(x)$ definovaných na Ω , pro něž je číslo

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx$$

konečné. Symbolem

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega)$$

označíme množinu všech měřitelných funkcí $u = u(x)$ definovaných na Ω , které mají tuto vlastnost: Existuje číslo a (závisející obecně na funkci u) tak, že

$$\text{meas}(\{x \in \Omega; |u(x)| \geq a\}) = 0$$

[zde je $\text{meas } E$ (Lebesgueova) míra množiny E].

Poznámka (i) Prostory $\mathcal{L}^p(\Omega)$ i $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ jsou lineární prostory. [Dokažte to! U prostoru $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ je to zřejmé, u prostoru $\mathcal{L}^p(\Omega)$ je to – v případě součtu – poněkud složitější. Pro $p \geq 1$ je třeba využít nerovnosti

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p),$$

která platí pro všechna nezáporná čísla a, b – viz příklad 1.1 (iv) a (v).]

(ii) Zavedeme-li čísla

$$(2.24) \quad \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

a

$$(2.25) \quad \|u\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

kde poslední výraz – tzv. *esenciální (podstatné) supremum* – je definován takto:

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{a > 0 : \text{meas}(\{x \in \Omega; |u(x)| \geq a\}) = 0\},$$

nebo

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf_{\text{meas } N = 0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)|,$$

pak lze ukázat, že [v případě (2.24) pro $p \geq 1$] mají vlastnosti normy až na vlastnost (N 1): Je-li totiž funkce u nenulová na množině $E \subset \Omega$, která má nulovou míru, je vzhledem k definici Lebesgueova integrálu $\|u\|_p = 0$ i $\|u\|_\infty = 0$. Později ukážeme, jak lze tento „nedostatek“ obejít.

(iii) Prostory $\mathcal{L}^p(\Omega)$ se nazývají *Lebesgueovy prostory*. Jejich zobecněním jsou tzv. *Orliczovy prostory*

$$\mathcal{L}^\Phi(\Omega),$$

definované jako množina všech měřitelných funkcí $u = u(x)$, $x \in \Omega$, pro něž je

$$\rho(\Phi; u) = \int_{\Omega} \Phi(|u(x)|) dx < \infty.$$

Zde je $\Phi = \Phi(t)$ tzv. *Youngova funkce*, definovaná předpisem

$$(2.26) \quad \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds,$$

kde $\varphi = \varphi(s)$ je spojitá rostoucí funkce, definovaná pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$ a taková, že $\varphi(0) = 0$.

Lebesgueovy prostory $\mathcal{L}^p(\Omega)$ jsou pro $p > 1$ speciálním případem Orliczových prostorů. Dostaneme je, položíme-li

$$\varphi(t) = t^{p-1}.$$

(iv) Orliczovy prostory $\mathcal{L}^\Phi(\Omega)$ obecně nejsou lineární množiny. Ukazuje to příklad funkce

$$\Phi(t) = e^t :$$

Pro $N = 1$, $\Omega = (0, 1)$ patří funkce

$$u(x) = -\frac{1}{2} \ln x$$

do $\mathcal{L}^\Phi(\Omega)$, ale funkce $2u(x) = -\ln x$ už ne!

Odvodíme si nyní několik důležitých nerovností. Budiž $\Phi = \Phi(t)$ funkce, definovaná formulí (2.26) pomocí funkce φ , a budiž

$$\Psi(t) = \int_0^t \varphi^{-1}(s) ds,$$

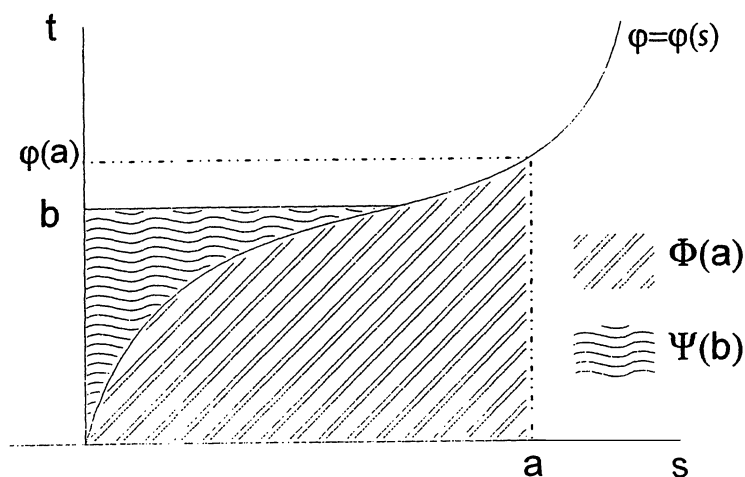
kde φ^{-1} je funkce inverzní k φ . Pak platí pro každou dvojici nezáporných čísel a, b *Youngova nerovnost*

$$(2.27) \quad a \cdot b \leq \Phi(a) + \Psi(b);$$

znaménko rovnosti zde platí právě tehdy, je-li $b = \varphi(a)$.

Důkaz si můžeme ozřejmit obrázkem, kde je $b < \varphi(a)$.

$$\begin{array}{l} \perp \Psi \\ \neq 0 \\ \perp \varphi \end{array}$$



■

Lemma 2.2 Budiž $p \in \langle 1, \infty \rangle$ (tj. připouštíme i $p = \infty$) a položme

$$(2.28) \quad p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{pro } 1 < p < \infty, \\ 1 & \text{pro } p = \infty, \\ \infty & \text{pro } p = 1. \end{cases}$$

Budiž $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ a $v \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega)$. Pak patří součin $u.v$ do $\mathcal{L}^1(\Omega)$ a platí Hölderova nerovnost

$$(2.29) \quad \|u.v\|_1 = \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_{p'}.$$

Důkaz Především je pro měřitelné funkce u, v měřitelný také jejich součin $u.v$. Dále je pro $v \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ zřejmé

$$(2.30) \quad |v(x)| \leq \|v\|_\infty \quad \text{pro skoro všechna (s.v.) } x \in \Omega.$$

(i) Nechť je $p = 1$. Pak je $p' = \infty$ a vzhledem k (2.30) je $|u(x)v(x)| = |u(x)||v(x)| \leq \|v\|_\infty |u(x)|$ pro s.v. $x \in \Omega$.

Je tedy $u.v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ a nerovnost (2.29) dostaneme integrací předcházející nerovnosti.

(ii) Nechť je $p = \infty$. Pak je $p' = 1$ a nerovnost (2.29) odvodíme stejně jako v části (i), zaměníme-li role funkcí u a v .

(iii) Nechť je $1 < p < \infty$. Je-li $\|u\|_p = 0$ nebo $\|v\|_{p'} = 0$, je $u = 0$ s.v. v Ω nebo $v = 0$ s.v. v Ω , a tedy i $u.v = 0$ s.v. v Ω . Je tedy $\|u.v\|_1 = 0$ a nerovnost (2.29) platí. Předpokládejme nyní, že $\|u\|_p > 0$ a $\|v\|_{p'} > 0$. Zvolíme-li v Youngově nerovnosti (2.27) $\varphi(t) = t^{p-1}$, bude $\varphi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p-1}} = t^{p'-1}$ a nerovnost bude mít tvar

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Zvolme zde $a = |u(x)|/\|u\|_p$ a $b = |v(x)|/\|v\|_{p'}$. Pak bude

$$\frac{|u(x)v(x)|}{\|u\|_p \|v\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|u(x)|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|v(x)|^{p'}}{\|v\|_{p'}^{p'}},$$

a protože pravá strana je integrovatelná, je $u.v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Integrací této nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u\|_p \|v\|_{p'}} \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx &\leq \frac{1}{p} \frac{1}{\|u\|_p^p} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx + \frac{1}{p'} \frac{1}{\|v\|_{p'}^{p'}} \int_{\Omega} |v(x)|^{p'} dx = \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \end{aligned}$$

a odtud už plyne (2.29). ■

Lemma 2.3 *Nechť $u, v \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Pak také $u + v \in L^p(\Omega)$ a platí Minkowského nerovnost*

$$(2.31) \quad \|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Důkaz Pro $p = 1$ a $p = \infty$ plyne důkaz ihned z bodové nerovnosti $|u(x) + v(x)| \leq |u(x)| + |v(x)|$.

Pro $1 < p < \infty$ je pro každé $x \in \Omega$

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p),$$

a tedy $u + v \in L^p(\Omega)$. Současně je

$$\begin{aligned} |u(x) + v(x)|^p &= |u(x) + v(x)|^{p-1}(|u(x) + v(x)|) \leq \\ &\leq |u(x)| \cdot |u(x) + v(x)|^{p-1} + |v(x)| \cdot |u(x) + v(x)|^{p-1}. \end{aligned}$$

Protože $|u|, |v| \in L^p(\Omega)$ a $|u+v|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ [je totiž $p'(p-1) = p$], dostáváme použitím Hölderovy nerovnosti vztah

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x) + v(x)|^p dx &\leq \|u\|_p \| |u+v|^{p-1} \|_{p'} + \|v\|_p \| |u+v|^{p-1} \|_{p'} = \\ &= (\|u\|_p + \|v\|_p) \left(\int_{\Omega} |u(x) + v(x)|^p dx \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Je-li $\mathcal{I} = \int_{\Omega} |u(x) + v(x)|^p dx = 0$, platí nerovnost (2.31) triviálně, je-li $\mathcal{I} \neq 0$ (a tedy $\mathcal{I} > 0$), dostáváme (2.31) z poslední nerovnosti vydělením obou stran číslem $\mathcal{I}^{1-\frac{1}{p}}$. ■

Nyní se vrátíme k „nedostatku“, kterým je skutečnost, že (2.24), resp. (2.25), nesplňuje požadavky kladené na normu v prostoru $\mathcal{L}^p(\Omega)$, resp. $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

Definice 2.21 Budiž $\mathcal{N}_0(\Omega)$ množina všech měřitelných funkcí definovaných na Ω , které jsou skoro všude v Ω rovny nule; pro tyto funkce je $\|u\|_p = 0$ pro každé p , a tedy je také $\mathcal{N}_0(\Omega) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$. Symbolem

$$L^p(\Omega), \quad 0 \leq p \leq \infty,$$

označíme faktorový prostor $\mathcal{L}^p(\Omega) | \mathcal{N}_0(\Omega)$.

Poznámka Vzhledem k definici faktorového prostoru je $L^p(\Omega)$ množinou tříd ekvivalence; dvě funkce $u_1, u_2 \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ patří do třídy $[u]$, liší-li se pouze na množině nulové míry. Učiníme tuto úmluvu: Třidu $[u] \in L(\Omega)$ ztotožníme s libovolným jejím reprezentantem $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ a budeme o prvcích z $L^p(\Omega)$ hovořit opět jako

o funkcích. V dalším tedy budeme pracovat pouze s prostorem $L^p(\Omega)$, $0 \leq p \leq \infty$; tvrzení „Pro omezenou množinu Ω je

$$C^k(\overline{\Omega}) \subset L^p(\Omega)“$$

je ovšem třeba chápat tak, že celá třída $[u]$, vytvořená spojitou funkcí u , patří do $L^p(\Omega)$; další prvky třídy $[u]$ ovšem nemusí být spojité, liší se však od spojitě funkce u na množině nulové míry.

Výhodou této formální změny je skutečnost, že pro $1 \leq p \leq \infty$ je prostor $L^p(\Omega)$ normovaným lineárním prostorem, definujeme-li normu $\|u\|_p$ prvku (třídy!) $u \in L^p(\Omega)$ formulí (2.24) resp. (2.25).

(Dokažte, že $\|\cdot\|_p$ pak má vlastnosti (N 1) – (N 3); navíc dokažte, že $L^p(\Omega)$ je pro $0 < p < 1$ metrickým prostorem, definujeme-li metriku ρ_p předpisem

$$\rho_p(u, v) = \int_{\Omega} |u(x) - v(x)|^p dx, \quad 0 < p < 1,$$

tj. $\rho_p(u, v) = \|u - v\|_p^p$.)

Věta 2.14 (RIESZ-FISCHER). *Prostor $L^p(\Omega)$ je pro $1 \leq p \leq \infty$ Banachův prostor.*

Důkaz (i) $1 \leq p < \infty$. Budiž $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $L^p(\Omega)$, a zvolme monotonní (rostoucí) podposloupnost indexů $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ tak, aby platilo

$$\|u_k - u_n\|_p \leq 2^{-i} \text{ pro } k, n \geq k_i.$$

Označíme $v_i = u_{k_i}$, tj. utvoříme podposloupnost $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ naší posloupnosti $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Je tedy $\|v_{i+1} - v_i\|_p \leq 2^{-i}$ a tudíž

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|v_{i+1} - v_i\|_p < \infty.$$

Označme

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^n |v_{i+1}(x) - v_i(x)|.$$

Podle Fatouova lemmatu je

$$\int_{\Omega} (\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^p(x)) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n^p(x) dx = (\liminf_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_p)^p$$

a z Minkowského nerovnosti plyne

$$\|h_n\|_p = \left\| \sum_{i=1}^n |v_{i+1} - v_i| \right\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|v_{i+1} - v_i\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|v_{i+1} - v_i\|_p < \infty.$$

Je tudíž

$$\int_{\Omega} (\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^p(x)) dx < \infty$$

a v důsledku toho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^p(x) < \infty \text{ pro s.v. } x \in \Omega.$$

Vzhledem k definici funkcí h_n je tedy posloupnost $\{v_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ cauchyovská pro s.v. $x \in \Omega$; je totiž

$$\begin{aligned} v_i(x) - v_j(x) &= v_i(x) - v_{i+1}(x) + v_{i+1}(x) - v_{i+2}(x) + \cdots + v_{j-1}(x) - v_j(x) = \\ &= \sum_{s=i}^{j-1} (v_s(x) - v_{s+1}(x)) \text{ pro } i < j, \end{aligned}$$

a tedy

$$|v_i(x) - v_j(x)| \leq \sum_{s=i}^{j-1} |v_{s+1}(x) - v_s(x)| = h_{j-1}(x) - h_{i-1}(x),$$

a tudíž existuje funkce

$$v(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i(x) \text{ pro s.v. } x \in \Omega.$$

Opětovným použitím Fatouova lemmatu dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(x) - v_i(x)|^p dx &= \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} |v_k(x) - v_i(x)|^p dx \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v_k(x) - v_i(x)|^p dx = (\liminf_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v_i\|_p)^p \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=i}^{\infty} \|v_{k+1} - v_k\|_p \right)^p. \end{aligned}$$

Poslední výraz konverguje k nule pro $i \rightarrow \infty$, a proto i

$$\int_{\Omega} |v(x) - v_i(x)|^p dx = \|v - v_i\|_p^p \rightarrow 0 \text{ pro } i \rightarrow \infty,$$

tj. posloupnost $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje v $L^p(\Omega)$.

Podle lemmatu 2.1 pak konverguje i původní posloupnost $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$.

(ii) Tvrzení věty pro $p = \infty$ plyne z vlastností stejnoměrné konvergence. ■

Zavedeme ještě prostor *lokálně integrovatelných funkcí*.

Definice 2.22 Budiž $0 < p < \infty$ a Ω oblast v $\mathbb{R}^N$. Symbolem

$$L_{\text{loc}}^p(\Omega)$$

označíme množinu všech měřitelných funkcí $u = u(x)$ definovaných na Ω (přesněji tříd ekvivalence) takových, že

$$\int_{\Omega^*} |u(x)|^p dx < \infty$$

[tj. $u \in L^p(\Omega^*)$] pro každou omezenou oblast Ω^* , pro kterou platí

$$\Omega^* \subset \overline{\Omega^*} \subset \Omega.$$

Příklad 2.13 (i) Budiž $N = 1$ a $\Omega = (0, 1)$. Funkce $u(x) = \frac{1}{x}$ nepatří do $L^1(\Omega)$, ale patří do $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

(ii) Budiž $N = 1$ a $\Omega = (0, \infty)$. Funkce $u(x) = x$ nepatří do $L^p(\Omega)$, ale patří do $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, $p \geq 1$. □

Cvičení 2.5 (i) Dokažte, že pro omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ platí pro $1 \leq p \leq \leq q \leq \infty$

$$(2.32) \quad L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

(ii) Dokažte, že pro $1 \leq p \leq \infty$ platí

$$L^p(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega).$$

(iii) Dokažte, že pro omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ platí

$$C^k(\overline{\Omega}) \subset L^p(\Omega) \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}.$$

Bez důkazu uvedeme následující tvrzení.

Věta 2.15 Budiž $1 \leq p < \infty$ a budiž Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$. Budiž $u \in L^p(\Omega)$ a dodefinujeme funkci u nulou vně Ω . Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro $h \in \mathbb{R}^N, \|h\| < \delta$, je

$$(2.33) \quad \left(\int_{\Omega} |u(x+h) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Poznámka (i) Říkáme též, že funkce $u \in L^p(\Omega)$ je *spojitá v průměru stupně p* .

(ii) Věta 2.15 platí i pro neomezené oblasti Ω , jejichž míra $\text{meas } \Omega$ je konečná.

Analogií věty 2.13 o kompaktních množinách v prostorech spojitých funkcí je následující tvrzení.

Věta 2.16 Budiž M uzavřená podmnožina prostoru $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. K tomu, aby množina M byla kompaktní, je nutné a stačí, aby

(i) funkce $u \in M$ byly stejně omezené, tj. existuje číslo C_0 tak, že pro všechny funkce $u \in M$ je

$$\|u\|_p \leq C_0;$$

(ii) ke každému $\varepsilon > 0$ existovalo $\delta > 0$ a omezená uzavřená podmnožina $F \subset \Omega$ tak, že pro všechna $u \in M$ je

$$(2.34) \quad \int_{\Omega \setminus F} |u(x)|^p dx \leq \varepsilon$$

a

$$(2.35) \quad \int_{\Omega} |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \text{ pro } h \in \mathbb{R}^N, \|h\| < \delta.$$

Poznámka Podmínku (2.35) můžeme vyslovit též takto: „Funkce $u \in M$ jsou stejně spojitě v průměru stupně p “ [funkci u opět prodloužíme nulou vně Ω !]. Podmínka (2.34) je aktuální pouze tehdy, je-li oblast Ω neomezená.

Ve cvičení 2.5 (iii) jsme ukázali, že každá funkce $u \in C^k(\overline{\Omega})$ už patří do $L^p(\Omega)$. Platí dokonce více:

Věta 2.17 Budiž $1 \leq p < \infty$. Pak je množina $C_0^\infty(\Omega)$ hustá v $L^p(\Omega)$. Je-li oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ omezená, je množina $C^\infty(\overline{\Omega})$ hustá v $L^p(\Omega)$.

Poznámka Předcházející věta tedy říká, že pro každou funkci $u \in L^p(\Omega)$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje funkce $v \in C_0^\infty(\Omega)$, resp. $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tak, že platí:

$$(2.36) \quad \|u - v\|_p < \varepsilon,$$

tj. funkce z $L^p(\Omega)$ můžeme s libovolnou přesností aproximovat funkcemi z $C_0^\infty(\Omega)$, resp. $C^\infty(\overline{\Omega})$. Odtud také plyne, že prostor $L^p(\Omega)$ je zúplněním lineárního normovaného prostoru

$$(C^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p),$$

který sám není úplný (viz příklad 2.8).

Větu 2.17 nebudeme dokazovat, ale uvedeme jednu z možností, jak lze aproximující funkci v , pro kterou platí (2.36), sestavit.

Definice 2.23 Budiž $\varphi = \varphi(x)$ funkce definovaná v $\mathbb{R}^N$ a mající tyto vlastnosti:

$$(2.37) \quad \begin{aligned} &\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \varphi(x) \geq 0 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}^N, \\ &\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx = 1, \quad \text{supp } \varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ omezená oblast a položíme pro $u \in L^p(\Omega)$ a pro $\varepsilon > 0$

$$(R_\varepsilon u)(x) = \varepsilon^{-N} \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy.$$

Zobrazení R_ε nazýváme *regularizátorem* (nebo regularizujícím čili zhlazujícím operátorem).

Tento název vyplývá z následujících vlastností funkce $R_\varepsilon u$, které uvedeme bez důkazu:

$$R_\varepsilon u \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \|R_\varepsilon u - u\|_p = 0.$$

Funkci $R_\varepsilon u$ (s $\varepsilon > 0$ dostatečně malým) tedy můžeme zvolit za funkci $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, pro níž platí (2.36).

Jako příklad funkce φ , která má vlastnosti (2.37), uveďme:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_0 e^{1/(|x|^2-1)} & \text{pro } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{pro } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

s vhodně zvolenou kladnou konstantou c_0 .

Příklad 2.14 Budiž Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ a $1 < p < \infty$. Uvažujme na prostoru $C^1(\overline{\Omega})$ normu $\|\cdot\|$ danou předpisem

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} \left(|u(x)|^p + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Přesvědčte se, že to je skutečně norma!) Utvořme posloupnost funkcí $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$, daných předpisem

$$u_n(x) = \left(\|x\|^p + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Lze ukázat, že tato posloupnost je cauchyovská vzhledem k uvedené normě, ale její limita

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \|x\|^{\frac{1}{p}}$$

nepatří do $C^1(\overline{\Omega})$, pokud oblast Ω obsahuje počátek. Takto definovaný lineární normovaný prostor $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|)$ tedy není Banachův a při limitním přechodu se může stát, že tento prostor „opustíme“. Musíme ho proto zúplnit, a to nás vede k dalšímu důležitému prostoru.

□

Definice 2.24 Budiž Ω oblast v $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$ a k přirozené číslo. Pro funkci $u \in C^\infty(\Omega)$ označme

$$(2.38) \quad \|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p$$

a zavedme lineární normovaný prostor X následujícím způsobem:

$$(2.39) \quad X = \{u \in C^\infty(\Omega), \|u\|_{k,p} < \infty\}.$$

Symbolem

$$W^{k,p}(\Omega)$$

označíme zúplnění prostoru X [vzhledem k normě $\|\cdot\|$ z (2.38)] a nazveme tento prostor *Sobolevovým prostorem*.

Poznámky (i) Je třeba zdůraznit, že podmínka $\|u\|_{k,p} < \infty$ v (2.39) je pro definici prostoru X podstatná; obecně totiž může být pro $u \in C^\infty(\Omega)$ výraz $\|u\|_{k,p}$ nekonečný.

(ii) Vzhledem k tomu, že v normě (2.38) vystupují pouze derivace nejvýše k -tého řádu, mohli bychom místo množiny $C^\infty(\Omega)$ uvažovat „větší“ množinu $C^k(\Omega)$. Lze však ukázat, že zúplněním normovaného lineárního prostoru

$$X_k = \{u \in C^k(\Omega), \|u\|_{k,p} < \infty\}$$

bychom dostali též prostor $W^{k,p}(\Omega)$.

(iii) Příklad 2.14 ukazuje, že prostor X není úplný; Sobolevův prostor ovšem už díky své definici je Banachovým prostorem.

(iv) Budeme-li uvažovat *omezenou* oblast Ω a funkce $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ nebo $u \in C^k(\overline{\Omega})$, bude už norma (2.38) konečná. Lineární normovaný prostor

$$Y_k = (C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{k,p})$$

ovšem není úplný (viz příklad 2.14, kde je $k = 1$). Provedeme-li zúplnění tohoto prostoru Y_k , dostaneme úplný (tj. Banachův) prostor, který označíme na chvíli

$$H^{k,p}(\Omega).$$

Lze ukázat, že *obecně* se tento prostor liší od prostoru $W^{k,p}(\Omega)$. Oba prostory se ovšem *shodují* pro celou řadu oblastí Ω , vystupujících v praxi; zhruba řečeno se jedná o omezené oblasti, jejichž hranice $\partial\Omega$ je dostatečně hladká (nad)plocha. Proto se také prostory $H^{k,p}(\Omega)$ nazývají Sobolevovy prostory.

Definice 2.25 Budiž Ω oblast v $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$, a zavedme lineární normovaný prostor

$$Z = (C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$$

s normou danou vzorcem (2.38). [Uvědomte si, že pro $u \in C_0^\infty(\Omega)$ je už automaticky $\|u\|_{k,p} < \infty$!] Symbolem

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

označíme zúplnění prostoru Z [vzhledem k normě $\|\cdot\|_{k,p}$ z (2.38)].

Poznámky (i) Zde není třeba rozlišovat mezi omezenou a obecnou (neomezenou) oblastí. Protože je

$$C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega),$$

resp.

$$C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ pro omezenou oblast } \Omega,$$

je

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega),$$

resp.

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset H^{k,p}(\Omega).$$

(ii) V normě $\|\cdot\|_{k,p}$ vystupují normy *všech* derivací $D^\alpha u$, $|\alpha| \leq k$, v prostoru $L^p(\Omega)$. Lze ukázat, že v prostoru $W_0^{k,p}(\Omega)$ lze zavést ještě další normu

$$(2.40) \quad |||u|||_{k,p} = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p,$$

kde se uvažují pouze derivace nejvyššího (k -tého) řádu, a že tato norma je *ekvivalentní* s normou $\|\cdot\|_{k,p}$ ze vzorce (2.38).

Ještě jedna definice Sobolevova prostoru. Sobolevovy prostory $W^{k,p}(\Omega)$ a $W_0^{k,p}(\Omega)$ jsme zavedli pomocí zúplnění prostorů hladkých funkcí $C^\infty(\Omega)$ a $C_0^\infty(\Omega)$. To má za důsledek, že popis prvků Sobolevových prostorů (jako limit cauchyovských posloupností) je obtížný a definice nám nedává možnost udělat si o těchto prvcích názorný obraz. Pokusíme se to „napravit“.

Uvažujme cauchyovskou posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ prvků z $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, tj. nechť platí

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_{k,p} = 0,$$

kde $\|\cdot\|_{k,p}$ je norma daná vzorcem (2.38). Vzhledem k definici této normy je pro každý multiindex α , $|\alpha| \leq k$,

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_p \leq \|u_n - u_m\|_{k,p},$$

a tedy je posloupnost $\{D^\alpha u_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v $L^p(\Omega)$. Prostor $L^p(\Omega)$ je podle věty 2.14 úplný, a proto existuje limita

$$v_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha u_n \text{ v } L^p(\Omega).$$

Tím jsme k naší cauchyovské posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ sestrojili konečnou množinu

$$\{v_\alpha, |\alpha| \leq k\}$$

funkcí $v_\alpha \in L^p(\Omega)$. Bylo by jistě žádoucí, aby funkce v_α pro $|\alpha| \geq 1$ byla derivací $D^\alpha v_\Theta$ funkce v_Θ , odpovídající multiindexu $\Theta = (0, 0, \dots, 0)$. To však není zaručeno, neboť víme jen tolik, že $v_\Theta \in L^p(\Omega)$, a nemáme ani zaručenu její diferencovatelnost (viz též příklad 2.14).

Ukazuje se však, že funkce v_α souvisí s funkcí v_Θ následujícím zajímavým způsobem:

Pro každou funkci $\varphi = \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ platí

$$(2.41) \quad \int_{\Omega} v_\Theta(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha(x) \varphi(x) dx.$$

Dokažme to: Podle pravidla o integrování per partes (resp. podle Greenovy formule) platí pro každou pevnou funkci $u \in C^\infty(\Omega)$ a pro libovolnou funkci $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ vztah

$$(2.42) \quad \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \varphi(x) dx ;$$

zde jsou $D^\alpha \varphi$ a $D^\alpha u$ derivace v běžném smyslu. Zvolíme-li v (2.42) za funkci u naši funkci u_n z cauchyovské posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, bude platit

$$\int_{\Omega} u_n(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n(x) \varphi(x) dx,$$

a to pro každé $n = 1, 2, \dots$. Přejdeme-li zde k limitě pro $n \rightarrow \infty$, dostaneme vztah (2.41), neboť $u_n \rightarrow v_\Theta$ a $D^\alpha u_n \rightarrow v_\alpha$ v $L^p(\Omega)$. [Proveďte tuto úvahu za cvičení podrobně; především si uvědomte, jakou roli hraje předpoklad $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$!]

Definice 2.26 Budiž Ω oblast v $\mathbb{R}^N$ a $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Funkci $w \in L_{loc}^1(\Omega)$, pro níž platí vztah

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx$$

pro každou funkci $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, nazveme *zobecněnou derivací* funkce u vzhledem k multiindexu α a označíme ji $D^\alpha u$:

$$w = D^\alpha u.$$

Místo termínu zobecněná derivace se používá též termínu *derivace ve smyslu distribucí*.

Poznámka Vzhledem k tomu, co bylo řešeno výše – viz formuli (2.42) –, je pro hladké (tj. diferencovatelné) funkce zobecněná derivace totožná s klasickou derivací; užívání obvyklého symbolu $D^\alpha u$ by tedy nemělo vést k nedorozuměním.

Výhodou tohoto nového pojmu je skutečnost, že (zobecněné) derivace můžeme zavést pro obecnější třídy funkcí. [Přesvědčte se, že funkce $u = u(x)$, definovaná pro $x \in (-1, 1)$ předpisem

$$u(x) = |x|,$$

má zobecněnou derivaci prvního řádu

$$\frac{du}{dx} = \operatorname{sgn} x,$$

tedy funkci nespojitou.]

Definice 2.27 Budiž Ω oblast v $\mathbb{R}^N$, k přirozené číslo, $1 \leq p < \infty$. *Sobolevův prostor*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

definujeme jako množinu všech funkcí $u = u(x) \in L^p(\Omega)$, jejichž zobecněné derivace $D^\alpha u$ pro všechny multiindexy α takové, že $|\alpha| \leq k$, patří opět do $L^p(\Omega)$.

Takto definovaný Sobolevův prostor je lineární množina [také pro zobecněné derivace platí obvyklá pravidla: $D^\alpha(u+v) = D^\alpha u + D^\alpha v$, $D^\alpha(\lambda u) = \lambda D^\alpha u$], je to normovaný lineární prostor, definujeme-li normu opět předpisem (2.38) [kde $D^\alpha u$ jsou ovšem nyní zobecněné derivace] a je vzhledem k této normě *Banachovým prostorem*.

Poznámky (i) Poslední tvrzení je vlastně důsledkem věty 2.14, neboť prostor $W^{k,p}(\Omega)$ můžeme chápat jak podprostor kartézského součinu

$$L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$$

konečného počtu Lebesgueových prostorů $L^p(\Omega)$ [počet těchto prostorů je dán počtem multiindexů α délky k].

(ii) Vzhledem k definici je

$$W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Pro funkci $u \in L^p(\Omega)$ přitom má smysl uvažovat zobecněné derivace $D^\alpha u$, neboť $L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (viz cvičení 2.5 (i)).

(iii) To, že užíváme pro takto definovaný Sobolevův prostor opět označení $W^{k,p}(\Omega)$, je dáno tím, že pro „rozumné“ oblasti Ω dostáváme při všech definicích tutéž množinu. Definice 2.27 je ovšem poněkud názornější, neboť pracuje s pojmem derivace.

Současně odtud plyne, že množina M všech funkcí $u \in C^\infty(\Omega)$, pro něž je $\|u\|_{k,p} < \infty$, je v Sobolevově prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ hustá, tj. každou funkci z $W^{k,p}(\Omega)$ lze s libovolnou přesností aproximovat [v normě (2.38)] funkcí z M . Speciálně je pro omezenou oblast Ω (s hladkou hranicí $\partial\Omega$) v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ hustá množina $C^k(\overline{\Omega})$.

(iv) V prostoru $W_0^{k,p}(\Omega)$ je už podle definice hustá množina $C_0^\infty(\Omega)$. Také prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ bychom mohli zavést bez procesu zúplnění, ale museli bychom k tomu zavést pojem *stopy* funkce $u \in L^p(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega : u|_{\partial\Omega}$ [uvědomte si, že $\partial\Omega$ je množina nulové míry!]. Nebudeme zde pojem stopy zavádět, jen podotkněme, že lze $W_0^{k,p}(\Omega)$ chápat jako podmnožinu všech těch funkcí $u \in W^{k,p}(\Omega)$, pro něž je (ve smyslu stop) $D^\beta u|_{\partial\Omega} = 0$ pro $|\beta| \leq k-1$.

(v) Platí zřejmé inkluze

$$(2.43) \quad C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega);$$

připomeňme, že pro $k = 0$ je

$$W^{0,p}(\Omega) = W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Pro $k \geq 1$ jsou ovšem prostory $W^{k,p}(\Omega)$ a $W_0^{k,p}(\Omega)$ obecně *různé*, tj. druhá inkluze v (2.43) je ostrá. Jedinou výjimku tvoří případ $\Omega = \mathbb{R}^N$.

(vi) V literatuře se častěji než s normou (2.38) můžeme setkat s normou

$$(2.44) \quad [u]_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

přesvědčte se, že normy (2.38) a (2.44) jsou *ekvivalentní*.

Příklad 2.15 Budiž Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$, obsahující počátek. Funkce

$$u(x) = \|x\|^{-\lambda}$$

patří do $W^{1,2}(\Omega)$, pokud je $0 < \lambda < (\frac{N}{2} - 1)$ a $N \geq 3$.

□

Poslední příklad ukazuje, že u vlastností Sobolevových prostorů hraje roli i dimenze oblasti Ω . Uvedeme nyní jen pro ilustraci jednu důležitou vlastnost těchto prostorů, nazývanou souhrnně *věty o vnoření*.

Pro dva lineární normované prostory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ bude zápis

$$X \hookrightarrow Y$$

znamenat, že

(i) množina X je podmnožinou množiny Y , tj.

$$X \subset Y,$$

(ii) existuje kladná konstanta c tak, že pro všechny prvky $u \in X$ je

$$\|u\|_Y \leq c\|u\|_X.$$

[Říkáme, že prostor X je *spojitě vnořen* do prostoru Y .]

Je-li Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ s hladkou hranicí $\partial\Omega$, $N \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, pak platí

$$(2.45) \quad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

s parametrem $q \in \langle 1, \frac{Np}{N-kp} \rangle$, je-li $kp < N$, a s libovolným parametrem $q \geq 1$, je-li $kp = N$. Je-li $kp > N$, pak platí:

$$(2.46) \quad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}),$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda &= k - \frac{N}{p}, & \text{je-li } k - \frac{N}{p} < 1, \\ \lambda &\in (0,1) \text{ libovolné,} & \text{je-li } k - \frac{N}{p} = 1 \text{ a } p > 1, \\ \lambda &= 1, & \text{je-li } k - \frac{N}{p} > 1. \end{aligned}$$

Poznámky (i) Vnoření (2.46) je třeba chápat takto: Prvek $u \in W^{k,p}(\Omega)$ je vlastně třída ekvivalentních funkcí, lišících se pouze na množině nulové míry. Podle (2.46) pak v této třídě existuje prvek z prostoru $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$.

(ii) Předpoklad $N \geq 2$ je podstatný. Budeme-li uvažovat jednorozměrné oblasti Ω , tj. intervaly (a, b) , platí poněkud silnější tvrzení (např. funkce $u \in W^{1,1}(\Omega)$ je pro $\Omega = (a, b)$ už spojitá na $[a, b]$).

Důležitým speciálním případem nekonečněrozměrných lineárních prostorů jsou *prostory posloupností*. Lze je vlastně chápat jak speciální případ prostoru funkcí, neboť posloupnost je vlastně funkce s definičním oborem $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Uvedeme však explicitně některé konkrétní prostory posloupností.

Definice 2.28 Budiž $u = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost (reálných nebo komplexních) čísel ξ_n , $n = 1, 2, \dots$. Označme

$$l^\infty = \{u : \sup_n |\xi_n| < \infty\}$$

prostor *omezených posloupností*,

$$c = \{u : \text{existuje (konečná) limita } \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n\}$$

prostor *konvergentních posloupností*,

$$c_0 = \{u : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0\}$$

prostor „nulových“ posloupností,

$$l^p = \{u : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

prostor l^p -posloupností,

$$s = \{u : \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \xi_n = 0 \text{ pro všechna } k = 1, 2, \dots\}$$

prostor rychle klesajících posloupností,

$$s_0 = \{u : \xi_n \neq 0 \text{ pouze pro konečný počet indexů } n\}$$

prostor finitních posloupností.

Cvičení 2.6 Dokažte, že platí inkluze

$$s_0 \subset s \subset l^p \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$$

a že prostor l^p je Banachův prostor vzhledem k normě

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

zatímco prostory l^∞ , c a c_0 jsou Banachovy prostory vzhledem k normě

$$\|u\|_\infty = \sup_n |\xi_n|.$$

• ○ •

2.3 Lineární funkcionály, slabá konvergence

Vedle pojmu prostoru hraje ve funkcionální analýze důležitou roli pojem *operátoru*, tj. zobrazení T , přiřazujícího prvku u z prostoru X prvek $v = Tu$ z prostoru Y ; zapíšeme to takto:

$$T : X \mapsto Y.$$

Důležitým speciálním případem operátoru je *funkcionál*, kdy prostor Y je množina reálných čísel $\mathbb{R}$ či množina komplexních čísel $\mathbb{C}$. Velmi podrobně je rozpracována teorie *lineárních funkcionálů*.

Definice 2.29 Budiž X lineární prostor. Zobrazení

$$F : X \mapsto \mathbb{R}, \text{ resp. } F : X \mapsto \mathbb{C}$$

nazveme *lineárním funkcionálem*, jsou-li splněny následující podmínky:

$$F(u + v) = F(u) + F(v) \quad \text{pro každé dva prvky } u, v \in X;$$

$$F(\lambda u) = \lambda F(u) \quad \text{pro každé } u \in X \text{ a pro každé číslo } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ resp. } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Příklad 2.16 Zvolme za X prostor $\mathbb{R}^N$ a nechť jsou $a_1, a_2, \dots, a_N$ pevná reálná čísla. Pro $u = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ označme

$$(2.47) \quad F(u) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N.$$

Zřejmě je F (reálný) lineární funkcionál. Je určen n -ticí $a_1, \dots, a_N$; označíme-li $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ souřadnicový vektor s jedničkou na i -tém místě ($i = 1, 2, \dots, N$), je

$$F(e_i) = a_i$$

a funkcionál F lze zapsat ve tvaru

$$F(u) = \sum_{i=1}^N F(e_i) x_i.$$

Je-li naopak F nějaký lineární funkcionál na $\mathbb{R}^N$ a jsou-li $a_i = F(e_i)$ jeho hodnoty pro prvky e_i , $i = 1, \dots, N$, má funkcionál F tvar (2.47). To znamená, že *každý* lineární funkcionál F na $\mathbb{R}^N$ má tvar (2.47) a je jednoznačně určen svými hodnotami v „bodech“ $e_1, e_2, \dots, e_N$. □

Příklad 2.17 Budiž $X = C(\langle a, b \rangle)$. Přesvědčte se, že formulemi

$$(2.48) \quad F(u) = \int_a^b u(t) dt$$

a

$$G(u) = u(c),$$

kde c je pevný bod z intervalu $\langle a, b \rangle$, jsou definovány lineární funkcionály.

Formule (2.48) definuje lineární funkcionál i v prostoru $X = L^2(a, b)$ [uvědomte si, že vzhledem k (2.32) je $L^2(a, b) \subset L^1(a, b)$ a funkce $u \in L^2(a, b)$ je tudíž integrovatelná]. □

Definice 2.30 Budiž $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor. Řekneme, že lineární funkcionál F na X je *spojitý*, jestliže pro každou posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ a prvek $u \in X$ splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ v } X$$

platí

$$(2.49) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F(u).$$

Definice 2.31 Řekneme, že lineární funkcionál definovaný na normovaném lineárním prostoru $(X, \|\cdot\|)$ je *omezený*, existuje-li kladná konstanta M tak, že pro všechna $u \in X$ platí

$$(2.50) \quad |F(u)| \leq M \|u\|.$$

Poznámka Pojem spojitosti a omezenosti bychom mohli zavést pro každý funkcionál, tedy nejen pro lineární (později se s tím setkáme!). Pro lineární funkcionály však tyto pojmy spolu úzce souvisí.

Věta 2.18 *Lineární funkcionál $F : X \mapsto \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) na lineárním normovaném prostoru $(X, \|\cdot\|)$ je spojitý právě tehdy, je-li omezený.*

Důkaz Spojitost plyne ihned z (2.50): je

$$|F(u_n) - F(u)| = |F(u_n - u)| \leq M\|u_n - u\|.$$

Opačná implikace je důsledkem následujících tří pomocných tvrzení.

Lemma 2.4 *Lineární funkcionál F na $(X, \|\cdot\|)$ je spojitý právě tehdy, je-li spojitý v nulovém prvku o prostoru X , tj. platí-li implikace*

$$(2.51) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = o \text{ v } X \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = 0.$$

Důkaz Je-li funkcionál F spojitý, je pro $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = o$ (podle definice 2.30) $\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F(o) = 0$ [neboť $o = 0.u$ a $F(o) = F(0.u) = 0.F(u) = 0$]; platí tedy implikace (2.51).

Nechť naopak platí (2.51). Je-li $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, pak pro $v_n = u_n - u$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = o$. Podle (2.51) je pak

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n - u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n) - F(u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) - F(u),$$

a to je vztah (2.49). ■

Lemma 2.5 *Je-li lineární funkcionál F na $(X, \|\cdot\|)$ spojitý v prvku o , je množina čísel $|F(u)|$ pro prvky u z uzavřené koule $\overline{K}(o, r)$ ($r > 0$) omezená.*

Důkaz Uvažujme čísla $|F(u)|$ nejprve pro u ze sféry $S(o, r)$ [viz definici 2.3] a předpokládejme, že množina těchto čísel není omezená. Pak existuje ke každému $n = 1, 2, \dots$ prvek $u_n \in S(o, r)$ tak, že je $|F(u_n)| \geq n$. Protože F je lineární funkcionál, je $|F(\frac{1}{n}u_n)| \geq 1$. Dále je

$$\|\frac{1}{n}u_n\| = \frac{1}{n}\|u_n\| = \frac{r}{n} \text{ a tedy } \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}u_n) = o \text{ v } X.$$

Podle (2.51) je pak $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\frac{1}{n}u_n) = 0$, ale to je ve sporu s nerovností $|F(\frac{1}{n}u_n)| \geq 1$.

Množina $\{|F(u)|, u \in S(o, r)\}$ je tedy omezená, tj. existuje číslo $M > 0$ tak, že $|F(u)| \leq M$ pro $u \in S(o, r)$. Je-li $u \in \overline{K}(o, r)$, je $\|u\| \leq r$ a pro $u \neq o$ je $\frac{1}{\|u\|}ru \in S(o, r)$, neboť $\|\frac{1}{\|u\|}ru\| = \frac{1}{\|u\|}r\|u\| = r$. Je tedy

$$\left| F\left(\frac{1}{\|u\|}ru\right) \right| \leq M,$$

a protože F je lineární, je $|F(\frac{1}{\|u\|}ru)| = |\frac{1}{\|u\|}.rF(u)| \leq M$, a tedy $|F(u)| \leq \frac{\|u\|}{r}M \leq M$ (je totiž $\frac{\|u\|}{r} \leq 1$). Tato nerovnost je splněna také pro $u = o$ (zdůvodněte!). ■

Lemma 2.6 *Je-li lineární funkcionál F na $(X, \|\cdot\|)$ omezený na kouli $\overline{K}(o, r)$, tj. platí-li*

$$|F(u)| \leq M_1 \text{ pro } u \in \overline{K}(o, r), \quad r > 0,$$

je už omezený, tj. platí (2.50) s konstantou $M = \frac{M_1}{r}$.

Důkaz Pro daný prvek $u \in X$, $u \neq o$, patří prvek $v = \frac{r}{\|u\|}u$ do $\overline{K}(o, r)$, a proto platí

$$|F(v)| = |F(\frac{r}{\|u\|}u)| = \frac{r}{\|u\|}|F(u)| \leq M_1;$$

odtud však ihned plyne

$$|F(u)| \leq \frac{M_1}{r}\|u\|,$$

a to je (2.50) s $M = \frac{M_1}{r}$. Poslední nerovnost platí zřejmě i pro $u = o$. ■

Máme-li tedy spojitý lineární funkcionál $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), je spojitý v $o \in X$ na základě lemmatu 2.4. Z lemmatu 2.5 pak plyne, že je omezený na kouli $\overline{K}(o, r)$, s poloměrem $r > 0$. Jeho omezenost ve smyslu definice 2.31 je pak důsledkem lemmatu 2.6. ■

Definice 2.32 Budiž F omezený lineární funkcionál na lineárním normovaném prostoru $(X, \|\cdot\|)$. Číslo

$$(2.52) \quad \|F\|_* = \sup_{\|u\|=1} |F(u)|$$

nazýváme *normou* funkcionálu F .

Cvičení 2.7 Dokažte, že pro omezený lineární funkcionál F na $(X, \|\cdot\|)$ platí

$$(2.53) \quad |F(u)| \leq \|F\|_* \|u\| \text{ pro každé } u \in X$$

[takže $\|F\|_*$ je nejmenší konstanta M , pro kterou platí (2.50)] a že normu funkcionálu lze definovat též vzorcem

$$(2.54) \quad \|F\|_* = \sup_{\|u\| \leq 1} |F(u)|.$$

Množina všech lineárních funkcionálů na prostoru X je opět *lineární prostor*, definujeme-li součet $F + G$ dvou funkcionálů a λ -násobek λF formulemi

$$\begin{aligned} (F + G)(u) &= F(u) + G(u) \quad \text{pro } u \in X, \\ (\lambda F)(u) &= \lambda F(u) \quad \text{pro } u \in X. \end{aligned}$$

Nulovým prvkem tohoto lineárního prostoru je *nulový funkcionál* O , přiřazující každému prvku $u \in X$ nulu:

$$O(u) = 0 \text{ pro každé } u \in X.$$

Budeme-li uvažovat *normovaný* lineární prostor $(X, \|\cdot\|)$ a množinu všech *omezených* (tj. spojitých) lineárních funkcionálů na X , dostaneme tedy opět lineární prostor, a to dokonce *normovaný lineární prostor*, definujeme-li normu předpisem (2.54). [Ověřte, že $\|F\|_*$ má skutečně vlastnosti (N 1) – (N 3)!]

Definice 2.33 Budiž $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor. Normovaný lineární prostor všech omezených lineárních funkcionálů F na X nazveme *duálním prostorem* (k prostoru $(X, \|\cdot\|)$) a označíme ho X^* nebo $(X^*, \|\cdot\|_*)$, kde definujeme

$$\|F\|_* = \sup_{\|u\| \leq 1} |F(u)|.$$

Věta 2.19 *Duální prostor $(X^*, \|\cdot\|_*)$ k normovanému lineárnímu prostoru $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor.*

Příklad 2.18 Uvažujme prostor $\mathbb{R}^N$ s euklidovskou normou $\|u\| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ a v něm lineární funkcionál $F(u) = \sum_{i=1}^N a_i x_i$ (viz příklad 2.16). Tento funkcionál je omezený (a tedy spojitý), neboť podle Schwarzovy nerovnosti (viz příklad 1.8) je

$$|F(u)| = \left| \sum_{i=1}^N a_i x_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = M \cdot \|u\|$$

s konstantou

$$M = \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Je-li $M > 0$ a zvolíme-li speciální vektor $\tilde{u} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$ takto:

$$\tilde{x}_i = \frac{a_i}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

bude $\|\tilde{u}\| = 1$ (ověřte!) a

$$|F(\tilde{u})| = \left| \sum_{i=1}^N a_i \tilde{x}_i \right| = \sum_{i=1}^N \frac{a_i^2}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N a_i^2 = \frac{M^2}{M} = M.$$

Je tedy

$$\|F\|_* = \sup_{\|u\|=1} |F(u)| \geq |F(\tilde{u})| = M.$$

Protože současně je $\|F\|_* \leq M$ (viz cvičení 2.7), dostali jsme pro normu našeho funkcionálu F vyjádření

$$\|F\|_* = M = \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Příklad 2.19 Budiž $X = C([a, b])$ s normou $\|u\| = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|$. Lineární funkcionál F daný vzorcem (2.48) je spojitý, neboť je omezený:

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \left| \int_a^b u(t) dt \right| \leq \int_a^b |u(t)| dt \leq \int_a^b \max_{a \leq t \leq b} |u(t)| dt = \\ &= \int_a^b \|u\| dt = (b-a)\|u\|. \end{aligned}$$

Je tedy $\|F\|_* \leq b-a$. Pro funkci $\tilde{u}(t) \equiv 1$ je $\|\tilde{u}\| = 1$ a $|F(\tilde{u})| = \left| \int_a^b 1 dt \right| = b-a$, a tudíž platí

$$\|F\|_* = \sup_{\|u\| \leq 1} |F(u)| \geq |F(\tilde{u})| = b-a.$$

Je tedy $\|F\|_* = b-a$.

□

Příklad 2.20 Označme X reálný prostor $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $1 < p < \infty$, a budiž $v = v(x)$ pevná funkce z prostoru $L^{p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Funkcionál

$$(2.55) \quad F(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad u \in X,$$

je *lineární* (to plyne z vlastností integrálu) a *spojitý*, neboť podle Hölderovy nerovnosti (2.29) je

$$|F(u)| \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_{p'},$$

a tedy také

$$(2.56) \quad \|F\|_* \leq \|v\|_{p'}.$$

Zvolme nyní speciálně za u funkci

$$\tilde{u}(x) = \frac{|v(x)|^{p'-1} \operatorname{sgn} v(x)}{\|v\|_{p'}^{p'-1}}$$

(předpokládáme, že $v \neq 0$ a tedy $\|v\|_{p'} > 0$). Pak je $\|\tilde{u}\|_p = 1$ (ověřte!) a

$$F(\tilde{u}) = \int_{\Omega} \tilde{u}(x)v(x)dx = \frac{1}{\|v\|_{p'}^{p'-1}} \int_{\Omega} |v(x)|^{p'} dx = \|v\|_{p'}.$$

Protože $\|F\|_* = \sup_{\|u\|_p \leq 1} |F(u)| \geq |F(\tilde{u})| = \|v\|_{p'}$, dostáváme společně s (2.56)

vztah

$$(2.57) \quad \|F\|_* = \|v\|_{p'}.$$

Dokázali jsme tedy, že pomocí libovolné funkce $v \in L^{p'}(\Omega)$ můžeme vzorcem (2.55) definovat na $L^p(\Omega)$ spojitý lineární funkcionál F (závislý na funkci v), pro jehož normu platí (2.57). Toto tvrzení však lze dokonce „obrátit“.

□

Věta 2.20 (F. RIESZ). *Budiž F spojitý lineární funkcionál na (reálném) prostoru $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Pak existuje právě jedna funkce $v \in L^{p'}(\Omega)$ tak, že funkcionál F má tvar (2.55) a že platí (2.57).*

Tuto větu, již se také říká *Rieszova věta o reprezentaci lineárního funkcionálu*, zde nebudeme dokazovat. Vzhledem k tomu, že mezi funkcionálem $F \in (L^p(\Omega))^*$ a prvkem $v \in L^{p'}(\Omega)$ existuje podle věty 2.20 vzájemně jednoznačné přiřazení a pro normy platí rovnost (2.57), lze duální prostor $(L^p(\Omega))^*$ a prostor $L^{p'}(\Omega)$ s $p' = \frac{p}{p-1}$ *ztotožnit*, což zapíšeme takto:

$$(2.58) \quad (L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega), \quad 1 < p < \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Poznámka Nechť jsou $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dva normované lineární prostory a nechť existuje lineární zobrazení S prostoru X na prostor Y [tj. takové zobrazení $S : X \mapsto Y$, pro které platí

$$S(u+v) = S(u) + S(v), \quad S(\lambda u) = \lambda S(u)$$

pro všechny prvky $u, v \in X$ a pro každé číslo λ , a pro které lze *každý* prvek $h \in Y$ vyjádřit ve tvaru $h = Su$ s nějakým prvkem $u \in X$], které má navíc tuto vlastnost:

$$(2.59) \quad \|Su\|_Y = \|u\|_X \text{ pro každý prvek } u \in X.$$

Pak nazveme zobrazení *izomorfismem* prostorů X a Y , a oba prostory můžeme formálně *ztotožnit* (tj. ztotožníme prvek $u \in X$ s jeho obrazem $Su \in Y$ a prvek $h \in Y$ s prvkem $u \in X$, pro který je $Su = h$).

Ztotožnění prostoru $X = (L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ s prostorem $((L^p(\Omega))^*, \|\cdot\|_*) = Y$, vyjádřené rovností (2.58), je třeba chápat právě ve smyslu takového *izomorfismu*, který je vyjádřen vzorcem (2.55): Prvku $v \in X$ přiřadíme prvek $F \in Y$, $F = Sv$, formulí (2.55), a vztah (2.59) je pak vyjádřen právě rovností (2.57).

Vraťme se nyní ke vztahu (2.58). Protože role parametrů p a p' lze zaměnit (je totiž $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), platí také „symetrický“ vztah

$$(2.60) \quad (L^{p'}(\Omega))^* = L^p(\Omega), \quad 1 < p' < \infty, \quad p = \frac{p'}{p'-1}$$

[opět ve smyslu *izomorfismu* prostorů $L^p(\Omega)$ a $(L^{p'}(\Omega))^*$].

Definice 2.34 Budiž $(X, \|\cdot\|_X)$ lineární normovaný prostor a $(X^*, \|\cdot\|_*)$ jeho duální prostor. Prostor Y duální k X^* označíme X^{**} a nazveme *druhým duálním prostorem k prostoru X* .

Příklad 2.21 Vzhledem k vzorcům (2.58) a (2.60) lze druhý duální prostor k prostoru $L^p(\Omega)$ ztotožnit (ve smyslu izomorfismu) s prostorem $L^p(\Omega)$ samotným:

$$(2.61) \quad (L^p(\Omega))^{**} = L^p(\Omega), \quad 1 < p < \infty.$$

□

Poznámka Lze *obecně* ukázat, že druhý duální prostor $(X^{**}, \|\cdot\|_{**})$ obsahuje lineární podprostor Z ,

$$Z \subset X^{**},$$

který je izomorfní s výchozím prostorem X . Protože izomorfní prostory lze ztotožnit, platí tedy relace

$$(2.62) \quad X \subset X^{**}.$$

Izomorfismus S , kterým se prvku $u \in X$ přiřadí prvek $Su \in Z$, tj. prvek $Su \in X^{**}$, je přitom definován takto: Su je právě ten prvek z X^{**} , pro který platí

$$(2.63) \quad (Su)(F) = F(u) \text{ pro } F \in X^*.$$

Tento izomorfismus se nazývá *kanonické zobrazení*.

Definice 2.35 Normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|_X)$ nazveme *reflexivní*, jestliže kanonické zobrazení $S : X \mapsto X^{**}$, dané vztahem (2.63), je zobrazením prostoru X na prostor X^{**} . Jinými slovy: Obraz množiny X při kanonickém zobrazení S , (totiž množina $Z \subset X^{**}$), je totožný s celým prostorem X^{**} . Lze to také vyjádřit s přihlédnutím ke vzorci (2.62) takto:

$$X = X^{**}.$$

Příklad 2.22 (i) Z formule (2.61) plyne, že prostor $L^p(\Omega)$ je pro $1 < p < \infty$ reflexivní.

(ii) Každý lineární funkcionál F na $X = \mathbb{R}^N$ (s euklidovskou normou) má tvar (2.47) [viz příklad 2.16]; je tedy jednoznačně určen N -ticí $a = (a_1, a_2, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ a platí $\|F\|_* = \|a\|_X$ (viz příklad 2.18). To však znamená, že (ve smyslu izomorfismu)

$$(\mathbb{R}^N)^* = \mathbb{R}^N \text{ a } (\mathbb{R}^N)^{**} = \mathbb{R}^N.$$

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^N$ je tedy reflexivní prostor.

(iii) Prostor $L^1(\Omega)$ ani prostor $L^\infty(\Omega)$ *nejsou reflexivní*. Věta 2.20 sice platí i pro $p = 1$ (kdy klademe $p' = \infty$), takže lze ve smyslu izomorfismu psát

$$(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega),$$

ale neplatí pro $p = \infty$ (kdy klademe $p' = 1$).

□

Poznámka Předcházející příklady ukazují, že prostor X^* duální k danému prostoru X má často podobný charakter jako prostor X sám: pro $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, byl X^* (ve smyslu izomorfismu) totožný s $L^{p'}(\Omega)$, pro $X = \mathbb{R}^N$ byl X^* totožný s $\mathbb{R}^N$. Není to ovšem pravidlo: Zvolíme-li $X = C(\overline{\Omega})$, lze sice ukázat, že funkcionál F , daný [pro pevnou funkci $v \in C(\overline{\Omega})$] vzorcem (2.55), je spojitý lineární funkcionál na $C(\overline{\Omega})$, ale *není to obecný tvar funkcionálu z $[C(\overline{\Omega})]^*$* ; ten má tvar tzv. *Stieltjesova integrálu*

$$F(u) = \int_{\Omega} u(x) dg(x)$$

a tvar (2.55) je pouze speciální případ tohoto obecného tvaru. Duální prostor $[C(\overline{\Omega})]^*$ má tedy komplikovanější strukturu (je to *prostor měr*), a to je také jeden z důvodů, proč dáváme přednost prostorům typu $L^p(\Omega)$.

Důležitou vlastností spojitých lineárních funkcionálů je skutečnost, že je lze *rozšířit* na větší definiční obor se zachováním normy:

Věta 2.21 (HAHN-BANACH). *Budiž $(X, \|\cdot\|_X)$ normovaný lineární prostor a X_0 lineární podprostor prostoru X . Budiž F_0 spojitý lineární funkcionál definovaný na X_0 . Pak existuje spojitý lineární funkcionál F definovaný na celém prostoru X , který je na X_0 totožný s funkcionálem F_0 (tj. platí*

$$F(u) = F_0(u) \text{ pro } u \in X_0;$$

řekáme, že F je rozšířením funkcionálu F_0) a pro který platí

$$\|F\|_* = \|F_0\|_*.$$

Důležitým důsledkem Hahnovy-Banachovy věty je následující tvrzení, které zaručuje existenci netriviálních spojitých lineárních funkcionálů.

Věta 2.22 *Budiž $(X, \|\cdot\|_X)$ normovaný lineární prostor a $u_0 \neq 0$ pevný prvek prostoru X . Pak existuje spojitý lineární funkcionál F na X tak, že platí*

$$F(u_0) = \|u_0\|_X \quad \text{a} \quad \|F\|_* = 1.$$

Důkaz Budiž X_0 množina všech prvků tvaru λu_0 , kde λ probíhá množinu reálných (resp. komplexních) čísel. Pak je X_0 lineární podprostor prostoru X a předpisem

$$F_0(u) = \lambda \|u_0\|_X \text{ pro } u = \lambda u_0 \in X_0$$

je definován spojitý lineární funkcionál F_0 na X_0 . Protože je pro $u = \lambda u_0 \in X_0$

$$|F_0(u)| = |\lambda| \cdot \|u_0\|_X = \|\lambda u_0\|_X = \|u\|_X,$$

je $\|F_0\|_* = 1$. Existence funkcionálu F nyní plyne z věty 2.21. ■

Zatím jsme se seznámili s jediným typem konvergence v normovaném lineárním prostoru $(X, \|\cdot\|_X)$ – s tzv. *silnou konvergencí* (*konvergencí podle normy*): Pro posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ a prvek $u \in X$ znamená

$$u_n \rightarrow u \text{ v } X \quad \text{čili} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ (v } X),$$

že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_X = 0.$$

S tímto typem konvergence v aplikacích obvykle nevystačíme; zavedení duálního prostoru X^* nám umožňuje zavést další typ konvergence – tzv. *slabou konvergenci*.

Definice 2.36 Budiž $(X, \|\cdot\|_X)$ normovaný lineární prostor a $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost prvků $u_n \in X$. Řekneme, že posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje slabě* k prvku $u \in X$, platí-li pro každý spojitý lineární funkcionál $F \in X^*$ vztah

$$(2.64) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F(u).$$

Zkráceně to zapisujeme takto:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ pro } n \rightarrow \infty$$

a prvek u nazveme *slabou limitou* posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^\infty$.

Z této definice ihned plyne, že posloupnost, která konverguje silně (tj. v normě), konverguje i slabě. Je totiž

$$|F(u_n) - F(u)| = |F(u_n - u)| \leq \|F\|_* \|u_n - u\|_X.$$

Opačná implikace však *neplatí*, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2.23 Uvažujme v prostoru $L^2(0, 1)$ posloupnost funkcí $u_n(x) = \sin n\pi x$, $n = 1, 2, \dots$. Pak je $\|u_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, a proto nemůže platit

$$u_n \rightarrow 0 \text{ v } L^2(0, 1).$$

Je-li nyní F libovolný spojitý lineární funkcionál na $L^2(0, 1)$, má podle věty 2.20 tvar

$$F(u) = \int_0^1 u(x)v(x)dx,$$

s pevně určenou funkcí $v \in L^2(0, 1)$. Označíme-li

$$c_n = F(u_n) = \int_0^1 u_n(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x) \sin n\pi x \, dx,$$

je (na základě Parsevalovy rovnosti, viz např. [9], viz též formuli (2.79))

$$\infty > \|v\|_2^2 = \int_0^1 v^2(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F^2(u_n),$$

a proto musí platit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = 0 = F(o).$$

Protože tento vztah platí pro každý funkcionál $F \in [L^2(0,1)]^*$ [tj. pro každou funkci $v \in L^2(0,1)$], konverguje naše posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ slabě k nulovému prvku o :

$$u_n \rightharpoonup o \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

nekonverguje však k o silně.

□

Poznámka Pokud existuje slabá limita posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, pak je určena jednoznačně. Naznačme důkaz tohoto tvrzení. Předpokládejme sporem, že $u_n \rightharpoonup u$ v X a zároveň $u_n \rightharpoonup v$ v X . Potom v rovině (nebo na přímce) určené prvky u a v snadno zkonstruujeme spojitý lineární funkcionál F_0 , pro který platí

$$F_0(u) \neq F_0(v).$$

Podle Hahnovy-Banachovy věty však existuje jeho spojitě rozšíření F , pro které platí

$$\|F\|_* = \|F_0\|_* \quad \text{a} \quad F(u) = F_0(u), \quad F(v) = F_0(v).$$

To je však spor (provedte podrobně).

Platí následující důležitá tvrzení o slabě konvergentních posloupnostech.

Věta 2.23 *Budiž $(X, \|\cdot\|_X)$ lineární normovaný prostor a $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ slabě konvergentní posloupnost. Pak je tato posloupnost omezená, tj. existuje číslo $K > 0$ tak, že pro $n = 1, 2, \dots$ platí*

$$(2.65) \quad \|u_n\|_X \leq K,$$

a pro její slabou limitu u platí nerovnost

$$\|u\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X.$$

Slabá konvergence je charakterizována vztahem (2.64), který musí platit pro každý funkcionál $F \in X^*$. Ale i tento požadavek lze někdy oslabit:

Věta 2.24 *Budiž $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův prostor. Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ konverguje slabě k prvku $u \in X$ právě tehdy, je-li omezená [tj. platí-li (2.65) pro $n = 1, 2, \dots$] a platí-li vztah (2.64) pro všechny funkcionály F z husté podmnožiny M duálního prostoru X^* .*

V konkrétních prostorech lze podat i jinou, detailnější charakterizaci slabé konvergence. Tak např. v prostoru $C(\overline{\Omega})$, opatřeném normou $\|\cdot\|_C$ ze vzorce (2.18), konverguje posloupnost funkcí $u_n(x)$ slabě k funkci $u(x)$ právě tehdy, platí-li současně:

$$|u_n(x)| \leq K \quad \text{pro všechna } x \in \overline{\Omega} \text{ a pro } n = 1, 2, \dots$$

(tj. posloupnost je *stejně omezená*) a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \quad \text{pro každé } x \in \overline{\Omega}$$

(tj. posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci u *bodově*).

Slabá konvergence souvisí úzce s reflexivitou daného prostoru. Následující věta má uplatnění v řadě aplikací.

Věta 2.25 (EBERLEIN-ŠMULJAN). *Banachův prostor $(X, \|\cdot\|_X)$ je reflexivní právě tehdy, lze-li z každé omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

Uvedme ještě jednu větu, důležitou v teorii i praxi přibližných metod.

Věta 2.26 (BANACH-STEINHAUS). *Budiž $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův prostor a $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost spojitých lineárních funkcionalů na X . Nechť je posloupnost $\{F_n(u)\}_{n=1}^\infty$ omezená pro každý prvek $u \in X$, tj. nechť existují kladná čísla $K(u)$ tak, že platí*

$$|F_n(u)| \leq K(u) \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

Pak je posloupnost funkcionalů F_n omezená v normě, tj. existuje kladné číslo K tak, že platí

$$\|F_n\|_* \leq K \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

• ○ •

2.4 Hilbertovy prostory

V definici 1.4 jsme zavedli pojem skalárního součinu

$$(2.66) \quad (u, v)$$

dvou prvků prostoru M a pojem unitárního prostoru. Ukázali jsme také, že na množině M je definována norma formulí

$$(2.67) \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

[viz (1.35)].

Definice 2.37 Unitární prostor nazveme *Hilbertovým prostorem*, je-li úplný vzhledem k normě (2.67), určené skalárním součinem (2.66).

V dalším budeme Hilbertův prostor značit písmenem H ; bude-li to třeba, budeme normu prvku $u \in H$ značit – vedle (2.67) – též symbolem

$$\|u\|_H.$$

Podle definice je každý Hilbertův prostor už Banachovým prostorem. Opačná implikace však platí právě tehdy, splňuje-li norma $\|\cdot\|_X$ Banachova prostoru $(X, \|\cdot\|_X)$ rovnost rovnoběžníka (1.39).

Příklad 2.24 (Komplexními) Hilbertovými prostory jsou

(i) množina $\mathbb{C}^N$ všech N -tic komplexních čísel $u = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, definujeme-li pro $v = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{C}^N$ skalární součin předpisem

$$(u, v) = \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i;$$

(ii) prostor l^2 nekonečných posloupností $u = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ komplexních čísel x_i (viz definici 2.28), definujeme-li pro $v = \{y_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$ skalární součin předpisem

$$(u, v) = \sum_{i=1}^\infty x_i \bar{y}_i;$$

(iii) prostor $L^2(\Omega)$ komplexních funkcí $u = u(x)$, $x \in \Omega$ (viz definice 2.20 a 2.21), definujeme-li pro $v \in L^2(\Omega)$ skalární součin předpisem

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx;$$

(iv) Sobolevův prostor $W^{k,2}(\Omega)$ komplexních funkcí $u = u(x)$, $x \in \Omega$ (viz definici 2.27), definujeme-li pro $v \in W^{k,2}(\Omega)$ skalární součin předpisem

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \cdot \overline{D^\alpha v(x)} dx.$$

□

Cvičení 2.8 Pro $p \neq 2$ nejsou prostory l^p , $L^p(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$ Hilbertovými prostory, i když to jsou (pro $p \geq 1$) Banachovy prostory: pro odpovídající normu totiž není splněna rovnost rovnoběžníka. Přesvědčte se o tom tím, že sestrojíte vhodné protipříklady. Např. zvolte v $L^p(-1, 1)$ funkce u a v takto:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{pro } x \in (0, 1) \end{cases}, \quad v(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{pro } x \in (0, 1) \end{cases}.$$

Skalární součin je „funkcí dvou proměnných u a v “. Ukážeme, že na těchto proměnných závisí spojitě:

Věta 2.27 *Budiž H Hilbertův prostor a $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti prvků z H . Nechť*

$$(2.68) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad v \in H, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \quad v \in H.$$

Pak platí

$$(2.69) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = (u, v).$$

Důkaz Podle pravidel o počítání se skalárním součinem (S 1) – (S 4) [viz definici 1.4] a podle Schwarzovy nerovnosti (1.36) je

$$\begin{aligned} 0 &\leq |(u, v) - (u_n, v_n)| = |(u - u_n, v) + (u_n, v - v_n)| \leq \\ &\leq |(u - u_n, v)| + |(u_n, v - v_n)| \leq \|u - u_n\| \cdot \|v\| + \|u_n\| \cdot \|v - v_n\|. \end{aligned}$$

Ale poslední výraz konverguje k nule, neboť vzhledem k (2.68) platí $\|u - u_n\| \rightarrow 0$, $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ a $\|v - v_n\| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Proto musí platit

$$|(u, v) - (u_n, v_n)| \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

a to je (2.69). ■

V definici 1.5 jsme zavedli pojem ortogonálního systému a ortonormálního systému. Připomeňme, že posloupnost prvků $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ prostoru H (konечnou nebo nekonečnou) nazveme *ortogonálním systémem*, platí-li

$$(2.70) \quad (u_i, u_j) = 0 \quad \text{pro } i \neq j,$$

a *ortonormálním systémem*, platí-li

$$(2.71) \quad (u_i, u_j) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j; \end{cases}$$

pro prvky u_i ortonormálního systému je tedy

$$\|u_i\| = 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Analogií Pythagorovy věty je toto tvrzení:

Věta 2.28 *Jsou-li prvky $u_1, u_2, \dots, u_n$ součástí nějakého ortogonálního systému v Hilbertově prostoru H , je*

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2.$$

Důkaz Podle pravidel (S 1) – (S 4) (definice 1.4) je

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^n u_i\right\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n u_i, \sum_{j=1}^n u_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_i, u_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n (u_j, u_j) = \sum_{j=1}^n \|u_j\|^2;\end{aligned}$$

využili jsme zde vztahu (2.70).

V každém Hilbertově prostoru lze sestavit ortogonální a dokonce ortonormální systém. Popíšeme tuto konstrukci, které se říká *Gramova-Schmidtova ortonormalizace*:

Budiž tedy $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots$ konečná nebo nekonečná posloupnost lineárně nezávislých prvků Hilbertova prostoru H (tj. každá konečná n -tice prvků $u_1, u_2, \dots, u_n$ je lineárně nezávislá). Definujme posloupnost

$$e_1, e_2, \dots, e_i, \dots$$

prvků prostoru H následující rekurentním postupem:

$$\begin{aligned}(2.72) \quad e_1 &= \frac{1}{\|u_1\|} u_1, \\ e_2 &= \frac{u_2 - (e_1, u_2)e_1}{\|u_2 - (e_1, u_2)e_1\|}, \\ e_3 &= \frac{u_3 - (e_1, u_3)e_1 - (e_2, u_3)e_2}{\|u_3 - (e_1, u_3)e_1 - (e_2, u_3)e_2\|}, \\ &\dots \\ e_i &= \frac{u_i - \sum_{k=1}^{i-1} (e_k, u_i)e_k}{\|u_i - \sum_{k=1}^{i-1} (e_k, u_i)e_k\|}, \quad i = 4, 5, \dots\end{aligned}$$

Prvky $e_1, e_2, \dots, e_n$ vytvářejí též lineární podprostor prostoru H jako prvky $u_1, u_2, \dots, u_n$ pro každé pevné přirozené číslo n (tj. množina všech lineárních kombinací $\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ je totožná s množinou všech lineárních kombinací $\sum_{j=1}^n \mu_j e_j$, kde λ_j, μ_j jsou libovolná čísla), zřejmě je $\|e_i\| = 1$ pro $i = 1, 2, \dots$ [normy ve jmenovateli zlomků ve vzorci (2.72) jsou nenulové, neboť jinak by prvky $u_1, u_2, \dots, u_i$ byly lineárně závislé] a snadno se lze přesvědčit, že platí

$$(e_i, e_j) = 0 \text{ pro } i \neq j.$$

■

Příklad 2.25 (i) Systém polynomů $u_n(x) = x^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, je lineárně nezávislý. Jejich ortogonalizací v Hilbertově prostoru $L^2(-1, 1)$ dostaneme soustavu

Legendreových polynomů $P_n(x)$, definovaných např. formulí

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n-1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Platí tedy

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m, \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases}$$

(ii) Označme $L_{p(x)}^2(a, b)$ množinu všech (reálných) funkcí $u = u(x)$, pro něž platí

$$\int_a^b |u(x)|^2 p(x) dx < \infty;$$

přitom je $p(x)$ pevná kladná (tzv. *váhovú*) funkce, definovaná na intervalu (a, b) . Prostor $L_{p(x)}^2(a, b)$ je Hilbertův, definujeme-li skalární součin dvou funkcí u, v vzorcem

$$(u, v) = \int_a^b u(x) v(x) p(x) dx.$$

Zvolíme-li $(a, b) = (-\infty, \infty)$ a $p(x) = e^{-x^2}$ a provedeme-li Gramovu-Schmidtovu ortonormalizaci systému $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty = \{x^{n-1}\}_{n=1}^\infty$, dostaneme systém *Hermiteových polynomů* $H_n(x)$, definovaných formulí

$$H_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2^{n-1}(n-1)!}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Platí tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m, \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases}$$

□

• ○ •

V dalším se budeme zabývat nekonečnými řadami tvaru $\sum_{n=1}^\infty u_n$, jejichž členy u_n jsou prvky Hilbertova prostoru H .

Definice 2.38 Budiž $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost prvků Hilbertova prostoru H . Symbolem

$$(2.73) \quad \sum_{n=1}^\infty u_n$$

rozumíme limitu (v H) posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů řady (2.73)

$$(2.74) \quad s_n = \sum_{i=1}^n u_i.$$

Řekneme, že řada (2.73) *konverguje*, konverguje-li posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, a její limitu

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_i, \quad s \in H,$$

nazveme *součtem řady* (2.73). Jestliže řada nekonverguje, řekneme, že *diverguje*.

Věta 2.29 *Budiž $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonální systém prvků Hilbertova prostoru H . Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje právě tehdy, konverguje-li číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$. Je-li $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, pak je*

$$(2.75) \quad \|s\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2.$$

Důkaz Podle věty 2.28 platí při označení (2.74) pro $n > m$ vztah

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 - \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2.$$

To však znamená, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská (v Hilbertově prostoru H) právě tehdy, je-li číselná posloupnost $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$,

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2,$$

cauchyovská. Protože Hilbertův prostor H je úplný, dostáváme první tvrzení věty.

Je-li $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, konverguje posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ k prvku s (v H). Podle věty 2.28 je $\|s_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$. Protože $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, je také $\|s\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\|$ (věta 2.27) čili $\|s\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\|^2$. To však je vztah (2.75). ■

Definice 2.39 Budiž $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální systém prvků Hilbertova prostoru H . Je-li u libovolný prvek prostoru H , nazýváme číslo

$$(2.76) \quad c_k = (e_k, u), \quad k = 1, 2, \dots,$$

Fourierovým koeficientem (přesněji k -tým Fourierovým koeficientem) prvku u a řadu

$$(2.77) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

nazýváme *Fourierovou řadou* prvku u (vzhledem k ortonormálnímu systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Poznámka Pozor, zatím neříkáme nic o tom, že by součet řady (2.77) musel být právě prvek u , jehož je Fourierovou řadou. K tomu, aby to platilo, musí být ortonormální systém $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ dostatečně „bohatý“, musí mít dostatečný počet prvků.

Budeme-li například uvažovat v Hilbertově prostoru $\mathbb{R}^3$ soustavu dvou vektorů $e_1 = (1, 0, 0)$ a $e_2 = (0, 1, 0)$, tvoří tyto vektory ortonormální soustavu, ale vektor $u = (1, 1, 1)$ má přesto od všech lineárních kombinací vektorů e_1 a e_2 ,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$$

vzdálenost $\|u - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)\| = \sqrt{(\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + 1} \geq 1$, a tedy pro něj nemůže platit vztah

$$u = c_1 e_1 + c_2 e_2,$$

který by odpovídal v případě Fourierovy řady (2.77) vztahu $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$.

„Bohatost“ našeho ortonormálního systému bude zaručena, bude-li *úplný*.

Definice 2.40 Ortonormální systém $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků Hilbertova prostoru nazýváme *úplný*, neexistuje-li žádný nenulový prvek $u \in H$ ($u \neq o$!), který by byl ortogonální ke všem prvkům systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jinými slovy: ortonormální systém $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *úplný*, platí-li implikace

$$(e_n, u) = 0 \text{ pro } n = 1, 2, \dots \implies u = o.$$

Základním tvrzením teorie ortogonálních rozvoji (rozvoji ve Fourierovu řadu) prvků Hilbertova prostoru H je následující věta.

Věta 2.30 Budiž $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální systém prvků Hilbertova prostoru H . Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

- (i) Systém $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *úplný*.
- (ii) Pro každý prvek $u \in H$ platí

$$(2.78) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, u) e_n$$

(tj. každý prvek $u \in H$ je součtem své Fourierovy řady vzhledem k systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).

- (iii) Pro každý prvek $u \in H$ platí Parsevalova rovnost

$$(2.79) \quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, u)|^2.$$

Důkaz zde nebudeme provádět; doporučujeme však čtenáři, aby si uvědomil, že ekvivalence výroků (ii) a (iii) je okamžitým důsledkem věty 2.29.

Pokud nemáme zaručenou konvergenci Fourierovy řady (2.77) k prvku u , místo Parsevalovy rovnosti platí pouze *Besselova nerovnost*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, u)|^2 \leq \|u\|^2.$$

Příklad 2.26 (i) Systém $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ Legendreových polynomů, zavedených v příkladu 2.25 (i), je *úplný* v prostoru $L^2(-1, 1)$. Právě tak je úplný v prostoru $L^2(-\infty, \infty)$ systém $\{H_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ Hermiteových polynomů zavedený v příkladu 2.25 (ii).

(ii) Systém funkcí $u_n(x) = \cos n\pi x$, $n = 1, 2, \dots$, je ortogonální systém v prostoru $L^2(0, 1)$, ale není tam *úplný*: Přesvědčte se, že funkce $u_0(x) \equiv 1$ je ortogonální ke všem funkcím $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$; přitom je zřejmě $u_0 \neq 0$. Systém

$$(2.80) \quad \{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty},$$

který dostaneme, když k systému $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ přidáme funkci u_0 , už v $L^2(0, 1)$ úplný je.

(iii) Systém

$$(2.81) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} \quad (i^2 = -1!),$$

je úplný ortonormální systém v prostoru $L^2(0, 2\pi)$ a vůbec v každém prostoru $L^2(a, a + 2\pi)$, kde a je libovolné reálné číslo.

□

Poznámky (i) Důkaz úplnosti konkrétního ortonormálního systému v konkrétním Hilbertově prostoru H není vždy snadný.

(ii) Systémy (2.80) a (2.81) jsou systémy, které hrají důležitou roli v teorii (trigonometrických) Fourierových řad; současně upozorňujeme čtenáře, že to jsou systémy typu $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, resp. $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, takže naše definice, v níž vystupují systémy typu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dá zřejmým způsobem modifikovat.

(iii) Místo systému (2.81) se častěji setkáme se systémem

$$(2.82) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \right. \\ \left. \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots \right\},$$

který je opět úplný ortonormální systém v prostoru $L^2(0, 2\pi)$.

Definice 2.41 Budiž H Hilbertův prostor a M podmnožina prostoru H . Množinu všech prvků $x \in H$, které jsou kolmé ke všem prvkům z M , označíme $M^{\perp}$ a nazveme *ortogonálním doplňkem množiny M* (v prostoru H .) Je tedy

$$(2.83) \quad M^{\perp} = \{u \in H, (u, v) = 0 \text{ pro všechna } v \in M\}.$$

Lemma 2.7 *Ortogonalní doplněk $M^\perp$ je uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru H .*

Důkaz Je-li $u \in M^\perp$, je pro každé číslo λ

$$(\lambda u, v) = \lambda(u, v) = 0 \quad \text{pro každé } v \in M,$$

a tedy také $\lambda u \in M^\perp$. Jsou-li $u_1, u_2 \in M^\perp$, je také $u_1 + u_2 \in M^\perp$, neboť pro každé $v \in M$ je

$$(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) = 0 + 0 = 0.$$

Množina $M^\perp$ je tedy lineární prostor. Je-li $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost prvků z $M^\perp$ a platí-li $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$ (v H), je také $u_0 \in M^\perp$, neboť pro každé $v \in M$ je

$$(u_0, v) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n, v \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

(použili jsme větu 2.27 o spojitosti skalárního součinu). ■

Příklad 2.27 Budiž H Hilbertův prostor a $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ úplný ortonormální systém v H . Budiž

$$M = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

podmnožina prostoru H , tvořená prvními k prvky našeho systému. Pak je ortogonální doplněk $M^\perp$ tvořen všemi prvky $u \in H$, které lze zapsat ve tvaru

$$(2.84) \quad u = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n e_n, \text{ kde } \sum_{n=k+1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty;$$

konstanty c_n jsou jinak libovolné. Platí totiž

$$(u, e_j) = \sum_{n=k+1}^{\infty} (c_n e_n, e_j) = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (e_n, e_j) = 0$$

pro $j = 1, 2, \dots, k$ [použili jsme opět větu 2.27 a vztah (2.71)], tj. $u \in M^\perp$. Je-li naopak u libovolný prvek z $M^\perp$, platí podle věty 2.30, vzorec (2.78):

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, u) e_n.$$

Protože $u \in M^\perp$, je $(e_n, u) = \overline{(u, e_n)} = 0$ pro $n = 1, 2, \dots, k$, a tedy má u tvar (2.84):

$$u = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n e_n \quad \text{s} \quad c_n = (e_n, u), \quad n = k+1, k+2, \dots$$

Podle věty 2.30 (vzorce (2.79)), je dále

$$\|u\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |(e_n, u)|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |c_n|^2,$$

a protože $\|u\|^2 < \infty$, konverguje také poslední řada.

Dokázali jsme tedy, že ortogonální doplněk množiny, tvořené konečným počtem prvků ortonormálního systému, je tvořen všemi Fourierovými řadami, v nichž vystupují zbývající prvky našeho ortonormálního systému. $\square$

Cvičení 2.9 Dokažte, že když za M zvolíme nějakou nekonečnou podposloupnost ortonormálního systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, např. $M = \{e_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_3, e_5, \dots\}$, bude $M^\perp$ tvořen všemi Fourierovými řadami, v nichž vystupují zbývající prvky našeho ortonormálního systému, a tedy v našem případě

$$M^\perp = \{u \in H, u = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} e_{2k}, \sum_{k=1}^{\infty} |c_{2k}|^2 < \infty\}.$$

Definice 2.42 Nechť jsou M_1 a M_2 dva uzavřené lineární podprostory Hilbertova prostoru H a nechť platí

$$(2.85) \quad (u_1, u_2) = 0 \text{ pro všechna } u_1 \in M_1 \text{ a } u_2 \in M_2$$

(říkáme pak, že *podprostory M_1 a M_2 jsou k sobě kolmé neboli ortogonální*). Množinu všech prvků $u \in H$ tvaru

$$u = u_1 + u_2, \text{ kde } u_1 \in M_1 \text{ a } u_2 \in M_2,$$

nazveme *direktním (ortogonálním) součtem* podprostorů M_1 a M_2 a označíme ji

$$M_1 \oplus M_2.$$

Cvičení 2.10 Dokažte, že direktní součet uzavřených lineárních podprostorů M_1, M_2 Hilbertova prostoru H je opět uzavřený lineární podprostor prostoru H .

Věta 2.31 Je-li M_1 uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru H a $M_2 = M_1^\perp$ jeho ortogonální doplněk, je prostor H direktním součtem podprostorů M_1 a M_2 :

$$(2.86) \quad H = M_1 \oplus M_2, \quad \text{tj.} \quad H = M_1 \oplus M_1^\perp.$$

Příklad 2.28 Pojem ortogonálního doplňku a direktního součtu je zobecněním situace, kterou známe důvěrně např. z trojrozměrného prostoru: Zvolíme-li $H = \mathbb{R}^3$ a $M_1 = \{x = (x_1, 0, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$ (tj. M_1 je osa x_1), je ortogonální doplněk dvourozměrný prostor všech $x \in \mathbb{R}^3$ tvaru $x = (0, \lambda_1, \lambda_2), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Zřejmě je

$$\mathbb{R}^3 = M_1 \oplus M_1^\perp.$$

Zvolíme-li za M_2 množinu $\{x = (0, x_2, 0), x_2 \in \mathbb{R}\}$ (tj. M_2 je osa x_2), je direktním součtem prostorů M_1 a M_2 rovina x_1x_2 , tj.

$$M_1 \oplus M_2 = \{x = (x_1, x_2, 0), x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

V tomto případě je tedy $M_1 \oplus M_2 \subset H = \mathbb{R}^3$, a inkluze je zde *ostrá*. □

Obecným vyjádřením názorné situace z příkladu 2.28 (nakreslete si obrázek!) je toto obecné tvrzení.

Věta 2.32 *Budiž H Hilbertův prostor a M_1, M_2 dva jeho uzavřené lineární podprostory. Nechť platí*

$$H = M_1 \oplus M_2.$$

Pak platí tyto vztahy

$$(2.87) \quad \begin{aligned} M_1 \cap M_2 &= \{o\}, \\ M_1 &= M_2^\perp, \\ M_2 &= M_1^\perp \end{aligned}$$

a každý prvek $u \in H$ lze zapsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$(2.88) \quad u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in M_1, \quad u_2 \in M_2.$$

Důkaz Protože M_1, M_2 jsou *lineární* podprostory prostoru H , je $o \in M_1$ a $o \in M_2$, a tedy $o \in M_1 \cap M_2$. Je-li naopak $u \in M_1 \cap M_2$, je podle formule (2.85) z definice 2.42, $(u, u) = 0$, čili $\|u\|^2 = 0$ čili $u = o$. Tím jsme dokázali první z formulí (2.87).

Důkaz obou zbývajících formulí přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Zbývá tedy dokázat, že zápis prvku u ve tvaru (2.88) je jednoznačný. Protože $u \in H$ a $H = M_1 \oplus M_2$, existuje alespoň jeden takový zápis podle definice 2.42:

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in M_1, \quad u_2 \in M_2.$$

Předpokládejme, že je také

$$u = v_1 + v_2, \quad v_1 \in M_1, \quad v_2 \in M_2.$$

Je tedy $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, čili $u_1 - v_1 = v_2 - u_2$. Prvek $u_1 - v_1$ patří do M_1 , neboť $u_1 \in M_1, v_1 \in M_1$. Podobně také $v_2 - u_2 \in M_2$, tj. $u_1 - v_1 \in M_1 \cap M_2$ a $v_2 - u_2 = u_1 - v_1 \in M_1 \cap M_2$. Podle první formule v (2.87) musí být $u_1 - v_1 = o$, $v_2 - u_2 = o$ čili $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ a rozklad (2.88) je tedy jediný. ■

V úvodní kapitole jsme se zabývali jedním problémem z teorie aproximace. Jednalo se vlastně o použití následujícího tvrzení.

Věta 2.33 *Budiž M uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru H . Ke každému prvku $u \in H$ existuje právě jeden prvek $u_0 \in M$, který má od prvku u minimální vzdálenost, tj. takový, že platí*

$$(2.89) \quad \|u - u_0\| = \inf_{v \in M} \|u - v\|.$$

Prvek $w = u - u_0$ patří do ortogonálního doplňku $M^\perp$. [Prvek u_0 pak nazýváme průmětem (projekcí) prvku u na M .]

Příklad 2.29 Uvažujme v (reálném) Hilbertově prostoru H s úplným ortonormálním systémem $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ lineární podprostor M všech prvků $v \in H$ tvaru

$$(2.90) \quad v = \sum_{n=1}^k \alpha_n e_n,$$

kde k je pevné přirozené číslo a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jsou libovolná reálná čísla.

Podle vzorce (2.78) z věty 2.30 lze prvek $u \in H$ vyjádřit ve tvaru

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad \text{kde } c_n = (e_n, u).$$

Podle pravidel o počítání se skalárním součinem je

$$\|u - v\|^2 = (u - v, u - v) = \|u\|^2 - 2(u, v) + \|v\|^2$$

[pracujeme s reálným Hilbertovým prostorem, a proto je $(u, v) = (v, u)$]. Podle (2.79) a podle věty 2.28 je

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad \|v\|^2 = \sum_{n=1}^k |\alpha_n|^2$$

a

$$(u, v) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k c_n \alpha_i (e_n, e_i) = \sum_{n=1}^k c_n \alpha_n.$$

Je tedy

$$\|u - v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 - 2 \sum_{n=1}^k c_n \alpha_n + \sum_{n=1}^k \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^k (c_n - \alpha_n)^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n^2.$$

Měníme-li prvek v , měníme vlastně čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, a je ihned vidět, že číslo $\|u - v\|^2$, a tedy i číslo $\|u - v\|$, bude nejmenší, bude-li $\sum_{n=1}^k (c_n - \alpha_n)^2 = 0$ čili

$$\alpha_n = c_n, \quad n = 1, 2, \dots, k.$$

Tedy prvek $u_0 \in M$, pro který platí (2.89), má tvar

$$u_0 = \sum_{n=1}^k c_n e_n$$

a je to právě k -tý částečný součet s_k Fourierovy řady prvku u .

Dokázali jsme tak, že mezi všemi prvky tvaru (2.90) aproximuje daný prvek v prostoru H právě k -tý částečný součet jeho Fourierovy řady. □

David HILBERT (1862 – 1943) se zabýval především prostorem l^2 v souvislosti s řešením soustav nekonečně mnoha lineárních algebraických rovnic o nekonečně mnoha neznámých. Ukazuje se, že v jistém smyslu je prostor l^2 univerzálním Hilbertovým prostorem.

Věta 2.34 *Budiž H Hilbertův prostor a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ úplný ortonormální systém v H . Konverguje-li číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ [tj. patří-li posloupnost $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ do l^2], existuje právě jeden prvek $u \in H$, jehož Fourierovy koeficienty (vzhledem k systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$) jsou rovny číslům α_n :*

$$\alpha_n = (e_n, u), \quad n = 1, 2, \dots$$

Spolu s tvrzeními (ii) a (iii) věty 2.30 tedy věta 2.34 říká, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi prvky $u \in H$ a posloupnostmi $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$: Zobrazením S je prvku $u \in H$ přiřazená posloupnost jeho Fourierových koeficientů:

$$Su = \{(e_n, u)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Současně podle (2.79) je

$$\|Su\|_{l^2} = \|u\|,$$

takže se jedná o *izomorfismus*. Proto můžeme Hilbertův prostor H a prostor l^2 *ztotožnit*, což formálně můžeme zapsat takto

$$H = l^2.$$

Poznámka Je třeba zdůraznit, že předpoklad *existence úplného ortonormálního systému* v H byl v předcházejících úvahách podstatný. Prostorům H , v nichž takový systém existuje, říkáme též *separabilní Hilbertovy prostory*.

V literatuře se často setkáme s následující definicí separabilního Hilbertova (nebo Banachova) prostoru. Hilbertův prostor H (Banachův prostor X) nazveme *separabilní*, obsahuje-li hustou spočetnou podmnožinu $\mathcal{S}$. Pojem husté množiny chápeme vzhledem k dané normě na H (resp. X) takto:

$$\forall u \in H \text{ (resp. } \forall u \in X) \quad \exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S} :$$

$$\|u_n - u\|_H \rightarrow 0 \quad (\text{ resp. } \|u_n - u\|_X \rightarrow 0).$$

Na závěr uvedme ještě větu o obecném tvaru lineárního funkcionálu v Hilbertově prostoru H : Je-li H Hilbertův prostor se skalárním součinem $(.,.)$ a v pevný prvek z H , je předpisem

$$(2.91) \quad F(u) = (u, v), \quad u \in H,$$

zřejmě určen lineární funkcionál. Ten je dokonce spojitý, neboť podle Schwarzovy nerovnosti je

$$|F(u)| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

a tedy je $\|F\|_* \leq \|v\|$.

Platí však mnohem více.

Věta 2.35 (R. RIESZ). *Je-li H Hilbertův prostor a F spojitý lineární funkcionál na H , pak existuje právě jeden prvek $v \in H$ tak, že pro všechny prvky $u \in H$ je*

$$F(u) = (u, v).$$

Navíc platí

$$(2.92) \quad \|F\|_* = \|v\|.$$

Vzorec (2.91) tedy udává obecný tvar lineárního funkcionálu na Hilbertově prostoru H . Vzhledem ke vzájemnému přiřazení funkcionálu $F \in H^*$ a prvku $v \in H$ a vzhledem ke vztahu (2.92) můžeme prostor H a jeho duální prostor H^* *ztotožnit* (ve smyslu izomorfizmu), tj. je

$$H^* = H.$$

Odtud mj. ihned plyne, že Hilbertův prostor H je *reflexivní*.

Kapitola 3

Operátory v Banachových a Hilbertových prostorech

3.1 Základní vlastnosti operátorů, lineární operátory

Už v odst. 2.3 jsme se zmínili o pojmu *operátoru*, tj. o zobrazení T , které přiřazuje prvku u z prostoru X prvek v z prostoru Y ; toto přiřazení zapíšeme takto:

$$(3.1) \quad v = Tu$$

a řekneme, že operátor T zobrazuje prostor X do prostoru Y :

$$(3.2) \quad T : X \rightarrow Y.$$

V aplikacích matematiky stojí v popředí problém *řešení rovnic*, a ve funkcionální analýze má tento problém abstraktní vyjádření ve formě tzv. *operátorové rovnice*. Je-li dán operátor T typu (3.2) a je-li v pevný prvek z prostoru Y , ptáme se, zda *existuje* prvek $u \in X$ tak, že platí

$$(3.3) \quad Tu = v,$$

a existuje-li, ptáme se, jak ho *najít* (určit). V této abstraktní formulaci je pochopitelně odpověď velmi obtížná; proto třídu prostorů X, Y a operátorů T , pro něž budeme hledat řešení operátorové rovnice (3.3), poněkud zúžíme.

Příklad 3.1 (i) Nejjednodušším operátorem je (reálná) *funkce* $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ N reálných proměnných. Prostor X je její definiční obor $D(f)$, $D(f) \subset \mathbb{R}^N$, prostor Y je množina $\mathbb{R}$. „Operátorová rovnice“ je tedy obyčejná transcendentní rovnice

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(ii) Soustavu N lineárních algebraických rovnic

$$(3.4) \quad \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ je neznámý vektor a $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ je daný vektor pravých stran, můžeme též chápat jako operátorovou rovnici; operátor

$$T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

je charakterizován maticí $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ a pro $x \in \mathbb{R}^N$ je $Tx \in \mathbb{R}^N$ právě vektor y z formule (3.4).

(iii) Zobecněním soustavy (3.4) je soustava *nekonečně mnoha lineárních rovnic o nekonečně mnoha neznámých*

$$(3.5) \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = y_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Přesvědčte se, že pokud nekonečná matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty,$$

je formulí (3.5) přiřazen prvku $u = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ prvek $Tu = v = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$. Nekonečná matice A pak reprezentuje operátor T :

$$T : l^2 \rightarrow l^2$$

a soustava (3.5) je opět operátorová rovnice. Právě takovými rovnicemi se zabýval HILBERT.

(iv) Zvolme za prostor X prostor $C^2(\langle 0, 1 \rangle)$ a za Y prostor $C(\langle 0, 1 \rangle)$ (viz definici 2.17 a definici 2.16) a prvku $u \in C^2(\langle 0, 1 \rangle)$ [tj. funkci $u = u(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$] přiřadíme prvek $Tu = v \in Y$ [tj. funkci $v = v(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$] předpisem

$$(3.6) \quad Tu = -\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Tímto předpisem je určen tzv. *diferenciální operátor* T ,

$$T : C^2(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow C(\langle 0, 1 \rangle),$$

a diferenciální rovnici $-u'' = v$ lze tedy opět chápat jako operátorovou rovnici. □

Jestliže pro prostory X a Y platí $X = Y$, říkáme, že operátor

$$T : X \rightarrow X$$

zobrazuje prostor X do sebe. Prvek $u \in X$, pro který platí

$$(3.7) \quad Tu = u,$$

tj. který se zobrazí sám na sebe, nazveme *pevným bodem* operátoru T . Vztah (3.7) můžeme zapsat ve tvaru

$$Tu - u = 0$$

(pozor: pouze za předpokladu, že prostor X je lineární) a je to pak speciální operátorová rovnice typu

$$Su = 0,$$

kde operátor S má tvar $Su = Tu - u$, čili $S = T - I$, kde I je tzv. *identický* operátor, přiřazující prvku u tentýž prvek:

$$I : X \rightarrow X, \quad Iu = u.$$

Řadu praktických problémů lze formulovat ve tvaru (3.7), tj. převedeme je na hledání pevného bodu (nebo pevných bodů) jistého operátoru T . Existence pevného bodu ovšem nemusí být vždy zaručena (operátor T , přiřazující prvku $u \in \mathbb{R}^N$ prvek $Tu = u + \tilde{u}$, kde $\tilde{u}$ je *pevný* prvek z $\mathbb{R}^N$, znamená geometricky *translaci* čili posunutí o vektor $\tilde{u}$; snadno se přesvědčíte, že pro $\tilde{u} \neq 0$ *neexistuje* pevný bod operátoru T , zatímco pro $\tilde{u} = 0$ je *každý* bod $u \in \mathbb{R}^N$ pevným bodem). Pro jistou speciální třídu operátorů však můžeme existenci pevného bodu zaručit a dokonce udat metodu, jak ho určit.

Definice 3.1 Operátor T , zobrazující metrický prostor (X, ρ) s metrikou ρ do sebe, se nazývá *kontrahující operátor* (*kontrakce*), existuje-li číslo α , $0 < \alpha < 1$, tak, že pro všechny prvky $u, v \in X$ platí

$$(3.8) \quad \rho(Tu, Tv) \leq \alpha \rho(u, v).$$

Věta 3.1 (BANACH). *Budiž T kontrahující operátor, zobrazující úplný metrický prostor (X, ρ) do sebe. Pak existuje právě jeden pevný bod u_0 operátoru T a platí*

$$u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (\text{tj. } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u_0) = 0),$$

kde $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost určená rekurentním předpisem

$$(3.9) \quad u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

s libovolně zvoleným prvkem $u_1 \in X$.

Důkaz Z definice posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a z podmínky (3.8) plyne, že

$$\begin{aligned}\rho(u_1, u_2) &= \rho(u_1, Tu_1), \\ \rho(u_2, u_3) &= \rho(Tu_1, Tu_2) \leq \alpha\rho(u_1, u_2) = \alpha\rho(u_1, Tu_1), \\ \rho(u_3, u_4) &= \rho(Tu_2, Tu_3) \leq \alpha\rho(u_2, u_3) \leq \alpha^2\rho(u_1, Tu_1)\end{aligned}$$

atd, obecně

$$\rho(u_n, u_{n+1}) \leq \alpha^{n-1}\rho(u_1, Tu_1), \quad n = 2, 3, \dots$$

Dále je pro $m > n$ podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned}\rho(u_n, u_m) &\leq \rho(u_n, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \dots + \rho(u_{m-1}, u_m) \leq \\ &\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^n + \dots + \alpha^{m-2})\rho(u_1, Tu_1) = \\ &= \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1})\rho(u_1, Tu_1) \leq \\ &\leq \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots)\rho(u_1, Tu_1) = \\ &= \alpha^{n-1} \frac{1}{1-\alpha} \rho(u_1, Tu_1)\end{aligned}$$

a tedy $\rho(u_m, u_n) \rightarrow 0$ pro $m, n \rightarrow \infty$ (neboť $\alpha < 1$), čili posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Protože metrický prostor (X, ρ) je úplný, je posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, tj. existuje její limita u_0 .

Ukážeme, že u_0 je hledaný pevný bod: Protože platí

$$\begin{aligned}\rho(u_0, Tu_0) &\leq \rho(u_0, u_n) + \rho(u_n, Tu_0) = \\ &= \rho(u_0, u_n) + \rho(Tu_{n-1}, Tu_0) \leq \\ &\leq \rho(u_0, u_n) + \alpha\rho(u_{n-1}, u_0)\end{aligned}$$

a poslední výraz konverguje pro $n \rightarrow \infty$ k nule, musí být levá strana nulová: $\rho(u_0, Tu_0) = 0$, a tedy podle vlastnosti (M 1) metriky ρ je

$$u_0 = Tu_0.$$

Zbývá dokázat, že pevný bod u_0 je určen *jednoznačně*. Předpokládejme tedy, že existují dva pevné body u_0, u_0^* :

$$u_0 = Tu_0, \quad u_0^* = Tu_0^*.$$

Podle (3.8) je

$$\rho(u_0, u_0^*) = \rho(Tu_0, Tu_0^*) \leq \alpha\rho(u_0, u_0^*).$$

Kdyby bylo $\rho(u_0, u_0^*) > 0$, dostali bychom vztah $1 \leq \alpha$, a to je ve sporu s předpokladem $0 < \alpha < 1$. Musí tedy být $\rho(u_0, u_0^*) = 0$, čili podle (M 1) $u_0 = u_0^*$. ■

Příklad 3.2 V přednášce z obyčejných diferenciálních rovnic jsme řešení Cauchyovy (počáteční) úlohy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

převodli na řešení integrální rovnice

$$(3.10) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

(viz [10]). Zavedeme-li pro funkci $u = u(t) \in X = C([x_0 - h, x_0 + h])$ operátor $T : X \rightarrow X$ předpisem

$$(3.11) \quad (Tu)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt,$$

je řešení y rovnice (3.10) právě pevným bodem operátoru T . Důkaz existence řešení i metoda jeho konstrukce, jak jsme ji tehdy realizovali, sledovala přesně ideje důkazu věty 3.1. [Uvědomte si, za jakých podmínek je operátor T z (3.11) kontrahující na prostoru $C([x_0 - h, x_0 + h])$ s metrikou $\rho(u, v) = \max_{|x-x_0| \leq h} |u(x) - v(x)|$ a jakou roli přitom hrálo číslo $h > 0$!]

Metrický prostor (X, ρ) ve větě 3.1 nemusí být lineárním prostorem. Prostory X, Y , s nimiž jsme se v příkladech 3.1 a 3.2 setkali, ovšem byly lineární, a my se v dalším omezíme dokonce na Banachovy a Hilbertovy prostory.

Operátory T z příkladu 3.1 (ii) – (iv) měly tuto vlastnost: pro libovolné dva prvky $u, v \in X$ a pro čísla λ, μ bylo

$$(3.12) \quad T(\lambda u + \mu v) = \lambda Tu + \mu Tv$$

(uvědomte si, že zde bylo důležité, že prostory X a Y jsou lineární!). Právě takovými operátory se budeme převážně zabývat. (Pozor: operátor T z (3.11) vlastnost (3.12) obecně nemá!).

□

Definice 3.2 Necht' jsou $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dva Banachovy prostory a budiž X_0 lineární podprostor prostoru X . Budiž T operátor, zobrazující X_0 do Y :

$$T : X_0 \rightarrow Y.$$

Jestliže pro všechny prvky $u, v \in X_0$ a pro libovolná čísla λ, μ platí vztah (3.12), řekneme, že operátor T je *lineární operátor*.

Množinu X_0 nazveme *definičním oborem* operátoru T a označíme ji

$$\mathcal{D}(T)$$

(od anglického *domain*). Množinu všech prvků $v \in Y$, které jsou obrazy nějakého prvku $u \in X_0$, nazveme *oborem hodnot* operátoru T a označíme ji

$$\mathcal{R}(T)$$

(od anglického *range*). Je tedy

$$\mathcal{R}(T) = \{v \in Y : v = Tu \text{ pro nějaké } u \in X_0\}.$$

Množinu všech prvků $u \in X_0$, které se zobrazí na nulový prvek o prostoru Y , nazveme *jádrem* operátoru T a označíme ji

$$\text{Ker } T.$$

Je tedy

$$\text{Ker } T = \{u \in X_0; Tu = o\}.$$

Poznámka Definiční obor $\mathcal{D}(T)$ operátoru T zavádíme, protože operátor T nemusí být definován na celém prostoru X , tj. může být

$$X_0 = \mathcal{D}(T) \subset X, \text{ ale } X_0 \neq X.$$

Zvolíme-li například $X = L^2(0, 1)$, je operátor T z příkladu 3.1 (iv) definován pouze pro $u \in X_0 = C^2([0, 1])$, tj. je $X_0 \neq X$.

Příklad 3.3 Identický operátor I , přiřazující prvku $u \in X$ týž prvek, tj. takový, že

$$Iu = u \text{ pro každé } u \in X,$$

zobrazuje prostor X na sebe. Budeme-li chtít zdůraznit, že identický operátor je definován na X , tj. má definiční obor $\mathcal{D}(I) = X$, zdůrazníme to označením

$$I_X.$$

Identický operátor je lineární operátor.

□

Lineární operátory můžeme za jistých podmínek sčítat, násobit číslem a skládat („násobit“).

Definice 3.3 (i) *Součet* $T + S$ dvou (lineárních) operátorů $T : X \rightarrow Y$ a $S : X \rightarrow Y$ definujeme vzorcem

$$(T + S)(u) = Tu + Su, \quad u \in X \quad (\text{přesněji } u \in \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S))$$

(ii) λ -*násobek* λT (lineárního) operátoru T číslem λ definujeme vzorcem

$$(\lambda T)(u) = \lambda(Tu), \quad u \in X \quad (\text{přesněji } u \in \mathcal{D}(T))$$

(iii) *Součin* ST dvou (lineárních) operátorů $T : X \rightarrow Y$ a $S : Y \rightarrow Z$, kde X, Y, Z jsou lineární prostory, je definován vzorcem

$$(ST)(u) = S(Tu), \quad u \in X.$$

(Předpokládáme, že $\mathcal{D}(T) = X$, $\mathcal{R}(T) = Y$, $\mathcal{D}(S) = Y = \mathcal{R}(T)$.) Místo o součinu operátorů S a T hovoříme též o *složeném operátoru*. (Pozor: při skládání operátorů záleží na pořadí!)

(iv) Jestliže operátor T zobrazuje prostor X na sebe (tj. $T : X \rightarrow X$, $\mathcal{D}(T) = \mathcal{R}(T) = X$), lze tvořit *mocniny* T^n operátoru T ($n = 0, 1, 2, \dots$) takto:

$$\begin{aligned} T^0 &= I (= I_X), \\ T^1 &= T, \\ T^2 &= TT, \dots, \\ T^{n+1} &= TT^n, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

(v) Je-li $T : X \rightarrow Y$ (lineární) operátor, zobrazující prostor X na Y , a existuje-li operátor $S : Y \rightarrow X$, zobrazující Y na X tak, že platí

$$(3.13) \quad ST = I_X, \quad TS = I_Y,$$

pak nazýváme S operátorem *inverzním* k T a značíme ho T^{-1} :

$$S = T^{-1}.$$

Cvičení 3.1 Dokažte následující tvrzení:

(i) Množina všech lineárních operátorů $T : X \rightarrow Y$ tvoří vzhledem ke sčítání a násobení číslem dle definice 3.3 (i), (ii) lineární prostor.

(ii) Jsou-li S a T lineární operátory a má-li smysl složený operátor ST , je také ST lineární operátor.

(iii) Je-li T lineární operátor a existuje-li inverzní operátor T^{-1} , je také T^{-1} lineární operátor. Inverzní operátor je určen jednoznačně.

(iv) Jsou-li $T : X \rightarrow Y$ a $S : Y \rightarrow Z$ lineární operátory, k nimž existují inverzní operátory, pak existuje inverzní operátor i k jejich součinu $ST : X \rightarrow Z$ a platí

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

Poznámka Znalost operátoru T^{-1} inverzního k operátoru T je vlastně ekvivalentní s možností řešit operátorovou rovnici

$$Tu = v.$$

Použijeme-li totiž na obě strany předcházející rovnosti operátor T^{-1} , dostaneme vztah

$$T^{-1}Tu = T^{-1}v$$

čili vzhledem k (3.13)

$$I_X u = T^{-1}v \quad \text{čili} \quad u = T^{-1}v.$$

Prvek u je nyní hledané řešení.

Podobně jako u funkcionalů můžeme zavést pojem spojitého operátoru a omezeného operátoru:

Definice 3.4 Budiž $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$. Řekneme, že operátor T je *spojitý*, jestliže platí

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow u \text{ v } X \\ u_n, u \in \mathcal{D}(T) \end{array} \right\} \implies Tu_n \rightarrow Tu \text{ v } Y \text{ (pro } n \rightarrow \infty)$$

tj. jestliže ze vztahu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_X = 0$ plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n - Tu\|_Y = 0.$$

Řekneme, že operátor T je *omezený*, existuje-li konstanta $K_0 > 0$ tak, že pro všechna $u \in \mathcal{D}(T)$ platí

$$(3.14) \quad \|Tu\|_Y \leq K_0 \|u\|_X.$$

Infimum všech hodnot K_0 , pro které platí nerovnost (3.14), označíme $\|T\|$ a nazveme *normou operátoru* T .

Pro lineární operátory platí obdoba věty 2.18:

Věta 3.2 Lineární operátor T je spojitý právě tehdy, je-li omezený.

Příklad 3.4 (i) V prostoru $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$, opatřeném normou $\|u\|_X = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$, definujme operátor K předpisem

$$(3.15) \quad (Ku)(x) = \int_0^1 K(x, t)u(t)dt,$$

kde $K(x, t)$ je spojitá funkce, definovaná na čtverci $Q = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Přesvědčte se, že operátor K je lineární a že zobrazuje prostor X do sebe. Operátor K nazýváme *integrálním operátorem* a funkci $K = K(x, t)$ nazýváme *jádrem*.

Operátor K je *omezený*: Platí totiž

$$\begin{aligned} |(Ku)(x)| &= \left| \int_0^1 K(x, t)u(t)dt \right| \leq \int_0^1 |K(x, t)| \cdot |u(t)|dt \leq \\ &\leq \int_0^1 |K(x, t)| \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|dt = \int_0^1 |K(x, t)|dt \|u\|_X \end{aligned}$$

pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Přejdeme-li v předcházející nerovnosti k maximum, dostaneme vztah

$$\|Ku\|_X = \max_{0 \leq x \leq 1} |K(u)(x)| \leq \|u\|_X \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x, t)| dt,$$

a to je nerovnost (3.14) s konstantou $K_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x, t)| dt$. Operátor K je tedy omezený – a tudíž podle věty 3.2 spojitý – operátor z $C(\langle 0, 1 \rangle)$ do sebe. Lze ukázat, že výše uvedené číslo K_0 je dokonce přímo normou operátoru $K : \|K\| = K_0$.

(ii) Uvažujme nyní operátor K ze vzorce (3.15) na prostoru $X = L^2(0, 1)$. Pak K zobrazuje prostor $L^2(0, 1)$ opět do sebe, a to dokonce za slabšího předpokladu o jádru K : místo spojitosti K stačí předpokládat, že číslo

$$(3.16) \quad K_0^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt$$

je konečné. Podle Hölderovy nerovnosti pak platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(Ku)(x)|^2 dx &= \|Ku\|_X^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x, t)u(t) dt \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, t)| \cdot |u(t)| dt \right)^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, t)|^2 dt \right) \left(\int_0^1 |u(t)|^2 dt \right) dx = \\ &= \|u\|_X^2 \int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dt dx = K_0^2 \|u\|_X^2. \end{aligned}$$

To ukazuje, že operátor K je omezený – a tedy spojitý – i jako operátor z $L^2(0, 1)$ do sebe. Číslo K_0 z (3.16) je dokonce přímo normou operátoru K .

[Uvědomte si rozdíl mezi případem (i) a (ii): Jedná se o *týž operátor* (tj. operátor daný *týmž přípisem*), ale operátor je definován na *různých prostorech* a má také *různé normy*!]

(iii) Uvažujme diferenciální operátor z příkladu 3.1 (iv), tj. operátor

$$Tu = -\frac{d^2 u}{dx^2},$$

ovšem tentokrát jako operátor, zobrazující prostor $X = L^2(0, \pi)$ do sebe. Definičním oborem $\mathcal{D}(T)$ operátoru T je množina $C^2(\langle 0, \pi \rangle) \subset L^2(0, \pi)$. Tento operátor *není omezený* (a tedy – protože je lineární – ani spojitý). Zvolíme-li totiž $u_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$, je

$$(Tu_n)(x) = -\frac{d^2 u_n}{dx^2} = n^2 \sin nx = n^2 u_n(x),$$

a tedy je

$$(3.17) \|Tu_n\|_X = \left(\int_0^\pi |Tu_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = n^2 \left(\int_0^\pi |u_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = n^2 \|u_n\|_X.$$

Kdyby nyní existovala konstanta K_0 tak, aby platilo (3.14) (s $Y = X$), vedla by volba funkce u_n s $n > \sqrt{K_0}$ ke sporu s nerovností (3.17). □

Víme, že řešení operátorové rovnice souvisí s existencí inverzního operátoru. Platí nyní

Věta 3.3 (BANACH). *Je-li T omezený lineární operátor, zobrazující Banachův prostor X na Banachův prostor Y (tj. $\mathcal{D}(T) = X$, $\mathcal{R}(T) = Y$) a je-li pro $u, v \in X$, $u \neq v$, také $Tu \neq Tv$, pak existuje inverzní operátor T^{-1} a je také omezený.*

Věta 3.4 *Je-li T omezený lineární operátor, zobrazující Banachův prostor X do sebe, a platí-li $\|T\| < 1$, pak operátor $(I - T)^{-1}$ inverzní k operátoru $I - T$ (I je identický operátor na prostoru X) existuje, je omezený a lze ho vyjádřit ve tvaru*

$$(3.18) \quad (I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Důkaz (idea). Protože je $\|T\| < 1$, je $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k < \infty$ (dokažte si jako cvičení, že pro složený operátor ST platí $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$, jsou-li S a T omezené operátory a mají-li zde uvedené výrazy smysl). Z konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \|T^k\|$ plyne, že výraz $\sum_{k=1}^{\infty} T^k$ definuje lineární omezený operátor. Pro každé přirozené číslo n je

$$(I - T) \sum_{k=0}^n T^k = \sum_{k=0}^n T^k (I - T) = I - T^{n+1}.$$

Přejdeme-li k limitě pro $n \rightarrow \infty$, bude vzhledem k tomu, že $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \rightarrow 0$, platit

$$(I - T) \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} T^k (I - T) = I,$$

a odtud už plyne formule (3.18). ■

Definice 3.5 Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ lineární normované prostory, označíme symbolem

$$\mathcal{L}(X, Y)$$

množinu všech spojitých lineárních operátorů, zobrazujících X do Y . Je-li $X = Y$, píšeme místo $\mathcal{L}(X, X)$ pouze

$$\mathcal{L}(X).$$

Cvičení 3.2 Dokažte následující tvrzení:

- (i) Množina $\mathcal{L}(X, Y)$ tvoří vzhledem k operacím sčítání a násobení číslem z definice 3.3 lineární prostor.
- (ii) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, je $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$.
- (iii) Je-li $T \in \mathcal{L}(X)$, je $T^n \in \mathcal{L}(X)$ pro $n = 1, 2, \dots$.
- (iv) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a existuje-li inverzní operátor T^{-1} , *nemusí být* $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.
- (v) Vzhledem k normě

$$\|T\| = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|Tu\|_Y$$

je prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ normovaný lineární prostor. Je-li prostor Y úplný, je také $\mathcal{L}(X, Y)$ úplný (tj. Banachův) prostor.

Jako doplněk k bodu (iv) předchozího cvičení uvedme ještě toto tvrzení:

Věta 3.5 Budiž $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a označme Y_1 prostor $\mathcal{R}(T)$, $Y_1 \subset Y$. Operátor $T_1 : X \rightarrow Y_1$, definovaný předpisem $T_1 u = Tu$ pro $u \in X$, je spojitý lineární operátor, zobrazující X na Y_1 .

Spojitý inverzní operátor T_1^{-1} existuje právě tehdy, existuje-li číslo $c > 0$ tak, že pro všechna $u \in X$ je

$$\|T_1 u\|_Y \geq c \|u\|_X.$$

Řada praktických problémů vede na *integrální rovnice*. Typickým příkladem je úloha nalezení funkce $u = u(x)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pro kterou platí

$$(3.19) \quad u(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) u(t) dt = f(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Zde jsou $K(x, t)$ a $f(x)$ dané funkce, λ je (obecně komplexní) parametr, a vystupuje zde integrální operátor K z příkladu 3.4. Rovnici (3.19) můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$u - \lambda K u = f$$

nebo za použití identického operátoru I ve tvaru

$$T u = f, \quad \text{kde } T = I - \lambda K.$$

Existence řešení této operátorové rovnice závisí podstatně na vlastnostech operátoru T , tj. na vlastnostech integrálního operátoru K z formule (3.15). Jednou z takových vlastností je tzv. *kompaktnost* (ve starší literatuře *totální spojitost*).

Definice 3.6 Jsou-li X a Y lineární normované prostory a $T : X \rightarrow Y$ lineární operátor, řekneme, že operátor T je *kompaktní*, je-li uzávěr $\overline{T(M)}$ obrazu každé omezené množiny $M \subset X$ kompaktní množinou v prostoru Y [tj. existuje-li pro každou omezenou posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ prvků z X podposloupnost $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, pro níž posloupnost $\{T u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ konverguje v prostoru Y].

Věta 3.6 *Je-li lineární operátor $T : X \rightarrow Y$ kompaktní, je spojitý (tj. omezený).*

Důkaz Zvolme za množinu M uzavřenou jednotkovou kouli $\overline{K}(o, 1)$ v X , tj.

$$M = \{u \in X : \|u\|_X \leq 1\}.$$

Protože operátor T je kompaktní, je množina $T(M)$ omezená, tj. existuje číslo $K_0 > 0$ tak, že platí

$$(3.20) \quad \|Tu\|_Y \leq K_0 \text{ pro } u \in M.$$

Je-li prvek $u \neq o$, leží prvek $u^* = \frac{1}{\|u\|_X} \cdot u$ v M , a z (3.20) plyne

$$K_0 \geq \|Tu^*\|_Y = \frac{1}{\|u\|_X} \|Tu\|_Y$$

(využili jsme linearity operátoru T a vlastnosti (N 2) normy), čili

$$\|Tu\|_Y \leq K_0 \|u\|_X.$$

Tato nerovnost platí i pro $u = o$, a tedy platí pro všechna $u \in X$. Operátor T je tedy omezený a podle věty 3.2 i spojitý. ■

Příklad 3.5 (i) Každý lineární operátor $T : X \rightarrow Y$, pro který je množina $\mathcal{R}(T)$ konečněrozměrný lineární podprostor prostoru Y , je kompaktní.

(ii) Integrální operátor K z příkladu 3.4 (i) – viz vzorec (3.15) – je kompaktní. Zde je $X = Y = C([0, 1])$ a pro důkaz kompaktnosti operátoru K využijeme věty 2.13 (ARZELÀ a ASCOLI). □

Věta 3.7 *Je-li X normovaný lineární prostor a Y Banachův prostor a je-li $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kompaktních operátorů z $\mathcal{L}(X, Y)$, která konverguje v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$ [viz cvičení 3.2 (v)] k operátoru $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak je také operátor T kompaktní.*

Věty 3.7 se využívá ke konstrukci kompaktních operátorů T pomocí jednodušších kompaktních operátorů T_n , $n = 1, 2, \dots$.

Důležitým prostředkem pro vyšetřování operátorových rovnic je pojem duálního (adjungovaného) operátoru.

Definice 3.7 Necht jsou X, Y lineární normované prostory a X^*, Y^* jejich duální prostory. Pro spojitý lineární operátor $T : X \rightarrow Y$ budiž operátor $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ definován vztahem

$$(3.21) \quad T^*F = F \circ T \text{ pro každé } F \in Y^*,$$

[tj. pro každý spojitý lineární funkcionál $F \in Y^*$ je definován spojitý lineární funkcionál $T^*F \in X^*$ vztahem

$$(3.22) \quad (T^*F)(u) = F(Tu) \text{ pro každé } u \in X.$$

Operátor T^* , přiřazující funkcionálu $F \in Y^*$ funkcionál $T^*F \in X^*$, se nazývá operátorem *duálním k operátoru T* .

Poznámka T^*F je vzhledem k formuli (3.21) definován jako složení (součin) dvou operátorů: operátoru $T : X \rightarrow Y$ a operátoru (funkcionálu) $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$, a protože oba operátory jsou spojitý a lineární, je sám také spojitý a lineární.

Věta 3.8 Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a platí

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Příklad 3.6 (i) Budiž $X = \mathbb{R}^N$, $Y = \mathbb{R}^M$. Každý operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je reprezentován maticí typu $M \times N$

$$A = (t_{jk})_{\substack{j=1,2,\dots,N \\ k=1,2,\dots,M}}$$

Prvek $y = (y_1, y_2, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^M$, přiřazený operátorem T prvku $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = Tx$, je určen takto:

$$y_j = \sum_{k=1}^N t_{jk} x_k, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Duální operátor T^* , zobrazující prostor Y^* do X^* , je vzhledem k tomu, že platí

$$Y^* = Y = \mathbb{R}^M, \quad X^* = X = \mathbb{R}^N,$$

určen opět maticí, tentokrát typu $N \times M$:

$$A^* = (t_{jk}^*)_{\substack{j=1,2,\dots,N \\ k=1,2,\dots,M}}$$

Lze snadno ukázat, že platí

$$t_{jk}^* = t_{kj},$$

tj. matice A^* je matice *transponovaná* k matici A .

(ii) Je-li funkce $K(s, t)$ spojitá reálná funkce na obdélníku $\langle c, d \rangle \times \langle a, b \rangle$, zobrazuje operátor K , daný formulí

$$(Ku)(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad x \in \langle c, d \rangle$$

reálný prostor $X = L^2(a, b)$ do prostoru $Y = L^2(c, d)$ a je lineární a spojitý (viz příklad 3.4 (ii)). Duální operátor K^* zobrazuje prostor Y^* do prostoru X^* . Protože X i Y jsou Hilbertovy prostory, je $X^* = X$ a $Y^* = Y$ a operátor K^* je dán formulí

$$(K^*v)(x) = \int_c^d K(t, x)v(t)dt, \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

kde $v \in L^2(c, d)$.

□

Cvičení 3.3 Dokažte následující tvrzení pro $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$:

- (i) $(T + S)^* = T^* + S^*$,
- (ii) $(\lambda T)^* = \lambda T^*$,
- (iii) $(I_X)^* = I_{X^*}$,
- (iv) Jsou-li X a Y Banachovy prostory, je

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$

- (v) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, je $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ a platí

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

3.2 Lineární operátory na Hilbertových prostorech, vlastní čísla a vlastní vektory

V dalším se budeme zabývat výhradně (lineárními) operátory, které zobrazují Hilbertův prostor H do sebe:

$$T : H \rightarrow H.$$

Protože Hilbertův prostor je speciální případ normovaného lineárního prostoru (Banachova prostoru), mají pojmy a tvrzení, uvedené v předcházejícím textu, smysl i pro Hilbertův prostor.

Skalární součin prvků $u, v \in H$ a normu prvku $u \in H$ budeme značit symboly

$$(u, v) \quad \text{a} \quad \|u\|;$$

připomeňme, že platí

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Příklad 3.7 Zvolme za prostor H Lebesgueův prostor $L^2(0, 1)$.

- (i) *Diferenciální operátor* T , daný vzorcem

$$Tu = -\frac{d^2u}{dx^2},$$

je lineární, zobrazuje H do H , a je zde $\mathcal{D}(T) = C^2(\langle 0, 1 \rangle)$ a $\mathcal{R}(T) = C(\langle 0, 1 \rangle)$, tj. definiční obor je částí Hilbertova prostoru H ; tento operátor *není omezený*. (Viz příklady 3.1 (iv) a 3.4 (iii).)

- (ii) *Integrální operátor* K , daný vzorcem (3.15), je definován pro všechna $u \in H$, tj. $\mathcal{D}(K) = H$. Je to opět lineární a (pro jádro K splňující jisté podmínky) spojitý operátor z H do H . (Viz příklady 3.4 (ii) a 3.6 (ii).)

- (iii) Budiž $g = g(x)$ pevná spojitá funkce, definovaná pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$, a definujme operátor T pro $u \in L^2(0, 1)$ vzorcem

$$(3.23) \quad (Tu)(x) = g(x) \cdot u(x).$$

Zde je $\mathcal{D}(T) = L^2(0, 1)$ a $\mathcal{R}(T) \subset L^2(0, 1)$, neboť

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \left(\int_0^1 |(Tu)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |g(x)|^2 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t)|^2 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\max_{0 \leq t \leq 1} |g(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Je tedy $\|Tu\| \leq K_0 \|u\|$, kde $K_0 = (\max_{0 \leq t \leq 1} |g(t)|^2)^{\frac{1}{2}}$, tj. operátor T je omezený, a protože je lineární, je i spojitý.

(iv) Operátor D , přiřazující funkci u její derivaci,

$$(3.24) \quad Du = \frac{du}{dx},$$

je opět lineární operátor z H do H s definičním oborem $\mathcal{D}(D) = C^1(\langle 0, 1 \rangle)$. Stejně jako operátor T z bodu (i) *není omezený*: Pro funkce $u_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, platí

$$\|u_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \|Du_n\| = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$$

tj. $\|u_n\| \rightarrow 0$ a $\|Du_n\| \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$, a tudíž nemůže existovat konstanta K_0 tak, aby bylo $\|Du_n\| \leq K_0 \|u_n\|$ pro všechna přirozená čísla n .

□

Už několikrát jsme zdůraznili, že (separabilní) Hilbertův prostor H je přirozeným „nekonečněrozměrným“ zobecněním euklidovského prostoru $\mathbb{R}^N$. Tato podobnost se projevuje i ve tvaru lineárních operátorů $T : H \rightarrow H$, především ve srovnání s příkladem 3.6 (i):

Budiž H Hilbertův prostor s úplným ortonormálním systémem $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dále budiž $T : H \rightarrow H$ lineární operátor s definičním oborem $\mathcal{D}(T) = H$. Prvek Te_k patří opět do H , a lze ho tedy podle věty 1.30 rozvinout ve Fourierovu řadu

$$(3.25) \quad Te_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} e_n,$$

kde

$$(3.26) \quad a_{nk} = (e_n, Te_k), \quad (n, k = 1, 2, \dots).$$

Je-li prvek $u \in H$ tvaru

$$(3.27) \quad u = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j,$$

kde m je přirozené číslo a α_j jsou daná čísla, je vzhledem k linearitě operátoru T a vzhledem k formulím (3.25), (3.26)

$$\begin{aligned} Tu &= T \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j e_j \right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j T e_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} e_n = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} \alpha_j e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m a_{nj} \alpha_j e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m a_{nj} \alpha_j \right) e_n. \end{aligned}$$

Prvek $Tu = v$ patří do H , a proto ho lze rozvinout ve Fourierovu řadu:

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad c_n = (e_n, Tu),$$

a srovnání s předcházející formulí dává tento vztah:

$$c_n = \sum_{j=1}^m a_{nj} \alpha_j,$$

tj.

$$(3.28) \quad (e_n, Tu) = \sum_{j=1}^m (e_n, T e_j) (e_j, u), \quad n = 1, 2, \dots,$$

neboť z (3.27) plyne, že $\alpha_j = (e_j, u)$.

Vztah (3.28) platí pro speciální prvky $u \in H$ tvaru (3.27). Je-li však operátor T navíc ještě omezený a tedy spojitý, lze pomocí limitního přechodu ($m \rightarrow \infty$) ukázat, že pro každé $u \in H$ platí

$$(3.29) \quad (e_n, Tu) = \sum_{j=1}^{\infty} (e_n, T e_j) (e_j, u), \quad n = 1, 2, \dots$$

Protože podle věty 2.30 je $Tu = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, Tu) e_n$, je *spojitý lineární operátor* $T : H \rightarrow H$ určen nekonečnou maticí čísel

$$(3.30) \quad a_{nj} = (e_n, T e_j), \quad n, j = 1, 2, \dots$$

Konkrétní tvar této matice závisí pochopitelně na volbě ortonormálního systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Budiž $T : H \rightarrow H$ spojitý lineární operátor s definičním oborem $\mathcal{D}(T) = H$. Pro pevný prvek $v \in H$ označme

$$(3.31) \quad F_v(u) = (v, Tu), \quad u \in H.$$

Protože operátor T je *lineární*, je F_v lineární funkcionál na H . Protože operátor T je *omezený*, je podle Schwarzovy nerovnosti

$$|F_v(u)| = |(v, Tu)| \leq \|v\| \cdot \|Tu\| \leq \|v\| K_0 \|u\|,$$

a funkcionál F_v je také omezený, čili spojitý.

Podle Rieszovy věty 2.35 existuje právě jeden prvek $w \in H$ tak, že

$$(3.32) \quad F_v(u) = (w, u) \quad \text{pro každé } u \in H,$$

přičemž je $\|F_v\|_* = \|w\|$.

Prvek w je tedy jednoznačně určen prvkem v , což zapíšeme ve tvaru

$$w = T^*v.$$

Vztah (3.32) pak můžeme vzhledem k (3.31) a (3.32) zapsat takto:

$$(3.33) \quad (v, Tu) = (T^*v, u), \quad u, v \in H.$$

Cvičení 3.4 Dokažte, že T^* je spojitý lineární operátor, zobrazující H do H , s $\mathcal{D}(T^*) = H$.

Definice 3.8 Operátor T^* , definovaný vztahem (3.33), se nazývá *adjungovaný operátorem* (k operátoru T).

Adjungovaný operátor T^* má vlastnosti, uvedené ve cvičení 3.3 a větě 3.8 (uvědomte si, že v našem případě je $X = Y = H$ a podle věty 2.35 je ve smyslu izomorfismu $H^* = H$).

Věta 3.9 Je-li H Hilbertův prostor a $T : H \rightarrow H$ lineární kompaktní operátor, je i adjungovaný operátor T^* kompaktní.

Všimneme si nyní lineárních, ale *neomezených* operátorů z H do H . Ty většinou nebyvají definovány na celém prostoru H [viz příklad 3.7 (iv): operátor D byl definován na $C^1((0, 1))$], ale Hilbertův prostor H byl prostor $L^2(0, 1)$ a definice adjungovaného operátoru je složitější.

Definice 3.9 Budiž $T : H \rightarrow H$ lineární operátor, jehož definiční obor $\mathcal{D}(T)$ je *hustý* v H . Označme $\mathcal{D}(T^*)$ množinu všech těch prvků $u \in H$, k nimž existuje prvek $w \in H$ tak, že pro všechna $v \in \mathcal{D}(T)$ platí

$$(3.34) \quad (u, Tv) = (w, v).$$

Pro každé $u \in \mathcal{D}(T^*)$ pak píšeme

$$(3.35) \quad w = T^*u$$

a operátor $T^* : H \rightarrow H$, přiřazující prvku $u \in \mathcal{D}(T^*) \subset H$ prvek $w \in H$ předpisem (3.34), nazýváme operátorem *adjungovaným* k T .

Poznámka Lze ukázat, že $\mathcal{D}(T^*)$ je lineární podprostor Hilbertova prostoru H a že prvek w , pro který platí formule (3.34), je určen jednoznačně. Operátor T^* je pak lineární operátor, zobrazující množinu $\mathcal{D}(T^*)$ do H , ale nemusí být spojitý. Je-li $\mathcal{D}(T) = H$ a je-li operátor T omezený, je také $\mathcal{D}(T^*) = H$ a T^* je adjungovaný operátor ve smyslu definice 3.8.

Definice 3.10 Budiž $T : H \rightarrow H$ lineární operátor definovaný na husté podmnožině $\mathcal{D}(T)$ prostoru H . Řekneme, že operátor T je *symetrický*, je-li $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ a platí-li

$$T^*u = Tu \text{ pro všechna } u \in \mathcal{D}(T).$$

Jinými slovy: Operátor T je symetrický, platí-li pro všechny prvky $u, v \in \mathcal{D}(T)$ rovnost

$$(3.36) \quad (u, Tv) = (Tu, v).$$

Věta 3.10 (HELLINGER a TOEPLITZ). Je-li $T : H \rightarrow H$ lineární operátor s definičním oborem $\mathcal{D}(T) = H$ a platí-li pro všechna $u, v \in H$ vztah (3.36), je operátor T omezený.

(Jinými slovy: Symetrický lineární operátor, definovaný na celém Hilbertově prostoru H , je už automaticky spojitý.)

Definice 3.11 Lineární operátor $T : H \rightarrow H$, definovaný na husté množině $\mathcal{D}(T) \subset H$, se nazývá *samoadjungovaný*, je-li symetrický a platí-li

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*),$$

tj. je-li $T^* = T$.

U neomezených operátorů se samoadjungovanost dokazuje hůře než symetrie; pro omezené operátory, definované na celém prostoru H , oba pojmy splývají. Kriteria samoadjungovanosti zde nebudeme uvádět; omezíme se na jeden příklad.

Příklad 3.8 Budiž $H = L^2(-\infty, \infty)$ [tj. funkce $u = u(x)$ jsou definovány pro všechna reálná čísla x]. Budiž $\mathcal{D}(T)$ Sobolevův prostor $W^{2,2}(-\infty, \infty)$ [tj. množina funkcí, jejichž druhé (zobecněné) derivace patří do $L^2(-\infty, \infty)$] a definujme operátor T předpisem

$$(Tu)(x) = -u''(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Množina $\mathcal{D}(T)$ je *hustá* v $L^2(-\infty, \infty)$ a operátor T je *samoadjungovaný*.

Zvolíme-li $H = L^2(0, 1)$ a definujeme-li operátor T předpisem

$$(Tu)(x) = \int_0^x u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

je $\mathcal{D}(T) = H$ a $Tu \in H$ (dokažte!). Operátor T však *není* samoadjungovaný. □

Pro kompaktní samoadjungované operátory platí

Věta 3.11 *Budiž H separabilní Hilbertův prostor a $T : H \rightarrow H$ samoadjungovaný kompaktní operátor. Pak existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ a prvky $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ tak, že platí*

$$(3.37) \quad Te_n = \lambda_n e_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Prvky e_n lze volit tak, že tvoří úplný ortonormální systém. Je-li prostor H nekonečnědimenzionální, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0.$$

Poznámka Uvědomte si, že (obecně nekonečná) matice, přiřazená operátoru T – viz (3.30) – je diagonální matice, neboť pro její prvky platí

$$\alpha_{nj} = (e_n, Te_j) = (e_n, \lambda_j e_j) = \bar{\lambda}_j (e_n, e_j) = \begin{cases} \bar{\lambda}_n & \text{pro } j = n, \\ 0 & \text{pro } j \neq n \end{cases}$$

(využili jsme vztah (3.37) a toho, že systém $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ je ortonormální).

Čísla λ_i nazýváme *vlastními čísly* operátoru T a prvek e_i nazýváme *vlastním vektorem* (odpovídajícím vlastnímu číslu λ_i , $i = 1, 2, \dots$). O vlastních číslech a vlastních vektorech bude podrobně pojednáno v přednášce „Funkcionální analýza“ v příštím semestru; zde uveďme jen jednu větu, jejíž důkaz je velice jednoduchý.

Věta 3.12 *Budiž T symetrický operátor v Hilbertově prostoru H , pak platí:*

- (i) *Všechna vlastní čísla operátoru T jsou reálná.*
- (ii) *Vlastní vektory, odpovídající různým vlastním číslům, jsou vzájemně kolmé.*

Důkaz Platí-li $Tu = \lambda u$, $u \neq 0$, je v důsledku symetrie – viz (3.36) –

$$\begin{aligned} \lambda \|u\|^2 &= \lambda(u, u) = (\lambda u, u) = (Tu, u) = (u, Tu) = \\ &= (u, \lambda u) = \bar{\lambda}(u, u) = \bar{\lambda} \|u\|^2. \end{aligned}$$

Protože $\|u\|^2 > 0$, musí být $\lambda = \bar{\lambda}$ čili číslo λ je reálné.

Platí-li $Tu = \lambda u$, $Tv = \mu v$, $u \neq 0$ a $v \neq 0$, jsou čísla λ a μ reálná a platí

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (Tu, v) = (u, Tv) = (u, \mu v) = \bar{\mu}(u, v) = \mu(u, v)$$

a tedy

$$(\lambda - \mu)(u, v) = 0.$$

Protože je $\lambda \neq \mu$, musí být $(u, v) = 0$, tj. prvky u a v jsou navzájem kolmé. ■

Definice 3.12 Budiž $T : H \rightarrow H$ symetrický operátor. Řekneme, že operátor T je *kladný*, platí-li pro všechna $u \in \mathcal{D}(T)$ nerovnost

$$(3.38) \quad (Tu, u) \geq 0,$$

přičemž pro $u \neq 0$ je $(Tu, u) > 0$.

Řekneme, že operátor T je *kladně definitní*, existuje-li konstanta $\kappa > 0$ tak, že pro všechna $u \in \mathcal{D}(T)$ je

$$(3.39) \quad (Tu, u) \geq \kappa \|u\|^2.$$

Operátor T , který je kladně definitní, je zřejmě kladný. Opačná implikace ovšem platit nemusí: viz následující příklad 3.9 (i).

Příklad 3.9 (i) Zvolme $H = l^2$ a budiž T operátor, reprezentovaný nekonečnou maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots}$. Pro $u = \{x_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$ je prvek $w = Tu$ definován jako posloupnost $w = \{y_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$, pro kterou je

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots$$

viz příklad 3.1 (iii); předpokládáme, že

$$(3.40) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Protože je

$$(Tu, w) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j y_i, \quad (u, Tw) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ji} x_i y_j,$$

bude operátor T symetrický, bude-li platit

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

tj. je-li matice $\mathbf{A}$ symetrická.

Uvažujme speciální operátor T , určený maticí $\mathbf{A}$ s prvky a_{ij} takovými, že

$$a_{ii} = \lambda_i > 0, \quad a_{ij} = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$

Pak je T symetrický a je

$$(Tu, u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i^2;$$

operátor T je tedy *kladný*. Není však kladně definitní: Zvolíme-li totiž za prvek u prvek $e_j = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$ s jedničkou na i -tém místě, je

$$(Te_j, e_j) = \lambda_j = \|e_j\|^2 \lambda_j.$$

Kdyby byl T kladně definitní, muselo by platit (3.39) a pro $u = e_j$ by z (3.39) plynulo

$$(3.41) \quad \lambda_j \geq \kappa > 0 \text{ pro } j = 1, 2, \dots$$

Ale podle (3.40) je $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < \infty$, a tedy $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j^2 = 0$, čili i $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = 0$, a to je ve sporu s (3.41).

(ii) Budiž $H = L^2(0, c)$ a zvolme za operátor T diferenciální operátor

$$(3.42) \quad Tu = -u''$$

s definičním oborem

$$\mathcal{D}(T) = C_0^2((0, c)) = \{u \in C^2((0, c)); u(0) = u(c) = 0\}$$

(přesvědčte se, že $\mathcal{D}(T)$ je lineární množina!). Protože je (integrace per partes)

$$\begin{aligned} (Tu, v) &= \int_0^c (Tu)(x) \cdot v(x) dx = - \int_0^c u''(x) v(x) dx = \\ &= \int_0^c u'(x) v'(x) dx - [u'(c)v(c) - u'(0)v(0)] = \int_0^c u'(x) v'(x) dx \end{aligned}$$

(je totiž $u, v \in \mathcal{D}(T)$, a tedy je $v(c) = v(0) = 0$) a podobně

$$(u, Tv) = \int_0^c u(x) (Tv)(x) dx = - \int_0^c u(x) v''(x) dx = \int_0^c u'(x) v'(x) dx,$$

je $(Tu, v) = (u, Tv)$ a operátor T je *symetrický*. Je také *kladný*, neboť

$$(Tu, u) = \int_0^c [u'(x)]^2 dx \geq 0;$$

je-li $(Tu, u) = 0$, musí být $[u'(x)]^2 \equiv 0$ čili $u(x) = \text{konst.}$, ale protože $u \in \mathcal{D}(T)$, je $u(0) = 0$, a tedy $u(x) \equiv 0$. Je dokonce *kladně definitní*, neboť platí nerovnost

$$\|u\|^2 = \int_0^c |u(x)|^2 dx \leq c^2 \int_0^c |u'(x)|^2 dx = c^2 (Tu, u),$$

a to je nerovnost (3.39) s konstantou $\kappa = \frac{1}{c^2}$.

□

Cvičení 3.5 Dokažte, že obecnější diferenciální operátor D , daný předpisem

$$(3.43) \quad (Du)(x) = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u$$

s danými funkcemi $p \in C^1(\langle 0, c \rangle)$, $q \in C(\langle 0, 1 \rangle)$, a s definičním oborem $\mathcal{D}(D) = C_0^2(\langle 0, c \rangle)$ [viz příklad 3.9 (ii)], zobrazuje Hilbertův prostor $H = L^2(0, c)$ do sebe a je *symetrický*.

Předpokládáme-li, že platí

$$(3.44) \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0 \quad \text{pro } x \in \langle 0, c \rangle,$$

je operátor D *kladný*; požadujeme-li navíc, aby platilo

$$(3.45) \quad p(x) \geq p_0 > 0 \quad \text{pro } x \in \langle 0, c \rangle,$$

je dokonce *kladně definitní* s konstantou $\kappa = \frac{p_0}{c^2}$.

Poznámka Operátor T ze vzorce (3.42) je speciálním případem operátoru D z (3.43). Protože je

$$(Du, u) = \int_0^c p(x) |u'(x)|^2 dx + \int_0^c q(x) |u(x)|^2 dx \geq \int_0^c p(x) |u'(x)|^2 dx,$$

je při splnění podmínky (3.45)

$$(3.46) \quad (Du, u) \geq p_0 \int_0^c |u'(x)|^2 dx.$$

Poznamenejme rovněž, že za předpokladů $p \in C^1(\langle 0, c \rangle)$ a (3.44) je již podmínka (3.45) splněna automaticky s nějakým $p_0 > 0$ (na základě Weierstrassovy věty zdůvodněte sami).

V kapitole 2 jsme zavedli Sobolevův prostor $W_0^{1,2}(0, c)$ s normou

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_0^c |u'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(viz (2.40)). Nerovnost (3.46) tedy můžeme zapsat takto

$$(3.47) \quad (Du, u) \geq p_0 \|u\|_{1,2}^2.$$

V dalším bude tato nerovnost hrát důležitou roli.

3.3 Minimum kvadratického funkcionálu

Zbytek přednášky bude věnován řešení operátorové rovnice

$$(3.48) \quad Tu = w,$$

kde T je lineární operátor $T : H \rightarrow H$, s definičním oborem $\mathcal{D}(T) \subset H$.

Definice 3.13 Budiž $T : H \rightarrow H$ operátor s definičním oborem $\mathcal{D}(T)$ a budiž w pevný prvek z H . Funkcionál F s definičním oborem $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(T)$, daný předpisem

$$(3.49) \quad F(u) = (Tu, u) - 2(w, u) \quad \text{pro } u \in \mathcal{D}(T),$$

nazveme *kvadratickým funkcionálem* (určeným operátorem T).

Příklad 3.10 (i) Je-li T operátor z příkladu 3.9 (i) a je-li $w = \{t_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2 (= H)$, má funkcionál F ze vzorce (3.49) tvar

$$F(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i, \quad u = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in H.$$

Výskyt součinů $x_i x_j$ ukazuje na *kvadratický* charakter funkcionálu F .

(ii) Je-li D operátor ze cvičení 3.5, má funkcionál F z (3.49) pro pevnou funkci $w \in L^2(0, c)$ tvar

$$F(u) = \int_0^c [p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2 - 2w(x)u(x)] dx.$$

Kvadratický charakter funkcionálu F je opět zdůrazněn výrazy u'^2 a u^2 .

□

Všude v dalším budeme předpokládat, že H je reálný Hilbertův prostor a že lineární operátor $T : H \rightarrow H$ je

- *symetrický*,
- *kladný* resp. *kladně definitní*,
- jeho definiční obor $\mathcal{D}(T)$ je v H *hustý*.

Vedle operátorové rovnice (3.48) budeme řešit následující tzv. *variační úlohu*, tj. úlohu najít *minimum kvadratického funkcionálu* F z (3.49) na množině $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(T)$, čili prvek $u_0 \in \mathcal{D}(T)$ takový, že

$$(3.50) \quad F(u_0) = \min_{u \in \mathcal{D}(T)} F(u).$$

O prvku u_0 pak říkáme, že *realizuje minimum kvadratického funkcionálu* F .

Poznámka To, že hledáme minimum funkcionálu F a nikoliv maximum, má hluboký smysl. Je-li totiž $\tilde{u} \neq 0$ nějaký prvek z $\mathcal{D}(T)$, je pro každé reálné číslo t také $t\tilde{u} \in \mathcal{D}(T)$ a platí

$$F(t\tilde{u}) = (T(t\tilde{u}), t\tilde{u}) - 2(w, t\tilde{u}) = t^2(T\tilde{u}, \tilde{u}) - 2t(w, \tilde{u})$$

(využili jsme linearitu operátoru T a pravidel o počítání se skalárním součinem; připomeňme, že uvažujeme pouze *reálné* prostory). Je tedy

$$F(t\tilde{u}) = At^2 + Bt,$$

kde $A = (T\tilde{u}, \tilde{u})$ je kladné číslo, protože operátor T je kladný a prvek $\tilde{u}$ je nenulový. To však znamená, že $F(t\tilde{u}) \rightarrow \infty$ pro $|t| \rightarrow \infty$, a funkcionál F tedy *nemůže nabývat maxima*.

Hlavní tvrzení této části říká:

Věta 3.13 *Za výše uvedených předpokladů o operátoru T platí:*

K tomu, aby prvek u_0 řešil operátorovu rovnici (3.48), tj. aby platilo

$$(3.51) \quad Tu_0 = w,$$

je nutné a stačí, aby prvek $u_0 \in \mathcal{D}(T)$ realizoval minimum kvadratického funkcionálu F , tj. aby platilo (3.50).

Prvek u_0 je určen jednoznačně.

Důkaz A. *Nutnost.* Nechť platí (3.50). Je tedy

$$(3.52) \quad F(u_0 + tv) \geq F(u_0)$$

pro každé $t \in \mathbb{R}$ a každé $v \in \mathcal{D}(T)$ [množina $\mathcal{D}(T)$ je podle předpokladu lineárním prostorem, protože operátor T je lineární; proto také $u_0 + tv \in \mathcal{D}(T)$]. Nyní platí

$$\begin{aligned} F(u_0 + tv) &= (T(u_0 + tv), u_0 + tv) - 2(w, u_0 + tv) = \\ &= (Tu_0 + tTv, u_0 + tv) - 2(w, u_0 + tv) \end{aligned}$$

(je totiž $T(u_0 + tv) = Tu_0 + T(tv) = Tu_0 + tTv$, neboť operátor T je lineární), a podle pravidel (S 2) a (S 3) z kapitoly 1 je

$$(Tu_0 + tTv, u_0 + tv) = (Tu_0, u_0) + t(Tv, u_0) + t(Tu_0, v) + t^2(Tv, v),$$

$$(w, u_0 + tv) = (w, u_0) + t(w, v);$$

protože operátor T je kladný, je i symetrický, a proto pomocí pravidla (S 1) z kapitoly 1 je

$$(Tv, u_0) = (v, Tu_0) = (Tu_0, v).$$

Nakonec tedy máme

$$F(u_0 + tv) = t^2(Tv, v) + 2t(Tu_0, v) + (Tu_0, u_0) - 2t(w, v) - 2(w, u_0),$$

a protože $F(u_0) = (Tu_0, u_0) - 2(w, u_0)$, má nerovnost (3.52) tvar

$$t^2(Tv, v) + 2t[(Tu_0, v) - (w, v)] \geq 0$$

čili (opět pomocí pravidel (S 2) a (S 3))

$$t^2(Tv, v) + 2t(Tu_0 - w, v) \geq 0.$$

Poslední vztah platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Na levé straně však je kvadratický výraz $\alpha t^2 + \beta t + \gamma$, kde je $\alpha = (Tv, v)_H \geq 0$ díky kladnosti operátoru T . Má-li být takový výraz neustále nezáporný, musí být jeho diskriminant $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ nekladný. V našem případě však je $\gamma = 0$, takže podmínka $D \leq 0$ má tvar $\beta^2 = 4(Tu_0 - w, v)^2 \leq 0$; musí tedy být $\beta = 0$ čili

$$(3.53) \quad (Tu_0 - w, v) = 0.$$

Tento vztah platí pro každé $v \in \mathcal{D}(T)$. Protože však množina $\mathcal{D}(T)$ je hustá v H , je

$$Tu_0 - w = 0 \quad \text{čili} \quad Tu_0 = w \quad (\text{zdůvodněte!}).$$

Pro u_0 tedy musí platit (3.51).

B. *Postačitelnost.* Nechť platí (3.51) a budiž u libovolný prvek z $\mathcal{D}(T)$. Označme $v = u - u_0$, tj. $u = u_0 + v$. Pak je

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u_0 + v) = (T(u_0 + v), u_0 + v) - 2(w, u_0 + v) = \\ &= (Tu_0, u_0) + 2(Tu_0, v) + (Tv, v) - 2(w, u_0) - 2(w, v) = \\ &= F(u_0) + 2(Tu_0 - w, v) + (Tv, v) \end{aligned}$$

(počítáme podle stejných pravidel jako v části A důkazu věty). Protože platí (3.51), je $Tu_0 - w = 0$ a předposlední sčítanec v předcházejícím výrazu je roven nule. Dostáváme tedy

$$F(u) = F(u_0) + (Tv, v),$$

a protože operátor T je kladný, je $(Tv, v) \geq 0$ čili

$$F(u) \geq F(u_0) \quad \text{pro každé} \quad u \in \mathcal{D}(T).$$

To však už je vztah (3.50).

C. *Jednoznačnost.* Předpokládejme, že minimum funkcionálu F je realizováno dvěma prvky u_0 a u_0^* . Pak tedy platí jak $Tu_0 = w$, tak i $Tu_0^* = w$. Protože operátor T je lineární, je

$$(3.54) \quad T(u_0 - u_0^*) = Tu_0 - Tu_0^* = w - w = 0;$$

protože je operátor T kladný, je

$$(T(u_0 - u_0^*), u_0 - u_0^*) \geq 0.$$

Z (3.54) však plyne, že je $(T(u_0 - u_0^*), u_0 - u_0^*) = 0$, a to je podle definice možné jen tehdy, je-li $u_0 - u_0^* = 0$ čili

$$u_0 = u_0^*.$$

Prvek u_0 je tedy určen jednoznačně. ■

Příklad 3.11 (i) Zvolme $H = \mathbb{R}$ a $Tu = \alpha u$, $u \in \mathbb{R}$, s definičním oborem $\mathcal{D}(T) = \mathbb{R}$; α je kladné číslo. Pak je $(Tu, u) = \alpha u \cdot u = \alpha u^2$; operátor T je lineární a kladný. Pro daný prvek (číslo) $w \in \mathbb{R}$ je $F(u) = \alpha u^2 - 2wu$ a věta 3.13 říká, že úloha řešit (lineární) rovnici

$$\alpha u = w$$

je ekvivalentní s úlohou hledat minimum funkce F .

(ii) Pro operátor $T : l^2 \rightarrow l^2$ z příkladu 3.9 (i), který je určen nekonečnou maticí $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots}$, je podle věty 3.13 úloha řešit soustavu lineárních rovnic

$$(3.55) \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = t_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

tj. operátorovou rovnici $Tu = w$, kde $w = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ je pevný prvek z l^2 a $u = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, ekvivalentní s úlohou hledat minimum výrazu

$$F(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$$

[viz příklad 3.9 (i)]. Přesvědčte se, že k soustavě (3.55) dospějeme ze vztahů

$$\frac{\partial F(u)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

(iii) Pro operátor D ze cvičení 3.5 je operátorová rovnice $Tu = w$ vlastně *okrajová úloha*

$$(3.56) \quad \begin{cases} -(pu')' + qu = w \text{ na intervalu } \langle 0, c \rangle, \\ u(0) = u(c) = 0, \end{cases}$$

neboť prvek u musí ležet v $\mathcal{D}(T)$, a tedy musí být $u(0) = u(c) = 0$. Protože množina $\mathcal{D}(T) = C_0^2(\langle 0, c \rangle)$ je hustá v prostoru $L^2(0, c)$, jsou splněny všechny předpoklady věty 3.13 a podle této věty je úkol najít řešení okrajové úlohy (3.56) ekvivalentní s úlohou najít funkci $u_0 \in C_0^2(\langle 0, c \rangle)$, pro níž funkcionál

$$(3.57) \quad F(u) = \int_0^c [p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2 - 2w(x)u(x)] dx$$

nabývá svého minima. □

Důležitá poznámka Věta 3.13 dokazuje *ekvivalenci* dvou úloh, ale u žádné z těchto úloh není zaručeno, že řešení také skutečně *existuje*.

Příklad 3.12 Uvažujme operátor D z příkladu 3.11 (iii); pro jednoduchost zvolme ještě $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$. Úloha najít minimum funkcionálu

$$F(u) = \int_0^c [|u'(x)|^2 - 2w(x)u(x)]dx$$

pro $u \in C_0^2(\langle 0, c \rangle)$ je ekvivalentní s řešením velmi jednoduché okrajové úlohy

$$(3.58) \quad -u'' = w \quad \text{na } \langle 0, c \rangle, \quad u(0) = u(c) = 0.$$

Zde je w pevný prvek z $L^2(0, c)$, a poslední okrajová úloha zřejmě *nemá* řešení v $C_0^2(\langle 0, c \rangle)$, *není-li funkce w spojitá*.

My však umíme okrajovou úlohu (3.58) řešit, i když funkce w není spojitá: stačí, aby existovaly integrály ve výrazu

$$u(x) = \frac{x}{c} \int_x^c (c-t)w(t)dt + \frac{c-x}{c} \int_0^x tw(t)dt$$

[přesvědčte se o tom, že tato funkce skutečně řeší úlohu (3.58)!]. Tato funkce u ovšem nemusí mít obecně *spojitou* druhou derivaci, a proto nepatří do $C_0^2(\langle 0, c \rangle) = \mathcal{D}(D)$.

Bylo by proto vhodné *rozšířit* vhodným způsobem definiční obor operátoru D a tím i definiční obor funkcionálu F ; je to i přirozené: z formule (3.54) je vidět, že požadavek $u \in C_0^2(\langle 0, c \rangle)$ je zbytečně silný, neboť se tam vyskytuje *jen první derivace*, a ani ta nemusí být spojitá; stačí, když bude $u' \in L^2(0, c)$.

□

Definice 3.14 Budiž T kladně definitní operátor z H do H a necht' je jeho definiční obor $\mathcal{D}(T)$ hustý v H . Na prostoru H necht' je definován skalární součin (u, v) .

Definujme nyní na $\mathcal{D}(T)$ nový skalární součin, který označíme

$$(u, v)_T, \quad u, v \in \mathcal{D}(T),$$

tímto předpisem

$$(u, v)_T = (Tu, v).$$

[Dokažte jako cvičení, že tento nový skalární součin splňuje podmínky (S 1) – (S 3) z definice 1.4. Využijte symetrie, linearitu a kladnosti operátoru T .]

Tímto novým skalárním součinem jsme z lineárního prostoru $\mathcal{D}(T)$ učinili *unitární prostor*. Není-li tento prostor úplný, provedeme jeho *zúplnění*, tj. doplníme množinu $\mathcal{D}(T)$ dalšími tzv. ideálními prvky z H tak, že skalární součin $(u, v)_T$

bude definován i tehdy, bude-li u nebo v patřit k doplňujícím ideálním prvkům. Dostaneme tak *Hilbertův prostor*, který označíme

$$H_T$$

a nazveme *energetickým prostorem*.

Cvičení 3.6 Dokažte, že energetický prostor H_T má tyto vlastnosti:

(i) Platí

$$H_T \subset H$$

a množina $\mathcal{D}(T)$ je hustá v H_T [pozor: hustotu zde chápeme vzhledem k novému skalárnímu součinu $(\cdot, \cdot)_T$!]

(ii) Definujeme-li na H_T energetickou normu $\|\cdot\|_T$ předpisem

3.39 $\|u\|_T = \sqrt{(u, u)_T}, \quad u \in H_T,$

platí pro každé $u \in H_T$ nerovnost

$$(3.59) \quad \|u\| \leq \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \|u\|_T$$

(tato nerovnost současně dokazuje, že je $H_T \subset H$!).

Konstrukci doplňujících prvků [které patří do H_T , ale nikoliv do $\mathcal{D}(T)$] zde nebudeme popisovat. Obecný popis množiny H_T je dán tímto tvrzením.

Věta 3.14 Prvek $u \in H$ patří do H_T tehdy a jen tehdy, existuje-li posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ prvků z $\mathcal{D}(T)$ tak, že

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\|_T = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Příklad 3.13 Pro $H = L^2(0, c)$ a operátor $T : Tu = -u''$ s definičním oborem $\mathcal{D}(T) = C_0^2(\langle 0, c \rangle)$ je

$$(u, v)_T = \int_0^c Tu \cdot v \, dx = - \int_0^c u'' v \, dx.$$

V příkladu 3.9 (ii) jsme ukázali, že je

$$(u, v)_T = \int_0^c u'(x) v'(x) dx,$$

a tedy je

$$\|u\|_T^2 = \int_0^c [u'(x)]^2 dx.$$

Poslední dva vzorce mají smysl nejen pro $u \in \mathcal{D}(T)$, ale pro širší třídu funkcí u , jejichž derivace u' *existuje a patří do* $L^2(0, c)$. To však je prostor $W^{1,2}(0, c)$ (viz kapitola 2), a v našem případě lze ukázat, že

$$H_T = W_0^{1,2}(0, c)$$

(viz definice 2.25).

Budeme-li na $\mathcal{D}(T) = C_0^2((0, c))$ uvažovat obecnější operátor $D : Du = -(pu')' + qu$ ze cvičení 3.5, bude

$$(u, v)_D = \int_0^c (pu'v' + quv) dx$$

a

$$\|u\|_D^2 = \int_0^c (p(u')^2 + qu^2) dx,$$

ale energetický prostor H_D bude stejný jako u operátoru $Tu = -u''$:

$$H_D = W_0^{1,2}(0, c).$$

□

Definice 3.15 Budiž H Hilbertův prostor, w pevný prvek z H , $T : H \rightarrow H$ lineární operátor a H_T jeho energetický prostor. Pro $u \in H_T$ definujeme (kvadratický) funkcionál $\mathcal{F} : H_T \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$(3.60) \quad \mathcal{F}(u) = \|u\|_T^2 - 2(w, u).$$

Pro $u \in \mathcal{D}(T)$ je $\|u\|_T^2 = (Tu, u)$, a tedy je $\mathcal{F}(u) = (Tu, u) - 2(w, u)$ (viz vzorec (3.49)). Funkcionál $\mathcal{F}$ je tedy *rozšířením* funkcionálu F z (3.49) z množiny $\mathcal{D}(T)$ na H_T .

Důležité ovšem je, že pro funkcionál $\mathcal{F}$ má variační úloha řešení:

Věta 3.15 Budiž $T : H \rightarrow H$ kladně definitní operátor s definičním oborem hustým v H . Budiž H_T příslušný energetický prostor.

Pak existuje právě jeden prvek $u_0 \in H_T$ tak, že pro funkcionál $\mathcal{F}$ ze vzorce (3.60) platí

$$(3.61) \quad \mathcal{F}(u_0) = \min_{u \in H_T} \mathcal{F}(u).$$

Důkaz Budiž w pevný prvek z H , vystupující v definici funkcionálu $\mathcal{F}$. Výraz

$$l(u) = (w, u), \quad u \in H_T,$$

je lineární funkcionál. Podle Schwarzovy nerovnosti a podle nerovnosti (3.59) je

$$|l(u)| = |(w, u)| \leq \|w\| \|u\| = \|w\| \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \|u\|_T,$$

tj. l je také omezený funkcionál na H_T . Podle věty 2.18 je tedy l spojitý lineární funkcionál nad Hilbertovým prostorem H_T , a podle Rieszovy věty 2.35 existuje právě jeden prvek $u_0 \in H_T$ tak, že platí $l(u) = (u_0, u)_T$, tj.

$$(w, u) = (u_0, u)_T.$$

Pak však je (používáme definice energetické normy a pravidel (S 1) – (S 3) pro energetický skalární součin)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &= \|u\|_T^2 - 2(w, u) = (u, u)_T - 2(u_0, u)_T = \\ &= (u, u)_T - 2(u_0, u)_T + (u_0, u_0)_T - (u_0, u_0)_T = \\ &= (u_0 - u, u_0 - u)_T - (u_0, u_0)_T = \|u_0 - u\|_T^2 - \|u_0\|_T^2\end{aligned}$$

a poslední výraz bude nejmenší, bude-li výraz $\|u_0 - u\|_T^2$ nulový, tj. bude-li

$$u = u_0.$$

Pak je

$$\min_{u \in H_T} \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_0) = -\|u_0\|_T^2$$

a věta je dokázána. ■

Poznámka Prvek $u_0 \in H_T$, který realizuje minimum funkcionálu $\mathcal{F}$ z (3.60) a jehož existenci jsme právě dokázali, nazýváme *zobecněným řešením* operátorové rovnice

$$Tu = w.$$

O zobecněném řešení hovoříme, protože výraz Tu_0 *nemusí mít smysl*, je-li sice $u_0 \in H_T$, ale $u \notin \mathcal{D}(T)$.

Doporučená literatura

- [1] L. Collatz, *Funkcionální analýza a numerická matematika*, SNTL, Praha 1970
- [2] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*, SNTL, Praha 1975
- [3] A. Kufner, *Geometrie Hilbertova prostoru*, SNTL, Praha 1973 a 1975
- [4] A. E. Taylor, *Úvod do funkcionální analýzy*, Academia, Praha 1973
- [5] P. Drábek, *Integrální rovnice*, SNTL, Praha 1991
- [6] J. Matušů, *Ortogonální systémy*, SNTL, Praha 1982
- [7] K. Rektorys, *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, SNTL, Praha 1974
- [8] A. Kufner, O. John, S. Fučík, *Function Spaces*, Academia, Praha 1977
- [9] P. Drábek, S. Míka, *Matematická analýza II*, skriptu ZČU, Plzeň 1992
- [10] A. Kufner, *Obyčejné diferenciální rovnice*, skriptu ZČU, Plzeň 1993

Předmluva

Předkládáme čtenáři záznam přednášek předmětu Funkcionální analýza, který byl ve školním roce 1993/94 poprvé zařazen do zimního semestru a který byl určen zejména studentům zaměřeni matematické a počítačové modelování. Tento učební text navazuje bezprostředně na skripta P. Drábek, A. Kufner: Úvod do funkcionální analýzy, ZČU Plzeň 1993. Abychom zdůraznili logickou souvislost obou předmětů, byl výše zmíněný „Úvod“ uveden jako pre-rekvizitní předmět pro tuto přednášku a zároveň jsme tento text uspořádali tak, že číslování kapitol a odstavců navazuje na číslování ve výše zmíněných skriptech. První tři kapitoly, obsažené v předchozích skriptech, se zabývají *lineárními objekty*. Jsou tam studovány lineární prostory, lineární funkcionály a lineární operátory. V těchto skriptech se budeme s výjimkou úvodní (čtvrté) kapitoly zabývat především metodami *nelineární funkcionální analýzy*. Zatímco teorie lineárních operátorů je v dnešní době již poměrně podrobně rozpracována, v teorii nelineárních operátorů se setkáváme stále s celou řadou otevřených problémů, které je možno poměrně snadno formulovat, ale jejichž řešení odolává pokusům mnoha matematiků na celém světě. Přitom je třeba zdůraznit, že se jedná o problémy, které vyplývají z praktických úloh inženýrské praxe, matematické fyziky, ekonomie, biologie, chemie, medicíny, sociologie atd. Výhoda funkcionální analýzy spočívá v tom, že je schopna řadu takových matematických modelů pojmout abstraktně a pomocí svého aparátu je vyřešit. Dnešní moderní svět vyžaduje, aby se vědci zabývali stále přesnějšími modely, a ty pak vedou k *nelineárním úlohám*, z nichž mnohé je možno interpretovat ve tvaru nelineárních operátorových rovnic. Proto chceme podstatnou část těchto skript věnovat právě otázkám řešitelnosti takových rovnic a zasvětit čtenáře do tajemství některých základních – ale užitečných – metod nelineární funkcionální analýzy.

Na tomto místě je třeba zdůraznit, že přednáška je jenom *úvodem* do nelineární funkcionální analýzy. Čtenář, který má zájem seznámit se podrobněji s touto tematikou, může prostudovat doporučenou literaturu, případně některé prameny v ní uvedené.

Děkujeme pánům Miroslavovi Altmanovi a Milošovi Brejchovi, studentům 4. ročníku zaměřeni matematické a počítačové modelování, za pečlivé přepsání rukopisu do systému L^AT_EX.

Plzeň, červen 1994

Autoři

Obsah

4	Základní pojmy ze spektrální teorie lineárních operátorů	3
4.1	Samoadjungované operátory	3
4.2	Kompaktní operátory	14
5	Diferenciální a integrální počet v Banachových a Hilbertových prostorech	27
5.1	Derivace ve směru a Gâteauxův diferenciál	27
5.2	Fréchetův (totální) diferenciál	31
5.3	Některá zobecnění	34
5.4	Lokální extrémy funkcí	44
6	Základní věty nelineární funkcionální analýzy	49
6.1	Věta o implicitní funkci	49
6.2	Morseova-Sardova věta	56
6.3	Věta o vázaných extrémech	57
7	Absolutní extrémy nelineárních funkcí	59
7.1	Existenční věty pro absolutní extrémy	59
7.2	Přibližné metody hledání minima funkce	65
8	Nelineární operátorové rovnice a jejich řešení	74
8.1	Variační metoda řešení nelineárních rovnic	75
8.2	Teorie monotónních operátorů	78
8.3	Princip kontrakce a neexpanzivní zobrazení	82
8.4	Schauderovy principy (Schauderovy věty o pevném bodu)	85
9	Teorie stupně zobrazení	91
9.1	Brouwerův stupeň zobrazení	91
9.2	Použití Brouwerova stupně zobrazení	95
9.3	Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení	96

Kapitola 4

Základní pojmy ze spektrální teorie lineárních operátorů

Nechť T je lineární operátor z Hilbertova prostoru H do H . Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme *vlastním číslem* operátoru T , existuje-li nenulový prvek $u \in H$ tak, že

$$(4.1) \quad Tu = \lambda u$$

neboli

$$(4.2) \quad Tu - \lambda u = 0.$$

Příslušné řešení $u \neq 0$ rovnice (4.1) nazveme *vlastním prvkem* operátoru T (odpovídajícím vlastnímu číslu λ). Čtenář se může setkat s následujícími tvary rovnice (4.1):

$$T_\lambda u = 0 \quad \text{nebo} \quad (T - \lambda I)u = 0,$$

kde $T_\lambda = T - \lambda I$ (I je identický operátor) je lineární operátor z H do H , závisející na (komplexním) parametru λ .

Pozorování Snadno zjistíme, že jsou-li u a v vlastní prvky operátoru T odpovídající témuž vlastnímu číslu λ , je vlastním prvkem (odpovídajícím témuž λ) i libovolná jejich lineární kombinace (ověřte!).

Na základě této skutečnosti můžeme nadále předpokládat, že jsou-li $u_1, \dots, u_n \in H$ lineárně nezávislé vlastní prvky operátoru T , odpovídající témuž λ , tvoří již ortonormální systém. V opačném případě můžeme totiž použít Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace (viz odst. 2.4) a dostaneme nový systém, jehož prvky budou opět lineárně nezávislémi vlastními prvky operátoru T odpovídajícími vlastnímu číslu λ .

4.1 Samoadjungované operátory

Z definice 3.11 samoadjungovaného operátoru T a z vlastnosti (1.28) skalárního součinu vyplývá rovnost

$$(4.3) \quad (T - \lambda I)^* = T - \bar{\lambda} I.$$

Operátor T_λ je tedy samoadjungovaný právě tehdy, když je číslo λ reálné (zdůvodněte!).

Věta 4.1 *Vlastní čísla samoadjungovaného operátoru T jsou reálná a leží v intervalu $\langle m_T, M_T \rangle$, kde*

$$m_T = \inf_{\|u\|=1} (Tu, u), \quad M_T = \sup_{\|u\|=1} (Tu, u).$$

Důkaz Nechť λ je vlastní číslo operátoru T . Potom $\lambda \in \mathbb{R}$, a z definice vlastního čísla dostáváme existenci prvku $u \in H$, $u \neq 0$, takového, že

$$Tu = \lambda u.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost skalárně prvkem u , dostaneme

$$(Tu, u) = (\lambda u, u) = \lambda(u, u) = \lambda \|u\|^2,$$

a tedy

$$\lambda = \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2}.$$

Protože $u \neq 0$, plyne odtud ihned

$$m_T \leq \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} \leq M_T.$$

■

Poznámka Platí

$$|(Tu, u)| \leq \|Tu\| \cdot \|u\| \leq \|T\| \|u\|^2$$

(zdůvodněte!). Pro $\|u\| = 1$ tedy $|(Tu, u)| \leq \|T\|$, odkud plyne $m_T \geq -\|T\|$, $M_T \leq \|T\|$. Dá se ukázat, že platí

$$\|T\| = \max(|m_T|, |M_T|).$$

Věta 4.2 *Vlastní prvky samoadjungovaného operátoru T , odpovídající různým vlastním číslům, jsou ortogonální.*

Důkaz Nechť $Tu = \lambda u$ a $Tv = \mu v$, kde $\lambda \neq \mu$. Platí tedy

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (Tu, v) = (u, Tv) = (u, \mu v) = \mu(u, v)$$

(zdůvodněte podrobně uvedené vztahy!). Odtud

$$(\lambda - \mu)(u, v) = 0,$$

a protože $\lambda \neq \mu$, dostáváme $(u, v) = 0$.

■

Je-li λ vlastní číslo operátoru T , neexistuje podle věty 3.5 inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$. Jestliže λ není vlastním číslem, tento operátor existuje, ale nemusí být spojitý (viz cvičení 3.2(iv)).

Definice 4.1 Ty hodnoty λ , pro které existuje spojitý inverzní operátor

$$T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$$

a pro které je $\mathcal{R}(T_\lambda) = H$ (tj. pro něž má rovnice

$$(4.4) \quad Tu - \lambda u = v$$

řešení pro každé $v \in H$), se nazývají *regulární hodnoty* operátoru T . Všechna čísla λ , která nejsou regulárními hodnotami operátoru T , tvoří množinu, která se nazývá *spektrém* operátoru T . Spektrum budeme značit $\sigma(T)$.

Pozorování Vlastní čísla operátoru T patří do jeho spektra.

Příklad 4.1 Identický operátor I je samoadjungovaným operátorem (zdůvodněte!) a rovnice (4.2) má tvar

$$Iu - \lambda u = 0 \quad \text{čili} \quad (1 - \lambda)u = 0.$$

Odtud vyplývá, že jediným vlastním číslem operátoru I je číslo $\lambda = 1$ a vlastním prvkem je každý nenulový prvek $u \in H$. Pro $\lambda \neq 1$ existuje inverzní operátor T_λ^{-1} :

$$u = T_\lambda^{-1}v = \frac{1}{1 - \lambda}v = \frac{1}{1 - \lambda}Iv, \quad \text{tj. } T_\lambda^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda}I.$$

Rovnice $T_\lambda u = v$ má tedy pro $\lambda \neq 1$ řešení pro každé $v \in H$ (tj. $\mathcal{R}(T_\lambda) = H$) a přitom T_λ^{-1} je spojitý operátor (zdůvodněte!). Každá hodnota $\lambda \neq 1$ je regulární hodnotou operátoru I a jeho spektrum tvoří jediné vlastní číslo $\lambda = 1$: $\sigma(I) = \{1\}$.

□

Příklad 4.2 Uvažujme operátor $T : l^2 \rightarrow l^2$ definovaný předpisem

$$Tu = \left\{ \frac{1}{n} u_n \right\} \quad \text{pro každé } u = \{u_n\} \in l^2.$$

Tento operátor je samoadjungovaný (zdůvodněte!) a přitom platí $m_T = 0$, $M_T = 1$. Skutečně, platí

$$(Tu, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u_n \overline{u_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |u_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 = \|u\|^2, \quad \text{tj. } M_T \leq 1.$$

Přitom nemůže být $M_T < 1$, neboť pak bychom dostali

$$(Tu, u) \leq M_T \|u\|^2 < \|u\|^2$$

pro všechna $u \in l^2$, ale přitom pro $u = e_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$ je

$$(Te_1, e_1) = 1 = \|e_1\|^2,$$

což by byl spor. Dále je $(Tu, u) \geq 0$, a proto také $m_T \geq 0$. Ukážeme, že nemůže být $m_T > 0$. Kdyby tomu tak bylo, vezmeme tak velké přirozené číslo $N > 0$, že $\frac{1}{N} < m_T$. Pro prvek $e_N = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$ (s jedničkou na N -tém místě) je pak

$$(Te_N, e_N) = \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\|e_N\|^2 < m_T\|e_N\|^2,$$

což je ve sporu s tím, že musí platit

$$(Tu, u) \geq m_T\|u\|^2$$

pro všechna $u \in l^2$, tj. i pro $u = e_N$.

Pro vlastní čísla operátoru T tedy podle věty 4.1 platí: $0 \leq \lambda \leq 1$. Rovnice $Tu = \lambda u$ má v tomto případě tvar

$$(4.5) \quad \frac{1}{n}u_n = \lambda u_n, \text{ tj. } \left(\frac{1}{n} - \lambda\right) u_n = 0$$

pro $n = 1, 2, 3, \dots$. Z výrazů (4.5) plyne, že $\lambda_n = \frac{1}{n}$ jsou vlastními čísly operátoru T a e_n jsou jim odpovídající vlastní prvky. Na druhé straně, je-li $\lambda \neq \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), mají rovnice (4.5) jen řešení $u_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), tedy rovnice (4.2) má jen triviální řešení $u = 0$.

Zároveň však číslo $\lambda = 0$ patří do spektra $\sigma(T)$. Vzhledem k zavedenému označení je $T = T_0$. Existuje sice operátor inverzní

$$T_0^{-1} : l^2 \rightarrow l^2$$

definovaný vztahem

$$T_0^{-1}u = \{nu_n\} \text{ pro } u = \{u_n\} \in l^2,$$

ale *neplatí* $\mathcal{R}(T_0) = H$. Prvek $v = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ totiž patří do l^2 , ale rovnice

$$T_0 u = v$$

nemá v l^2 řešení (zdůvodněte!). Navíc inverzní operátor T_0^{-1} není omezený (a tedy ani spojitý), neboť je

$$T_0^{-1}e_n = ne_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

odkud plyne

$$\|T_0^{-1}e_n\| = n = n\|e_n\|.$$

Nemůže tedy existovat číslo $C > 0$ takové, aby platilo

$$\|T_0^{-1}u\| \leq C\|u\|$$

pro každé $u \in l^2$.

□

Poslední příklad ukazuje, že spektrum operátoru může být bohatší než je množina jeho vlastních čísel.

Následující tvrzení charakterizuje regulární hodnoty operátoru T .

Věta 4.3 Číslo λ je regulární hodnotou samoadjungovaného operátoru T právě tehdy, když existuje číslo $c > 0$ takové, že

$$(4.6) \quad \|Tu - \lambda u\| \geq c\|u\|$$

pro všechna $u \in H$.

Spektrum operátoru $T : H \rightarrow H$ charakterizuje následující tvrzení.

Věta 4.4 Číslo λ je bodem spektra samoadjungovaného operátoru T právě tehdy, když existuje posloupnost $\{u_n\} \subset H$, $\|u_n\| = 1$ tak, že

$$(4.7) \quad \|Tu_n - \lambda u_n\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Důkaz Podmínku (4.6) můžeme formulovat také takto:

$$\|Tu - \lambda u\| \geq c > 0$$

pro ta $u \in H$, pro něž je $\|u\| = 1$. Nesplnění této podmínky je ekvivalentní splnění podmínky (4.7), a tedy ekvivalentní tomu, že λ není regulární hodnotou operátoru T (čili je bodem spektra $\sigma(T)$). ■

Bližší charakterizaci bodů spektra a regulárních hodnot samoadjungovaného operátoru $T : H \rightarrow H$ podává následující věta.

Věta 4.5 Komplexní čísla s nenulovou imaginární částí $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, jsou regulárními hodnotami samoadjungovaného operátoru T . Spektrum operátoru T leží na reálné ose v uzavřeném intervalu $\langle m_T, M_T \rangle$, přičemž oba krajní body do spektra patří.

Důkaz Je-li $v = T_\lambda u = Tu - \lambda u$, je

$$(u, v) = (u, Tu - \lambda u) = (u, Tu) - \bar{\lambda}(u, u) = (Tu, u) - \bar{\lambda}(u, u),$$

$$(v, u) = (Tu - \lambda u, u) = (Tu, u) - \lambda(u, u),$$

a tedy

$$(u, v) - (v, u) = (\lambda - \bar{\lambda})(u, u) = 2i\beta\|u\|^2.$$

Podle Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$2|\beta|\|u\|^2 = |(u, v) - (v, u)| \leq |(u, v)| + |(v, u)| \leq 2\|u\|\|v\|.$$

Pro $\|u\| \neq 0$ odtud plyne $\|v\| \geq |\beta|\|u\|$ a tato nerovnost platí i pro $u = o$. Protože $v = T_\lambda u$, je

$$\|T_\lambda u\| \geq |\beta|\|u\|, \quad u \in H.$$

To je však nerovnost (4.6) s konstantou $c = |\beta| > 0$. Číslo $\lambda = \alpha + i\beta$ je tedy podle věty 4.3 regulární hodnotou operátoru T čili neleží ve spektru.

Pro $\lambda > M_T$ je $\lambda - M_T = c > 0$ a na základě definice čísla M_T máme

$$(T_\lambda u, u) = (Tu, u) - \lambda(u, u) \leq M_T \|u\|^2 - \lambda \|u\|^2 = -c \|u\|^2$$

čili

$$|(T_\lambda u, u)| \geq c \|u\|^2$$

(zdůvodněte!). Protože podle Schwarzovy nerovnosti je současně

$$|(T_\lambda u, u)| \leq \|T_\lambda u\| \|u\|,$$

dávají obě poslední nerovnosti podmínku (4.6) čili čísla $\lambda > M_T$ jsou regulární. Stejným způsobem se dokáže, že pro $\lambda < m_T$ je splněna podmínka (4.6) s $c = m_T - \lambda$, a tedy také všechna čísla $\lambda < m_T$ jsou regulární (zdůvodněte!).

Z výše uvedených úvah vyplývá, že do spektra $\sigma(T)$ mohou patřit jen taková λ , pro něž platí $m_T \leq \lambda \leq M_T$.

Nechť nyní $\lambda = M_T$. Podle definice čísla M_T existuje posloupnost $\{u_n\} \subset H$, $\|u_n\| = 1$ splňující

$$(Tu_n, u_n) \rightarrow M_T.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} \|Tu_n - M_T u_n\|^2 &= (Tu_n - M_T u_n, Tu_n - M_T u_n) = \\ &= (Tu_n, Tu_n) - M_T(u_n, Tu_n) - M_T(Tu_n, u_n) + M_T^2(u_n, u_n) = \\ &= \|Tu_n\|^2 - 2M_T(Tu_n, u_n) + M_T^2\|u_n\|^2 \leq \|T\|^2\|u_n\|^2 - 2M_T(Tu_n, u_n) + M_T^2\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Nechť $|m_T| \leq |M_T|$. Podle poznámky za větou 4.1 je pak $|M_T| = \|T\|$. Máme tedy (vzhledem k tomu, že $\|u_n\| = 1$):

$$0 \leq \|Tu_n - M_T u_n\|^2 \leq 2M_T^2 - 2M_T(Tu_n, u_n).$$

Protože $(Tu_n, u_n) \rightarrow M_T$, konverguje pravá strana v poslední nerovnosti k nule. Je tedy splněna podmínka (4.7) a číslo M_T patří do spektra $\sigma(T)$. Je-li $|m_T| > |M_T|$, definujeme nový operátor takto:

$$B = T - m_T I.$$

Potom dostáváme

$$(Bu, u) = (Tu, u) - m_T(u, u),$$

a tedy $M_B = M_T - m_T$, $m_B = m_T - m_T = 0$ (zdůvodněte!). Pro operátor B tedy platí $|M_B| \geq |m_B|$ a podle výše dokázaného tedy existuje posloupnost $\{u_n\} \subset H$, $\|u_n\| = 1$ tak, že platí

$$\|Bu_n - M_B u_n\| \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Protože však $Bu_n - M_B u_n = (T - m_T I)u_n - (M_T - m_T)u_n = Tu_n - M_T u_n$, máme také

$$\|Tu_n - M_T u_n\| \rightarrow 0.$$

Odtud plyne, že M_T patří do spektra také pro $|M_T| < |m_T|$.

Podobně se dokáže, že také m_T patří do spektra $\sigma(T)$. ■

Poznámka Z věty 4.5 vyplývá, že spektrum $\sigma(T)$ samoadjungovaného operátoru T je neprázdná množina (patří tam přinejmenším čísla m_T a M_T). Neplyne odtud však, že musí existovat vlastní číslo operátoru T ! Existují operátory T , u nichž je spektrum tvořeno všemi čísly z intervalu $\langle m_T, M_T \rangle$ a u nichž přitom neexistuje žádné vlastní číslo.

Příklad 4.3 Operátor $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ definovaný na reálném prostoru $L^2(0, 1)$ předpisem

$$(Tu)(t) = tu(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

má výše uvedenou vlastnost. Dokažte!

Vypočteme nejprve čísla m_T a M_T . Podle definice m_T platí

$$m_T = \inf_{\|u\|_{L^2}=1} (Tu, u) = \inf_{\|u\|_{L^2}=1} \int_0^1 tu^2(t) dt \geq 0.$$

Uvažujme posloupnost funkcí $u_n \in L^2(0, 1)$ definovaných předpisem

$$u_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & t \in \left(0, \frac{1}{n}\right), \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right), \end{cases}$$

$n = 1, 2, \dots$ Potom

$$\int_0^1 u_n^2(t) dt = 1$$

a zároveň

$$\int_0^1 tu_n^2(t) dt = \int_0^{1/n} tu_n^2(t) dt \leq \frac{1}{n} \int_0^1 u_n^2(t) dt = \frac{1}{n},$$

tedy

$$\int_0^1 tu_n^2(t) dt \rightarrow 0$$

(zdůvodněte podrobně). Odtud pak vyplývá, že

$$m_T = 0.$$

Podobně ukažte sami, že

$$M_T = 1.$$

Předpokládejme, že λ je vlastní číslo operátoru T . Potom musí existovat nenulová funkce $u_\lambda \in L^2(0, 1)$ (tj. funkce, která je v intervalu $(0, 1)$ různá od nuly na množině M kladné míry!) tak, že

$$Tu_\lambda = \lambda u_\lambda,$$

tj.

$$tu_\lambda(t) = \lambda u_\lambda(t) \quad \text{pro skoro všechna } t \in (0, 1).$$

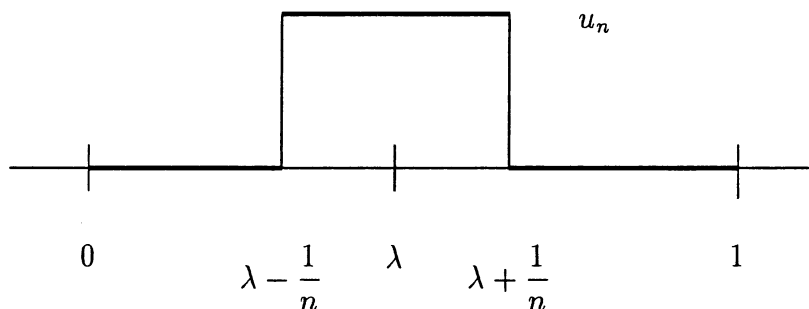
Poslední vztah můžeme psát ve tvaru

$$(t - \lambda)u_\lambda(t) = 0 \quad \text{pro skoro všechna } t \in (0, 1).$$

Tato rovnost však nemůže být splněna pro skoro všechna $t \in M$ (zdůvodněte!). To je spor. Operátor T tedy nemá žádné vlastní číslo.

Podle věty 4.5 platí $0 \in \sigma(T)$ a $1 \in \sigma(T)$. Zvolme nyní libovolné $\lambda \in (0, 1)$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\left(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}\right) \subset (0, 1)$. Pro tato n tedy můžeme definovat funkce $u_n = u_n(t)$ předpisem

$$u_n(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2}}, & t \in \left(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}\right); \\ 0, & \text{pro ostatní } t \in (0, 1). \end{cases}$$



Potom platí

$$\int_0^1 u_n^2(t) dt = 1$$

a zároveň

$$\|Tu_n - \lambda u_n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (t - \lambda)^2 u_n^2(t) dt \leq \frac{1}{n^2} \int_0^1 u_n^2(t) dt = \frac{1}{n^2}$$

(zdůvodněte podrobně). Odtud

$$\|Tu_n - \lambda u_n\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty,$$

a tedy podle věty 4.4 je $\lambda \in \sigma(T)$.

Nechť nyní $\lambda \notin \langle 0, 1 \rangle$. Označme

$$c = \text{dist}\{\lambda, \langle 0, 1 \rangle\} > 0$$

(tj. c je vzdálenost λ od uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$). Potom

$$\|Tu - \lambda u\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (t - \lambda)^2 u^2(t) dt \geq c^2 \int_0^1 u^2(t) dt,$$

odkud

$$\|Tu - \lambda u\|_{L^2} \geq c\|u\|_{L^2}.$$

Podle věty 4.3 je tedy λ regulární hodnotou operátoru T . Poznamenejme, že tato skutečnost vyplývá též přímo z věty 4.5 neboť T je samoadjungovaný operátor (zdůvodněte!).

□

Množinu $\text{Ker}(T_\lambda)$ všech těch $u \in H$, pro něž platí

$$T_\lambda u = (T - \lambda I)u = 0$$

nazýváme *jádrem* operátoru T_λ .

Dá se ukázat, že platí následující tvrzení.

Věta 4.6 *Pro každé (komplexní) číslo λ platí*

$$H = \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} \oplus \text{Ker}(T_\lambda).$$

Důsledek *Číslo λ je vlastním číslem operátoru T tehdy a jen tehdy, je-li $H \neq \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$.*

Příklad 4.4 Definujme operátor $T : l^2 \rightarrow l^2$ předpisem: Pro $u = \{u_j\}$, $v = \{v_i\} \in l^2$ je $Tu = v$, kde

$$v_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \dots$$

Předpokládejme nejprve, že $\alpha_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a α_{ii} jsou reálná čísla, $i = 1, 2, 3, \dots$. Předpokládejme dále, že množina čísel α_{ii} je omezená, a označme

$$m = \inf_i \alpha_{ii}, \quad M = \sup_i \alpha_{ii}.$$

Operátor T je spojitý:

$$\|Tu\|^2 = \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ii}|^2 |u_i|^2 \leq (\sup_i |\alpha_{ii}|^2) \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 = (\sup_i |\alpha_{ii}|^2) \|u\|^2.$$

Dále platí $(Tu, u) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \bar{u}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ii} |u_i|^2$, a tedy

$$m \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 \leq (Tu, u) \leq M \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2.$$

Protože současně $(Te_i, e_i) = \alpha_{ii}$, je $m = m_T$, $M = M_T$.

Rovnice $T_\lambda u = o$ se dá vyjádřit jako soustava rovnic

$$(4.8) \quad (\alpha_{ii} - \lambda)u_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Odtud plyne $\lambda_i = \alpha_{ii}$, $i = 1, 2, \dots$, a tedy α_{ii} jsou vlastní čísla operátoru T . Vlastnímu číslu λ_i odpovídá vlastní prvek e_i . Současně vyplývá ze soustavy (4.8), že žádné jiné vlastní číslo neexistuje (zdůvodněte!). Nyní vyšetříme spektrum $\sigma(T)$. Utvořme všechny možné konvergentní posloupnosti $\{\mu_k\}$, jejichž prvky vybíráme z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Je-li $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$, je $\mu \in \sigma(T)$. Je totiž $\mu_k = \lambda_{n_k}$, kde $\{n_k\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{1, 2, 3, \dots\}$, a tedy

$$Te_{n_k} = \lambda_{n_k} e_{n_k} = \mu_k e_{n_k}.$$

Dále platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_k - \mu) e_{n_k} = o,$$

neboť

$$\|(\mu_k - \mu) e_{n_k}\| = |\mu_k - \mu| \|e_{n_k}\| = |\mu_k - \mu| \rightarrow 0,$$

a tedy

$$\|Te_{n_k} - \mu e_{n_k}\| = \|Te_{n_k} - \mu_k e_{n_k} + \mu_k e_{n_k} - \mu e_{n_k}\| = \|(\mu_k - \mu) e_{n_k}\| \rightarrow 0$$

pro $k \rightarrow \infty$. Současně kromě takto definovaných čísel μ již žádné jiné číslo do $\sigma(T)$ nepatří. Je-li totiž λ takové číslo, že v intervalu $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$ s nějakým $\delta > 0$ neleží žádné z vlastních čísel λ_i , je pro všechna $u = \{u_i\} \in l^2$

$$Tu - \lambda u = \{(\lambda_i - \lambda)u_i\}, \quad \text{kde } |\lambda_i - \lambda| \geq \delta,$$

a tedy

$$\|Tu - \lambda u\|^2 = \sum |\lambda_i - \lambda|^2 |u_i|^2 \geq \delta^2 \sum |u_i|^2 = \delta^2 \|u\|^2.$$

Znamená to, že je splněna podmínka (4.6) s číslem $c = \delta$, a číslo λ je tedy regulární hodnotou.

□

Poznámka Speciálním případem operátoru T z předešlého příkladu je operátor s koeficienty $\alpha_{nn} = \frac{1}{n}$ (viz též příklad 4.2). Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je tedy posloupností vlastních čísel a jediné další číslo, které lze vyjádřit jako limitu nějaké podposloupnosti posloupnosti vlastních čísel, je číslo 0. Spektrum je tedy tvořeno výhradně čísly $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, přičemž 0 není vlastním číslem.

Příklad 4.5 Uvažujme všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a seřadíme je do posloupnosti $\{r_n\}$. Uvažujme dále operátor T z příkladu 4.4 a položíme $\alpha_{nn} = r_n$, $n = 1, 2, \dots$. *Vlastními čísly* T jsou tedy všechna *racionální čísla z intervalu* $\langle 0, 1 \rangle$. Dále lze každé číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ vyjádřit jako limitu posloupnosti racionálních čísel. Odtud plyne, že *spektrum* tohoto operátoru *tvorí celý interval* $\langle 0, 1 \rangle$. Všechna iracionální čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ tedy patří do spektra, ale nejsou vlastními čísly.

□

Cvičení 4.1 Vyšetřete operátor $T : l^2 \rightarrow l^2$, který prvku

$$u = \{u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_{2n-1}, u_{2n}, \dots\} \in l^2$$

přiřazuje prvek

$$Tu = \{u_2, u_1, u_4, u_3, \dots, u_{2n}, u_{2n-1}, \dots\} \in l^2.$$

Ukažte, že jde o samoadjungovaný operátor, a vyšetřete jeho spektrum.

Cvičení 4.2 Uvažujme operátor T definovaný v příkladu 4.4 s obecnými hodnotami α_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots$. Dokažte, že operátor T je kompaktní, pokud platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 < \infty.$$

Návod: Definujte operátor $T_n : l^2 \rightarrow l^2$ tak, že předpis $v = T_n u$ znamená

$$v_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n)} u_j, \quad i = 1, 2, \dots,$$

kde $\alpha_{ij}^{(n)} = \alpha_{ij}$ pro $i \leq n$, $\alpha_{ij}^{(n)} = 0$ pro $i > n$. Obor hodnot $\mathcal{R}(T_n)$ je konečnědimenzionální. Dokažte, že

$$\|T - T_n\|^2 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \rightarrow 0.$$

Nakonec použijte větu 3.7.

4.2 Kompaktní operátory

Nechť kompaktní operátor $T : H \rightarrow H$ zobrazuje Hilbertův prostor H do sebe. Symbolem $Ker(T_\lambda)$ jsme označili množinu všech řešení rovnice

$$(4.9) \quad T_\lambda u = Tu - \lambda u = 0$$

(kde λ je komplexní číslo).

Cvičení 4.3 Ukažte, že $Ker(T_\lambda)$ je uzavřeným lineárním podprostorem prostoru H .

Platí následující tvrzení.

Věta 4.7 *Budiž $T : H \rightarrow H$ kompaktní operátor. Je-li $\lambda \neq 0$, je množina $Ker(T_\lambda)$ konečněrozměrným podprostorem prostoru H .*

Důkaz *Není-li λ vlastním číslem T , pak $Ker(T_\lambda)$ obsahuje pouze nulový prvek $0 \in H$ a věta je dokázána. Nechť tedy λ je vlastním číslem operátoru T a předpokládejme, že $Ker(T_\lambda)$ není konečněrozměrným prostorem. Pak musí existovat nekonečná posloupnost $\{u_n\}$ lineárně nezávislých prvků z $Ker(T_\lambda)$. Můžeme též předpokládat, že tato posloupnost je ortonormální (zdůvodněte!). Je tedy $\|u_n\| = 1$ a z kompaktnosti operátoru T vyplývá, že z posloupnosti $\{Tu_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergentní v H . Současně však je*

$$Tu_n = \lambda u_n \quad \text{a} \quad Tu_m = \lambda u_m.$$

Pro $n \neq m$ tedy je

$$\begin{aligned} \|Tu_m - Tu_n\|^2 &= \|\lambda u_m - \lambda u_n\|^2 = \|\lambda(u_m - u_n)\|^2 = \\ &= |\lambda|^2 \|u_m - u_n\|^2 = |\lambda|^2 (\|u_m\|^2 + \|u_n\|^2) = 2|\lambda|^2 \end{aligned}$$

(zde jsme využili toho, že $(u_m, u_n) = 0$). Protože $|\lambda| > 0$, nemůže být posloupnost $\{Tu_n\}$ ani žádná její podposloupnost cauchyovská, a tím spíše nemůže konvergovat. To je však spor, neboť T je kompaktní operátor. Množina $Ker(T_\lambda)$ tedy nemůže být nekonečnědimenzionálním prostorem. ■

Definice 4.2 Dimenzi prostoru $Ker(T_\lambda)$ nazýváme *násobností vlastního čísla λ* .

Poznámka Z věty 4.7 vyplývá, že násobnost nenulového vlastního čísla kompaktního operátoru je vždy konečné přirozené číslo.

Příklad 4.6 Uvažujme operátor $T : l^2 \rightarrow l^2$, který prvku

$$u = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots\} \in l^2$$

přirazuje prvek

$$Tu = \left\{ 0, u_1, \frac{1}{2}u_2, \dots, \frac{1}{n-1}u_{n-1}, \dots \right\} \in l^2.$$

Tento operátor je kompaktním operátorem (zdůvodněte!). Ukážeme, že *nemá žádné vlastní číslo*: Rovnost $Tu = \lambda u$ znamená, že

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda u_1, \\ u_1 &= \lambda u_2, \\ \frac{1}{2}u_2 &= \lambda u_3, \\ &\dots \\ \frac{1}{n-1}u_{n-1} &= \lambda u_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

Z těchto rovnic postupně vyplývá, že $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_n = 0, \dots$, tj. $u = o \in l^2$. □

Poznámka Srovnáme-li operátor T z příkladu 4.6 s operátorem definovaným v poznámce následující za příkladem 4.4, zjistíme, že struktura množiny vlastních čísel může být pro různé operátory rozmanitá. Více informací o množině vlastních čísel obdržíme, budeme-li nadále uvažovat pouze *kompaktní* a *samoadjungované* operátory.

Věta 4.8 *Je-li T kompaktní samoadjungovaný lineární operátor z H do H , je každý nenulový bod jeho spektra vlastním číslem.*

Důkaz Nechť $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Podle věty 4.4 pak existuje posloupnost prvků $\{u_n\} \subset H$, $\|u_n\| = 1$, taková, že

$$(4.10) \quad Tu_n - \lambda u_n \rightarrow o \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Z omezenosti posloupnosti $\{u_n\}$ a z kompaktnosti operátoru T vyplývá, že existuje podposloupnost $\{Tu_{n_k}\}$, která konverguje k nějakému prvku $v \in H$. Z (4.10) pak dostáváme

$$u_{n_k} = \frac{1}{\lambda} [Tu_{n_k} - (Tu_{n_k} - \lambda u_{n_k})] \rightarrow \frac{1}{\lambda}(v - o) = \frac{1}{\lambda}v$$

a ze spojitosti operátoru T plyne, že

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} Tu_{n_k} = T(\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}) = T\left(\frac{1}{\lambda}v\right) = \frac{1}{\lambda}Tv,$$

čili $Tv = \lambda v$. Současně je $\left\| \frac{1}{\lambda}v \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k}\| = 1$ (zdůvodněte!), a tedy $v \neq o$. Číslo λ je proto vlastním číslem a v je jemu odpovídající vlastní prvek. ■

Poznámka Věta 4.8 nedává žádnou odpověď na otázku, zda bod $\lambda = 0$ – pokud patří do spektra $\sigma(T)$ – je či není vlastním číslem. V následujícím příkladě ukážeme, že jednoznačná odpověď na tuto otázku neexistuje.

Příklad 4.7 (a) Operátor T definovaný v příkladu 4.2 je kompaktní (ukážte to!) a má tu vlastnost, že $\lambda = 0$ *není jeho vlastním číslem*, ale patří do spektra $\sigma(T)$.

(b) Uvažujme nyní operátor $\tilde{T} : l^2 \rightarrow l^2$ přiřazující prvku

$$u = \{u_1, u_2, \dots\} \in l^2$$

prvek

$$\tilde{T}u = \left\{ u_1, 0, -\frac{1}{3}u_3, 0, \frac{1}{5}u_5, 0, -\frac{1}{7}u_7, 0, \frac{1}{9}u_9, \dots \right\}.$$

Uvědomte si, že jde o speciální případ operátoru z příkladu 4.4. Tento operátor je kompaktní a samoadjungovaný (dokažte to!) a má vlastní čísla $\lambda_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Odpovídajícími vlastními prvky jsou e_{2n-1} . Ale také $\lambda = 0$ je vlastním číslem s vlastními prvky $e_2, e_4, e_6, \dots$.

Všimněte si, že dimenze prostoru $\text{Ker}(\tilde{T}_\lambda)$ je pro $\lambda = \lambda_n$ rovna jedné, zatímco pro $\lambda = 0$ je $\text{Ker}(\tilde{T}_0)$ nekonečnědimenzionální prostor.

□

Poznámka Pro kompaktní samoadjungovaný operátor nemůže nastat situace z příkladu 4.6, jak ukazuje následující věta.

Věta 4.9 Každý kompaktní samoadjungovaný lineární operátor $T : H \rightarrow H$ má alespoň jedno vlastní číslo.

Důkaz Je-li $Tu = o$ pro všechna $u \in H$, je $Tu = 0u$, a $\lambda = 0$ je tedy vlastním číslem. Je-li v H alespoň jeden prvek u takový, že $Tu \neq o$, je alespoň jedno z čísel m_T a M_T z věty 4.1 různé od nuly (zdůvodněte!). Toto číslo patří podle věty 4.5 do spektra operátoru T , a tedy podle věty 4.8 je vlastním číslem.

■

Skutečnost, že se vlastní čísla u obou operátorů z předcházejícího příkladu hromadila v okolí bodu 0, není náhodná. Dá se dokázat následující obecné tvrzení.

Věta 4.10 Nechť $\varepsilon > 0$. Vně intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ může ležet jen konečný počet vlastních čísel kompaktního samoadjungovaného lineárního operátoru $T : H \rightarrow H$.

Důkaz Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje nekonečně mnoho různých vlastních čísel λ_n operátoru T takových, že $|\lambda_n| \geq \varepsilon$. Potom existuje nekonečně mnoho vlastních prvků u_n :

$$Tu_n = \lambda_n u_n.$$

Zároveň lze předpokládat, že $\|u_n\| = 1$, a podle věty 4.2 je $(u_n, u_m) = 0$ pro $\lambda_n \neq \lambda_m$. Zároveň platí

$$\begin{aligned}\|Tu_n - Tu_m\|^2 &= \|\lambda_n u_n - \lambda_m u_m\|^2 = \|\lambda_n u_n\|^2 + \|\lambda_m u_m\|^2 = \\ &= |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 + |\lambda_m|^2 \|u_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geq 2\varepsilon^2\end{aligned}$$

pro všechna m a n , $m \neq n$. Z posloupnosti $\{Tu_n\}$ tedy nelze vybrat konvergentní podposloupnost. To je však spor, neboť T je kompaktní operátor a $\{u_n\}$ leží na jednotkové kouli. ■

Poznámka Všechna nenulová vlastní čísla kompaktního samoadjungovaného operátoru můžeme seřadit tak, že platí

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_k| \geq \dots > 0.$$

Tato posloupnost může být i konečná, existuje-li jen konečný počet nenulových vlastních čísel.

Vlastnímu číslu λ_1 odpovídá konečný počet k_1 lineárně nezávislých vlastních prvků, které můžeme považovat za ortonormální. Tyto prvky označme

$$(4.11) \quad u_1, u_2, \dots, u_{k_1}.$$

Vlastnímu číslu $\lambda_2 (\neq \lambda_1)$ odpovídá opět konečný počet k_2 lineárně nezávislých ortonormálních vlastních prvků

$$(4.12) \quad u_{k_1+1}, u_{k_1+2}, \dots, u_{k_1+k_2}.$$

Přitom prvky systému (4.11) jsou kolmé k prvkům systému (4.12), takže systém, který utvoříme ze všech těchto prvků dohromady, je opět ortonormální.

Tak můžeme pokračovat pro vlastní čísla $\lambda_3, \lambda_4, \dots$, až dostaneme ortonormální posloupnost $\{u_n\}$ (konečnou nebo nekonečnou) prvků z H , které jsou vesměs vlastními prvky operátoru T . Z této konstrukce zároveň vyplývá, že neexistuje další vlastní prvek, který by odpovídal nenulovému vlastnímu číslu.

Někdy je třeba uvažovat vlastní čísla včetně jejich násobností, a proto je účelné vytvořit novou posloupnost vlastních čísel, do níž zařadíme vlastní číslo λ_i tolikrát, kolik činí jeho násobnost (tj. dimenze prostoru $\text{Ker } T_{\lambda_i}$):

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1\text{-krát}}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_2}_{k_2\text{-krát}}, \underbrace{\lambda_3, \lambda_3, \dots, \lambda_3}_{k_3\text{-krát}}, \lambda_4, \dots$$

Tuto novou posloupnost označíme $\{\mu_k\}$. Bude pro ni platit:

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq |\mu_3| \geq \dots > 0$$

a každému číslu μ_k z této posloupnosti bude odpovídat právě jeden vlastní prvek z ortonormální posloupnosti $\{u_k\}$:

$$Tu_k = \mu_k u_k.$$

Úvahy provedené v předcházející poznámce můžeme shrnout v následující větě.

Věta 4.11 *Spektrum kompaktního samoadjungovaného operátoru T je tvořeno konečnou nebo nekonečnou posloupností nenulových reálných vlastních čísel μ_k (která můžeme seřadit podle klesajících absolutních hodnot) a popřípadě ještě číslem 0. Každému vlastnímu číslu μ_k odpovídá právě jeden vlastní prvek u_k . Posloupnost $\{u_k\}$ je ortonormální.*

O číse $\lambda = 0$ můžeme vyslovit následující tvrzení.

Věta 4.12 *Je-li posloupnost $\{\mu_k\}$ nekonečná, patří bod $\lambda = 0$ do spektra $\sigma(T)$.*

Důkaz Je-li $\{\mu_k\}$ nekonečná posloupnost, platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$$

(zdůvodněte!). Potom

$$\|Tu_k - 0 \cdot u_k\| = \|\mu_k u_k\| = |\mu_k| \|u_k\| = |\mu_k| \rightarrow 0,$$

tj. $0 \in \sigma(T)$. ■

Věta 4.13 *Je-li posloupnost $\{\mu_k\}$ konečná, patří číslo $\lambda = 0$ do spektra $\sigma(T)$ jen tehdy, je-li vlastním číslem operátoru T .*

K důkazu této věty potřebujeme některá pomocná tvrzení.

Označme $\mathcal{H}_1$ množinu všech konvergentních řad (ve smyslu normy prostoru H) tvaru

$$\sum_k \alpha_k u_k,$$

kde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ a $\{u_k\}$ je posloupnost vlastních prvků operátoru T . Potom $\mathcal{H}_1$ je Hilbertův prostor, v němž prvky u_k tvoří úplnou ortonormální bázi. Zdůvodněte! (Je-li $\{u_k\}$ konečná posloupnost, je $\mathcal{H}_1$ prostorem konečné dimenze.) Protože $\mathcal{H}_1$ je uzavřený podprostor prostoru H , lze provést ortogonální rozklad prostoru H :

$$H = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,$$

kde $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^\perp$. Každý prvek $u \in H$ lze tedy psát jednoznačně ve tvaru

$$u = v + w, \quad v \in \mathcal{H}_1, \quad w \in \mathcal{H}_2, \quad (v, w) = 0.$$

Lemma 4.1 *Operátor T zobrazuje prostor $\mathcal{H}_1$ opět do $\mathcal{H}_1$ (tj. $Tu \in \mathcal{H}_1$ pro každé $u \in \mathcal{H}_1$).*

Důkaz Je-li $u \in \mathcal{H}_1$, je

$$u = \sum_k \alpha_k u_k, \text{ kde } \sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$$

(zdůvodněte!). Spojitost a linearita operátoru T implikuje:

$$Tu = T \left(\sum_k \alpha_k u_k \right) = \sum_k \alpha_k T u_k = \sum_k \alpha_k \mu_k u_k,$$

čili

$$Tu = \sum_k \beta_k u_k, \text{ kde } \beta_k = \alpha_k \mu_k.$$

Přitom platí $\sum_k |\beta_k|^2 < \infty$, neboť platí $\sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$ a $|\mu_k| \leq |\mu_1|$ pro všechna přirozená čísla k . Prvek Tu tedy opět patří do $\mathcal{H}_1$. ■

Lemma 4.2 Operátor T zobrazuje $\mathcal{H}_2$ opět do $\mathcal{H}_2$.

Důkaz Je-li $w \in \mathcal{H}_2$ a v libovolný prvek z $\mathcal{H}_1$, je

$$(4.13) \quad (Tw, v) = (w, Tv) = 0,$$

neboť $Tv \in \mathcal{H}_1$ podle lemmatu 4.1. Ze vztahu (4.13) vyplývá, že $Tw \in \mathcal{H}_2$. ■

Lemma 4.3 Platí $Tw = o$ pro všechna $w \in \mathcal{H}_2$.

Důkaz Operátor $T : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ je opět kompaktní a samoadjungovaný operátor (zdůvodněte!). Buď tedy $Tw = o$ pro všechna $w \in \mathcal{H}_2$ nebo (podle věty 4.9) existuje nenulové vlastní číslo λ_0 s vlastním prvkem $w_0 \in \mathcal{H}_2 : Tw_0 = \lambda_0 w_0$. Ukážeme, že tato druhá možnost je vyloučena. Muselo by totiž platit $(w_0, u_k) = 0$ pro všechna k . Tím bychom dostali nový vlastní prvek s nenulovým vlastním číslem, který do posloupnosti $\{u_k\}$ nepatří, a to odporuje konstrukci posloupnosti $\{u_k\}$. ■

Tvrzením lemmatu 4.3 jsme popsali uzavřený podprostor $\mathcal{H}_2$; je to množina všech vlastních prvků, odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda = 0$, doplněná ještě nulovým prvkem o . Mohou tedy nastat tyto dvě možnosti:

(i) Množinu $\mathcal{H}_2$ tvoří jen nulový prvek – pak je $H = \mathcal{H}_1$ a vlastní prvky $\{u_k\}$ operátoru T tvoří úplnou ortonormální posloupnost v H ; číslo $\lambda = 0$ pak není vlastním číslem operátoru T .

(ii) Množina $\mathcal{H}_2$ obsahuje i nenulové prvky – pak je $H \neq \mathcal{H}_1$ a číslo $\lambda = 0$ je vlastním číslem operátoru T ; posloupnost $\{u_k\}$ není úplná v H .

Důkaz věty 4.13 Je-li posloupnost $\{\mu_k\}$ konečná, $k = 1, 2, \dots, N$, je buď $H \neq \mathcal{H}_1$ a $\lambda = 0$ je podle (ii) vlastním číslem, nebo je $H = \mathcal{H}_1$. V druhém případě však prostor H je N -rozměrným prostorem s bází $u_1, u_2, \dots, u_N$. Potom pro $u \in H$ platí

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k \quad \text{a} \quad Tu = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu_k u_k.$$

Odtud

$$\|Tu - 0 \cdot u\|^2 = \|Tu\|^2 = \sum_{k=1}^N |\alpha_k \mu_k|^2 \geq |\mu_N|^2 \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2,$$

neboť

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_N| > 0.$$

Platí tedy:

$$\|Tu - 0 \cdot u\| \geq |\mu_N| \|u\|$$

pro všechna $u \in H$, tj. číslo $\lambda = 0$ je regulární hodnotou operátoru T . ■

Věta 4.14 (a) Ortonormální systém $\{u_k\}$ všech vlastních prvků kompaktního samoadjungovaného lineárního operátoru T , odpovídajících nenulovým vlastním číslům, tvoří úplný systém v H právě tehdy, když $\lambda = 0$ není vlastním číslem operátoru T .

(b) Prvky $Tu \in H$ (tj. prvky z $\mathcal{R}(T)$) lze rozložit ve Fourierovu řadu podle ortonormální posloupnosti $\{u_k\}$. Pro každé $u \in H$ je

$$(4.14) \quad Tu = \sum_k \gamma_k u_k, \quad \text{kde } \gamma_k = (Tu, u_k).$$

Důkaz Tvrzení (a) plyne z tvrzení (i) a (ii) za důkazem lemmatu 4.3. Tvrzení (b) vyplývá z následující úvahy: každý prvek $u \in H$ lze psát ve tvaru $u = v + w$, $v \in \mathcal{H}_1$, $w \in \mathcal{H}_2$. Pak je

$$Tu = T(v + w) = Tv + Tw = Tv,$$

neboť podle lemmatu 4.3 je $Tw = 0$. Podle lemmatu 4.1 je $Tv \in \mathcal{H}_1$ a v $\mathcal{H}_1$ je posloupnost $\{u_k\}$ úplná. Můžeme tedy vyjádřit Tv ve tvaru Fourierovy řady

$$Tv = \sum_k \gamma_k u_k, \quad \gamma_k = (Tv, u_k).$$
■

Poznámka Protože T je samoadjungovaný operátor, platí

$$\gamma_k = (Tu, u_k) = (u, Tu_k) = (u, \mu_k u_k) = \mu_k(u, u_k)$$

(zdůvodněte podrobně!). Vyjádření (4.14) můžeme tedy psát ve tvaru:

$$Tu = \sum_k \mu_k(u, u_k) u_k.$$

Poznámka Platí $H = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, kde $\mathcal{H}_1$ je separabilní Hilbertův prostor (zdůvodněte!). Je-li $\mathcal{H}_2$ též separabilní s úplným ortonormálním systémem $\{w_k\}$, tvoří tyto prvky spolu s $\{u_k\}$ nový ortonormální systém $\{z_k\}$, který je úplný v H . Protože w_k jsou vlastní prvky operátoru T odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 0$, můžeme tvrzení (a) věty 4.14 doplnit následujícím způsobem:

„V separabilním Hilbertově prostoru H tvoří ortonormální posloupnost $\{z_k\}$ všech lineárně nezávislých vlastních prvků kompaktního samoadjungovaného lineárního operátoru T z H do H úplný systém.“

Pro číslo $\lambda = 0$ mohou teoreticky nastat tyto čtyři možnosti:

- (I) $0 \in \sigma(T)$, $\lambda = 0$ je vlastní číslo, $\dim \text{Ker}(T_\lambda) < \infty$;
- (II) $0 \in \sigma(T)$, $\lambda = 0$ je vlastní číslo, $\dim \text{Ker}(T_\lambda) = \infty$;
- (III) $0 \in \sigma(T)$, $\lambda = 0$ není vlastní číslo;
- (IV) $0 \notin \sigma(T)$.

Cvičení 4.4 (i) Dokažte, že pro operátor $T : l^2 \rightarrow l^2$, který prvku $u = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$ přiřazuje prvek $Tu = \left\{0, \frac{1}{2}u_2, \frac{1}{3}u_3, \dots\right\}$, nastává možnost (I).

(ii) Dokažte, že možnost (II) nastane pro operátor $\tilde{T}$ z příkladu 4.7 a možnost (III) nastane pro operátor T z příkladu 4.2.

(iii) Dokažte, že operátor $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ přiřazující dvojici $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dvojici (x_2, x_1) splňuje (IV).

V dalším textu se budeme věnovat otázce řešitelnosti operátorové rovnice

$$(4.15) \quad Tu - \lambda u = f,$$

kde T je kompaktní samoadjungovaný lineární operátor, zobrazující Hilbertův prostor H do sebe.

Věta 4.15 *Budiž T kompaktní samoadjungovaný lineární operátor z H do H .*

(1) *K tomu, aby rovnice (4.15) měla pro $\lambda \neq 0$ řešení pro každou pravou stranu $f \in H$, je nutné a stačí, aby homogenní rovnice*

$$(4.16) \quad Tu - \bar{\lambda}u = 0$$

měla pouze triviální řešení (tj. aby λ nebylo vlastní číslo operátoru T). Řešení rovnice (4.15) je pak určeno jednoznačně.

(2) *Je-li $\lambda \neq 0$ vlastní číslo operátoru T , je rovnice (4.15) řešitelná tehdy a jen tehdy, je-li pravá strana f ortogonální ke všem řešením rovnice (4.16).*

Důkaz Nechť $\lambda \neq 0$. Potom je λ podle věty 4.11 buď regulární hodnota, nebo vlastní číslo operátoru T . Je-li λ regulární hodnota, existuje podle definice spojitý inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$, definovaný na celém prostoru H . Rovnice (4.15) má tedy řešení pro každé $f \in H$. Jednoznačnost tohoto řešení dostaneme na základě nerovnosti (4.6): Je-li $T_\lambda u = f$ a současně $T_\lambda v = f$, je podle (4.6)

$$0 = \|T_\lambda u - T_\lambda v\| = \|T_\lambda(u - v)\| \geq c\|u - v\|,$$

tj. $u = v$. Současně s λ je regulární hodnotou operátoru T i číslo $\bar{\lambda}$, takže rovnice (4.16) má v tomto případě pouze triviální řešení.

Je-li naopak λ vlastním číslem operátoru T , je podle věty 4.5 $\lambda = \bar{\lambda}$ a rovnice (4.16) má netriviální řešení. Rovnice (4.15) pak nemá řešení pro libovolné $f \in H$ např. podle věty 4.6. Tím je dokázaná část (1) věty.

K důkazu části (2) použijeme větu 4.6. Platí

$$(4.17) \quad H = \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} \oplus \text{Ker}(T_\lambda).$$

Podobně jako v lemmatech 4.1 a 4.2 lze dokázat, že operátor T zobrazuje množinu $\text{Ker}(T_\lambda)$ do $\text{Ker}(T_\lambda)$ a množinu $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$ do $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$. Operátor T , chápaný nyní (stejně jako v důkazu lemmatu 4.3) jako operátor z $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$ do $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$, je opět kompaktní a samoadjungovaný. Pro takto chápaný operátor však číslo λ není vlastním číslem (vlastní prvky operátoru T totiž leží všechny v prostoru $\text{Ker}(T_\lambda)$), a proto je tato hodnota ($\lambda \neq 0$) regulární hodnotou operátoru T (chápaného jako operátoru z $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$ do $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$). Existuje tedy spojitý inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$, definovaný na $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$, a rovnice (4.15) má řešení pro každé $f \in \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$:

$$T_\lambda u = f.$$

To však znamená, že $f \in \mathcal{R}(T_\lambda)$ a je tedy (neboť $f \in \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$ bylo libovolné):

$$\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} = \mathcal{R}(T_\lambda).$$

Vztah (4.17) pak můžeme psát ve tvaru

$$H = \mathcal{R}(T_\lambda) \oplus \text{Ker}(T_\lambda).$$

Z tohoto rozkladu prostoru H již plyne tvrzení (2): Je-li rovnice (4.15) řešitelná, patří prvek $f = Tu - \lambda u$ do $\mathcal{R}(T_\lambda)$ a je tedy ortogonální ke všem prvkům z $\text{Ker}(T_\lambda)$, tj. ke všem řešením rovnice (4.16). Je-li naopak prvek f kolmý ke všem vlastním prvkům, je kolmý k celé množině $\text{Ker}(T_\lambda)$ a patří tedy do $\mathcal{R}(T_\lambda) = \text{Ker}(T_\lambda)^\perp$. To znamená, že f má tvar $Tu_0 - \lambda u_0$ s nějakým $u_0 \in H$, čili rovnice (4.15) má řešení u_0 . ■

Poznámka V případě (2) není řešení rovnice (4.15) určeno jednoznačně. Je-li u_0 nějaké řešení této rovnice, je řešením též každý prvek tvaru $u_0 + v$, kde $v \in \text{Ker}(T_\lambda)$:

$$T(u_0 + v) - \lambda(u_0 + v) = Tu_0 + Tv - \lambda u_0 - \lambda v = (Tu_0 - \lambda u_0) + (Tv - \lambda v) = f + 0 = f.$$

(Zdůvodněte podrobně!)

Poznámka Počátkem tohoto století švédský matematik Erik Ivar FREDHOLM (1866–1927) dokázal řadu tvrzení o řešitelnosti integrálních rovnic. Později se ukázalo, že tato tvrzení lze zobecnit na rovnice tvaru (4.15). Proto se věta 4.15 někdy nazývá *Fredholmova alternativa*. Její znění totiž popisuje řešitelnost rovnice (4.15), nastane-li jedna ze dvou alternativ: λ je buď vlastní číslo, nebo λ je regulární hodnota operátoru T .

Poznámka Věta 4.15 platí i tehdy, nahradíme-li v jejím znění všude rovnici (4.16) rovnicí

$$(4.18) \quad Tu - \lambda u = o.$$

Známe-li nyní všechna nenulová vlastní čísla μ_k operátoru T a všechny jim odpovídající vlastní prvky u_k (tvoří ortonormální posloupnost), můžeme najít *vzor* pro vyjádření řešení rovnice (4.15) v případě $\lambda \neq 0$:

Nechť u je řešením rovnice (4.15). Označme

$$\xi_k = (u, u_k).$$

Podle (4.14) můžeme psát

$$Tu = \sum_k \mu_k \xi_k u_k.$$

Rovnici (4.15) tedy můžeme zapsat takto:

$$\lambda u = -f + Tu,$$

tj.

$$(4.19) \quad u = -\frac{1}{\lambda}f + \frac{1}{\lambda}Tu = -\frac{1}{\lambda}f + \frac{1}{\lambda} \sum_k \mu_k \xi_k u_k.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost skalárně prvkem u_n , dostaneme

$$\begin{aligned} \xi_n = (u, u_n) &= -\frac{1}{\lambda}(f, u_n) + \frac{1}{\lambda} \sum_k \mu_k \xi_k (u_k, u_n) = \\ &= -\frac{1}{\lambda}(f, u_n) + \frac{1}{\lambda} \mu_n \xi_n (u_n, u_n) = -\frac{1}{\lambda}(f, u_n) + \frac{1}{\lambda} \mu_n \xi_n \end{aligned}$$

(zdůvodněte podrobně!). Poslední vztah můžeme upravit takto:

$$(4.20) \quad \xi_n(\lambda - \mu_n) = -(f, u_n).$$

Rozlišíme nyní dva případy:

(I) Nechť $\lambda \neq 0$ *není* vlastní číslo operátoru T . Pak je $\lambda \neq \mu_n$ pro všechna přirozená n , a z (4.20) tedy můžeme vyjádřit

$$(4.21) \quad \xi_n = \frac{1}{\mu_n - \lambda}(f, u_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (4.19), dostaneme pro řešení u rovnice (4.15) vzorec

$$(4.22) \quad u = -\frac{1}{\lambda}f + \frac{1}{\lambda} \sum_k \frac{\mu_k}{\mu_k - \lambda} (f, u_k) u_k.$$

(II) Nechť nyní $\lambda \neq 0$ je vlastní číslo operátoru T . Pak je

$$\lambda = \mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \dots = \mu_{r+s}$$

(λ je vlastní číslo násobnosti $s \geq 1$) a vlastnímu číslu λ odpovídají vlastní prvky

$$(4.23) \quad u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+s}.$$

Podle věty 4.15 existuje řešení rovnice (4.15) právě tehdy, když je pravá strana f kolmá ke všem prvkům systému (4.23):

$$(f, u_i) = 0, \quad i = r+1, r+2, \dots, r+s.$$

To znamená, že pro $n = r+1, r+2, \dots, r+s$ jsou rovnosti (4.20) splněny pro *libovolnou* hodnotu ξ_n (zdůvodněte). Pro ostatní hodnoty n je možno z (4.20) vypočítat ξ_n podle vzorce (4.21) a dostáváme tedy tento výsledek:

$$(4.24) \quad u = -\frac{1}{\lambda}f + \frac{1}{\lambda} \sum_{k \neq r+1, \dots, r+s} \frac{\mu_k}{\mu_k - \lambda} (f, u_k) u_k + \sum_{i=r+1}^{r+s} \xi_i u_i,$$

kde čísla $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \dots, \xi_{r+s}$ jsou *libovolná*. Poslední suma na pravé straně v (4.24) je obecným řešením homogenní rovnice (4.18).

Výše provedené úvahy a výpočty můžeme shrnout v následující větě.

Věta 4.16 *Budiž T kompaktní samoadjungovaný lineární operátor z Hilbertova prostoru H do H s $\mathcal{D}(T) = H$. Nechť je $\{\mu_k\}$ posloupnost všech nenulových vlastních čísel operátoru T a nechť je $\{u_k\}$ ortonormální posloupnost všech jim odpovídajících vlastních prvků. Budiž dále f daný prvek z H a $\lambda \neq 0$. Každé řešení u rovnice $Tu - \lambda u = f$ má tvar (4.22), není-li λ vlastní číslo operátoru T , a tvar (4.24), je-li λ vlastní číslo operátoru T .*

Poznámka Oba vzorce (4.22) a (4.24) lze shrnout takto: Řešení rovnice (4.15) má vždy tvar

$$u = -\frac{1}{\lambda}f + \frac{1}{\lambda} \sum_k \alpha_k u_k,$$

kde

$$\alpha_k = \frac{\mu_k}{\mu_k - \lambda} (f, u_k),$$

pro všechna k , pro něž je $\mu_k \neq \lambda$, a α_k je libovolné číslo pro všechna k , pro něž je $\mu_k = \lambda$.

Příklad 4.8 Uvažujme integrální operátor $T : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$ definovaný předpisem

$$(Tu)(t) = \int_0^l K(t, \tau) u(\tau) d\tau,$$

kde funkce (*jádro*) $K(t, \tau)$ je definována vztahem:

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau(l-t)}{l}, & 0 \leq \tau \leq t \leq l, \\ \frac{t(l-\tau)}{l}, & 0 \leq t \leq \tau \leq l. \end{cases}$$

Dá se ukázat, že T je kompaktní samoadjungovaný lineární operátor.

Hledejme vlastní čísla a vlastní funkce operátoru T . Rovnici

$$Tu - \lambda u = 0$$

můžeme zapsat ve tvaru

$$(4.25) \quad \frac{1}{l} \int_0^t \tau(l-t)u(\tau) d\tau + \frac{1}{l} \int_t^l t(l-\tau)u(\tau) d\tau - \lambda u(t) = 0.$$

Odtud vyplývá pro $\lambda \neq 0$

$$u(0) = u(l) = 0.$$

Derivováním rovnice (4.25) podle t dostáváme po úpravě

$$\lambda u'(t) = -\frac{1}{l} \int_0^t \tau u(\tau) d\tau + \frac{1}{l} \int_t^l (l-\tau)u(\tau) d\tau.$$

Derivujeme-li ještě jednou, obdržíme rovnici

$$\lambda u''(t) + u(t) = 0.$$

Integrální rovnici (4.25) jsme tedy převedli na okrajovou úlohu

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \lambda u''(t) + u(t) &= 0, \\ u(0) &= u(l) = 0, \end{aligned}$$

která je s ní ekvivalentní. Okrajová úloha (4.26) má netriviální řešení pouze pro

$$\lambda = \mu_n = \frac{l^2}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

jsou to funkce

$$\tilde{u}_n(t) = \sin \frac{n\pi}{l} t$$

a to jsou také vlastní čísla a vlastní funkce našeho integrálního operátoru T (zdůvodněte!).
Není těžké se přesvědčit, že funkce $\{\tilde{u}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří ortogonální systém v $L^2(0, l)$. Protože

$$\|\tilde{u}_n\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi t}{l} dt = \frac{l}{2}$$

(ověřte!), tvoří systém

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi t}{l}, u_2(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi t}{l}, \dots, u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi t}{l}, \dots$$

ortonormální systém vlastních funkcí.

Vyšetřujeme nyní řešitelnost rovnice

$$Tu - \lambda u = f,$$

tj. integrální rovnice

$$(4.27) \quad \int_0^l K(t, \tau) u(\tau) d\tau - \lambda u(t) = f(t).$$

Jestliže $\lambda \neq \mu_k \left(= \frac{l^2}{k^2 \pi^2} \right)$, $k = 1, 2, \dots$, potom má rovnice (4.27) právě jedno řešení, které můžeme vyjádřit ve tvaru

$$u(t) = -\frac{1}{\lambda} f(t) + \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^2 f_k}{l^2 - \lambda k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi t}{l},$$

kde

$$f_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt.$$

V případě, kdy $\lambda = \frac{l^2}{n^2 \pi^2}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, musí funkce f splňovat podmínku

$$\int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt = 0$$

a řešení rovnice (4.27) má tvar

$$u(t) = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} f(t) + \frac{n^4 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k \neq n} \frac{f_k}{n^2 - k^2} \sin \frac{k\pi t}{l} + c \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi t}{l},$$

kde c je libovolná konstanta.

□

Kapitola 5

Diferenciální a integrální počet v Banachových a Hilbertových prostorech

5.1 Derivace ve směru a Gâteauxův diferenciál

Zkoumáme-li vlastnosti funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ metodami diferenciálního počtu funkcí *jedné proměnné* (tj. zkoumáme chování funkce f zúžené na jistou přímku), dojdeme k pojmu derivace ve směru (a speciálně k pojmu parciální derivace). Pojem derivace ve směru nyní zobecníme pro zobrazení mezi lineárními normovanými prostory. Následující definice pochází od francouzského matematika R. GÂTEAUXE [čti: Gató] z roku 1913. Protože tato definice vznikla při zobecnění pojmu derivace integrálu používaného ve variačním počtu, používá se místo termínu derivace ve směru také termín *Gâteauxova variace*.

Definice 5.1 Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $f : X \rightarrow Y$. Jestliže pro u_0 a $h \in X$ má zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow Y$ definované předpisem $\varphi(t) = f(u_0 + th)$ derivaci v nule, tj. existuje

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t},$$

pak $\varphi'(0)$ nazýváme *derivací zobrazení f v bodě u_0 ve směru h* a značíme $\delta f(u_0, h)$. Uvědomte si, že se zde jedná o limitu v prostoru Y , tj. také $\varphi'(0)$ je prvek prostoru Y . Jestliže $\delta f(u_0, h)$ existuje pro všechna $h \in X$, pak zobrazení $h \rightarrow \delta f(u_0, h)$ nazýváme *Gâteauxův diferenciál* funkce f v bodě u_0 .

Příklad 5.1 Nechť $f : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Potom pro $u_0 \in X$ a $h \in X$ platí

$$\delta f(u_0, h) = f(h).$$

Přímo z definice totiž plyne:

$$\varphi'(0) = \delta f(u_0, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0) + tf(h) - f(u_0)}{t} = f(h)$$

□

Příklad 5.2 Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $\delta f(u_0, h)$ odpovídá derivaci ve směru h v bodě u_0 jak byla definována v přednášce Matematická analýza II (viz [8]).

□

Poznámka Z praktických důvodů (např. chceme-li obecné nelineární zobrazení aproxi-movat v bodě u_0 zobrazením lineárním) nás budou zajímat taková zobrazení, pro která je Gâteauxův diferenciál

$$(5.1) \quad h \mapsto \delta f(u_0, h)$$

spojitým lineárním zobrazením prostoru X do prostoru Y .

Z definice 5.1 vyplývá, že jsou-li X a Y reálné normované lineární prostory a má-li f v bodě u_0 Gâteauxův diferenciál, je již zobrazení (5.1) *homogenní*, tj. platí $\delta f(u_0, \tau h) = \tau \delta f(u_0, h)$ pro libovolné $h \in X$ a $\tau \in \mathbb{R}$ (dokažte!). Obecně však nemusí být aditivní, tj. nemusí obecně platit $\delta f(u_0, h_1 + h_2) = \delta f(u_0, h_1) + \delta f(u_0, h_2)$ pro $h_1, h_2 \in X$ (a obecně tedy není lineární). Dají se také nalézt taková zobrazení f , pro něž je sice (5.1) lineárním zobrazením z X do Y , ale není spojitý.

Definice 5.2 Nechť zobrazení $f : X \rightarrow Y$ má Gâteauxův diferenciál v bodě $u_0 \in X$. Jestli-že zobrazení (5.1) je spojitý lineární zobrazení prostoru X do prostoru Y , pak říkáme, že zobrazení f má v bodě u_0 *Gâteauxovu derivaci* a zobrazení $h \mapsto \delta f(u_0, h)$, $h \in X$, zna-číme $Df(u_0)$. Píšeme pak $\delta f(u_0, h) = Df(u_0)h$. Zobrazení $Df(u_0)$ se nazývá *Gâteauxova derivace zobrazení f v bodě u_0* . (Někdy se používá též termínu *slabá derivace*.)

Příklad 5.3 Nechť $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitou derivaci. Vypočtěme Gâteauxův diferenciál zobrazení $f : u \mapsto \int_0^1 \varphi(u(t))dt$, $u(t) \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ (tj. u je prvek prostoru X spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a $f(u) = \int_0^1 \varphi(u(t))dt$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$). Zvolme pevně prvek $u_0(t) \in C(\langle 0, 1 \rangle)$. Potom pro $h \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \delta f(u_0, h) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 \varphi(u_0(t) + \tau h(t))dt - \int_0^1 \varphi(u_0(t))dt}{\tau} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\varphi(u_0(t) + \tau h(t)) - \varphi(u_0(t))}{\tau} dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\varphi(u_0(t)) + \tau h(t)\varphi'(u_0(t)) + o(\tau) - \varphi(u_0(t))}{\tau} dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^1 [\varphi'(u_0(t))h(t) + o(1)] dt = \int_0^1 \varphi'(u_0(t))h(t)dt. \end{aligned}$$

Zobrazení $h \mapsto \int_0^1 \varphi'(u_0(t))h(t)dt$ je lineární zobrazení prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$ do $\mathbb{R}$. Vzhledem ke spojitosti derivace φ' je toto zobrazení též spojitým zobrazením pro libovolné $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$. Existuje tedy i Gâteauxova derivace v libovolném $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$. $\square$

Příklad 5.4 Nechť K je spojitá funkce na čtverci $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Nechť funkce $g = g(\tau, \xi)$ je spojitá na množině $\langle 0, 1 \rangle \times \mathbb{R}$ a má na této množině stejnoměrně spojitou derivaci podle druhé proměnné ξ . Vypočtěte Gâteauxovu derivaci zobrazení $T : C(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow C(\langle 0, 1 \rangle)$ definovaného předpisem

$$(Tu)(t) = \int_0^1 K(t, \tau)g(\tau, u(\tau))d\tau$$

(T se nazývá *Hammersteinovým integrálním operátorem*).

Zvolme pevně prvek $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$. Potom pro $h \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ dostáváme

$$\begin{aligned} \delta T(u_0, h) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{T(u_0 + \eta h) - T(u_0)}{\eta} = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 K(t, \tau) [g(\tau, u_0(\tau) + \eta h(\tau)) - g(\tau, u_0(\tau))] d\tau}{\eta} = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 K(t, \tau) \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}(\tau, u_0(\tau)) \eta h(\tau) + o(\eta) \right] d\tau}{\eta} = \\ &= \int_0^1 K(t, \tau) \frac{\partial g}{\partial \xi}(\tau, u_0(\tau)) h(\tau) d\tau . \end{aligned}$$

Ověřte sami, že pro každé pevné $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ je

$$h \mapsto \int_0^1 K(t, \tau) \frac{\partial g}{\partial \xi}(\tau, u_0(\tau)) h(\tau) d\tau$$

spojitým lineárním zobrazením prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$ do sebe. Odtud již plyne, že $DT(u_0)h = \delta T(u_0, h)$ je Gâteauxova derivace. $\square$

Příklad 5.5 Vypočtěte Gâteauxův diferenciál zobrazení

$$f : u \mapsto \int_0^1 \left[\int_0^t u^3(\tau) d\tau \right]^4 dt, \quad u \in C(\langle 0, 1 \rangle) .$$

Podle definice 5.1 je

$$\delta f(u_0, h) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 \left[\int_0^t (u_0(\tau) + \eta h(\tau))^3 d\tau \right]^4 dt - \int_0^1 \left[\int_0^t u_0^3(\tau) d\tau \right]^4 dt}{\eta} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 \left[\int_0^t (u_0^3(\tau) + 3u_0^2(\tau)h(\tau)\eta + o(\eta)) d\tau \right]^4 dt - \int_0^1 \left[\int_0^t u_0^3(\tau) d\tau \right]^4 dt}{\eta} = \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 12 \left[\int_0^t u_0^3(\tau) d\tau \right]^3 \eta \left[\int_0^t u_0^2(\tau)h(\tau) d\tau \right] dt + o(\eta)}{\eta} = \\
&= 12 \int_0^1 \left[\int_0^t u_0^3(\tau) d\tau \right]^3 \left[\int_0^t u_0^2(\tau)h(\tau) d\tau \right] dt .
\end{aligned}$$

Pro každé pevné $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ je $\delta f(u_0, h)$ spojitě lineární zobrazení z $C(\langle 0, 1 \rangle)$ do sebe, tj. $\delta f(u_0, h)$ je Gâteauxova derivace (zdůvodněte podrobně!). □

Příklad 5.6 Vypočtěte Gâteauxovu derivaci zobrazení

$$g : u \mapsto \int_0^1 (u'(t))^2 dt, \quad u \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) .$$

Podle definice 5.1 je

$$\begin{aligned}
\delta g(u_0, h) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 [(u_0(t) + \tau h(t))']^2 dt - \int_0^1 (u_0'(t))^2 dt}{\tau} = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^1 u_0'(t)h'(t)\tau dt + o(\tau)}{\tau} = \\
&= 2 \int_0^1 u_0'(t)h'(t)dt .
\end{aligned}$$

Ověřte, že Gâteauxova derivace existuje ve všech „bodech“ $u_0 \in C^1(\langle 0, 1 \rangle)$. □

Příklad 5.7 Uvažujme zobrazení

$$f : u \mapsto \left(\int_0^t u(\tau) d\tau \right)^2, \quad u \in C(\langle 0, 1 \rangle), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle .$$

Podle definice 5.1 můžeme formálně psát

$$\begin{aligned}
\delta f(u_0, h) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^t (u_0(\tau) + \eta h(\tau)) d\tau \right)^2 - \left(\int_0^t u_0(\tau) d\tau \right)^2}{\eta} = \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^t u_0(\tau) d\tau \cdot \int_0^t \eta h(\tau) d\tau + \left(\int_0^t \eta h(\tau) d\tau \right)^2}{\eta} =
\end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^t u_0(\tau) d\tau \cdot \int_0^t h(\tau) d\tau .$$

Ukažte, že $\delta f(u_0, h)$ je spojitě lineární zobrazení (pro pevné $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$) z prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$ do prostoru $C^1(\langle 0, 1 \rangle)$. Zobrazení $f : C(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow C^1(\langle 0, 1 \rangle)$ tedy má Gâteauxovu derivaci.

□

5.2 Fréchetův (totální) diferenciál

Derivaci funkce jedné reálné proměnné v bodě můžeme interpretovat geometricky jako směrnici tečny ke grafu této funkce. Přeneseme-li tuto interpretaci na funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dojdeme k pojmu tečné roviny ke grafu funkce dvou proměnných: Každá rovina procházející bodem $(a, b, f(a, b)) \in \mathbb{R}^3$, která není kolmá na rovinu $z = 0$, má rovnici $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$. Její „směr“ je tedy dán lineárním zobrazením $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, které je definováno takto:

$$\varphi(h, k) = Ah + Bk .$$

Ze všech těchto rovin je tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě (a, b) ta rovina, pro níž

$$|f(x, y) - f(a, b) - \varphi(x - a, y - b)| = o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right) , \quad (x, y) \rightarrow (a, b) .$$

Z předmětu Matematická analýza II ([8]) víme, že zobrazení φ se nazývá *totálním diferenciálem* funkce f v bodě (a, b) .

Při této interpretaci můžeme snadno přenést pojem totálního diferenciálu na zobrazení $f : X \rightarrow Y$, kde X a Y jsou normované lineární prostory.

Následující definice, kterou formuloval poprvé v roce 1925 francouzský matematik M.FRÉCHET, je zobecněním výše uvedeného pojmu pro zobrazení $f : X \rightarrow Y$.

Definice 5.3 Nechtě X, Y jsou normované lineární prostory. Nechtě zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je definováno na okolí bodu $u_0 \in X$. Řekneme, že zobrazení f má v bodě $u_0 \in X$ *Fréchetův (totální) diferenciál*, jestliže existuje spojitě lineární zobrazení $f'(u_0) : X \rightarrow Y$ tak, že

$$(5.2) \quad \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\|f(u) - f(u_0) - f'(u_0)(u - u_0)\|_Y}{\|u - u_0\|_X} = 0 .$$

Zobrazení $f'(u_0)$ se též nazývá *Fréchetova (silná) derivace* v bodě u_0 .

Poznámka Z existence Fréchetovy derivace již vyplývá jednoznačnost zobrazení $f'(u_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ (prostor všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y - viz [1]) s vlastností (5.2) a spojitost zobrazení f v bodě $u_0 \in X$. (Ukažte podrobně!) Poznamenejme, že výraz (5.2) můžeme též zapsat v ekvivalentním tvaru

$$f(u_0 + h) - f(u_0) = f'(u_0)h + \omega(h) ,$$

kde $\|\omega(h)\|_Y = o(\|h\|_X)$ pro $\|h\|_X \rightarrow 0$.

Poznámka Z existence Fréchetovy derivace $f'(u_0)$ pro $h \neq 0$ vyplývá:

$$\left\| \frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t} - f'(u_0)h \right\|_Y = \frac{\|f(u_0 + th) - f(u_0) - f'(u_0)th\|_Y}{\|th\|_X} \|h\|_X \rightarrow 0$$

pro $t \rightarrow 0$. Odtud plyne existence Gâteauxova diferenciálu δf a Gâteauxovy derivace Df a rovnost

$$f'(u_0)h = Df(u_0)h = \delta f(u_0, h) .$$

Příklad 5.8 Nechť $f \in C^1(\mathbb{R})$. Uvažujme zobrazení $F : C(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow C(\langle 0, 1 \rangle)$ definované předpisem

$$F : u \mapsto f \circ u , \quad \text{tj.} \quad F(u)(t) = f(u(t)), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle .$$

Ukažte, že pro $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ je $F'(u_0)h = f'(u_0)h$ Fréchetova derivace zobrazení F , tj.

$$\|f(u_0 + h) - f(u_0) - f'(u_0)h\| = o(\|h\|) .$$

Využijte toho, že $f \in C^1(\mathbb{R})$.

□

Protože je zpravidla důkaz existence Gâteauxovy derivace snazší než důkaz existence Fréchetovy derivace, má význam následující postačující podmínka, která udává, kdy je Gâteauxova derivace již Fréchetovou derivací.

Věta 5.1 Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a pro zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je Gâteauxova derivace $Df : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ spojitě zobrazení v bodě u_0 . Pak zobrazení f má v bodě u_0 Fréchetův diferenciál a je $f'(u_0) = Df(u_0)$.

Poznámka Budeme používat následující konvenci: Výrok f má na množině G Fréchetův diferenciál znamená, že $f'(u_0)$ existuje pro každý prvek $u_0 \in G$. Fréchetovu derivaci f' na množině G pak chápeme jako zobrazení z G do $\mathcal{L}(X, Y)$.

Důsledek Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a pro $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení Df spojitě na otevřené množině $G \subset X$. Pak zobrazení f má na G Fréchetův diferenciál a Fréchetova derivace f' je spojitým zobrazením z G do $\mathcal{L}(X, Y)$.

Definice 5.4 Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a G je otevřená podmnožina prostoru X . Pak $C^1(G)$ je množina všech zobrazení $f : X \rightarrow Y$, jejichž Fréchetova derivace f' je spojitá na množině G (jakožto zobrazení $G \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$). Množinu $C^1(G)$ nazýváme množinou všech *spojitě diferencovatelných zobrazení* na G .

Poznámka Uvědomte si, že výrok $f \in C^1(G)$ je totéž jako výrok f má *spojitou Gâteauxovu derivaci* na množině G .

Poznámka Množina $C^1(G)$ je lineární prostor (ověřte!).

Věta 5.2 (Diferenciál složené funkce) *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory. Dále nechť $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $u_0 \in X$ derivaci ve směru η , a nechť zobrazení $g : Y \rightarrow Z$ má Fréchetův diferenciál v bodě $v_0 = f(u_0) \in Y$. Pak zobrazení $h = g \circ f$ má v bodě u_0 derivaci ve směru η a platí*

$$\delta h(u_0, \eta) = g'(f(u_0)) \circ \delta f(u_0, \eta) .$$

Důkaz tohoto tvrzení je principiálně stejný jako důkaz analogického tvrzení v prostorech konečné dimenze (viz např. [2]).

Poznámka Jestliže navíc k předpokladům věty 5.2 má zobrazení f v bodě u_0 Gâteauxovu derivaci (resp. Fréchetův diferenciál), platí

$$Dh(u_0) = g'(f(u_0)) \circ Df(u_0) \text{ (resp. } h'(u_0) = g'(f(u_0)) \circ f'(u_0)) .$$

Uvažujme následující situaci. Předpokládejme, že zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je třídy C^1 na otevřené množině $G \subset X$ (tj. $f \in C^1(G)$) a nechť

$$X = X_1 \times X_2 ,$$

kde X_i , $i = 1, 2$, jsou normované lineární prostory. Pro $(a_1, a_2) \in G$ můžeme studovat zobrazení

$$f(., a_2) : u_1 \mapsto f(u_1, a_2) ,$$

$$f(a_1, .) : u_2 \mapsto f(a_1, u_2) .$$

Tato zobrazení mají spojitou Fréchetovu derivaci na okolí bodu a_1 (resp. bodu a_2), neboť například první z nich vznikne složením zobrazení f a zobrazení $u_1 \mapsto (u_1, a_2)$. Fréchetovu derivaci prvního (druhého) zobrazení v bodě a_1 (v bodě a_2) budeme značit $f'_1(a_1, a_2)$ ($f'_2(a_1, a_2)$) a nazývat *parciální Fréchetovou derivací* podle první (druhé) proměnné.

Následující věta je opět analogií tvrzení, které známe z prostorů konečné dimenze.

Věta 5.3 *Nechť X_1, X_2, Y jsou normované lineární prostory. Nechť zobrazení*

$$f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$$

je spojitě na otevřené množině $G \subset X_1 \times X_2$. Pak $f \in C^1(G)$ právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:

- (i) *V každém bodě $(a_1, a_2) \in G$ existují parciální Fréchetovy derivace $f'_1(a_1, a_2)$, $f'_2(a_1, a_2)$.*
- (ii) *Zobrazení $(a_1, a_2) \mapsto f'_1(a_1, a_2)$, $(a_1, a_2) \mapsto f'_2(a_1, a_2)$ jsou spojitá na množině G (hodnoty těchto zobrazení jsou prvky prostorů $\mathcal{L}(X_1, Y)$ a $\mathcal{L}(X_2, Y)$).*

Jestliže jsou tyto dvě podmínky splněny, pak pro každé $(a_1, a_2) \in G$ a $(h_1, h_2) \in X_1 \times X_2$ platí

$$f'(a_1, a_2)(h_1, h_2) = f'_1(a_1, a_2)h_1 + f'_2(a_1, a_2)h_2 .$$

Poznámka Tvrzení věty 5.3 lze zobecnit na kartézský součin libovolného konečného počtu prostorů.

Příklad 5.9 Předpokládejme, že $f = f(x, y, z)$ má spojité parciální derivace na množině $\langle a, b \rangle \times \mathbb{R}^2$. Pro $u \in C^1(\langle a, b \rangle)$ položme

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx .$$

Pro každé $u \in C^1(\langle a, b \rangle)$ existuje Fréchetova derivace zobrazení F a platí

$$F'(u)h = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) h'(x) \right] dx$$

(zdůvodněte podrobně!).

□

Příklad 5.10 Uvažujme Hammersteinův integrální operátor z příkladu 5.4:

$$(5.3) \quad (Tu)(t) = \int_0^1 K(t, \tau)g(\tau, u(\tau))d\tau .$$

Vzhledem k předpokladům na K a g (stejněměrná spojitost parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial \xi}$) je Gâteauxova derivace $DT(u)$ spojitá na $C(\langle 0, 1 \rangle)$. Na základě důsledku věty 5.1 má tedy operátor (5.3) Fréchetovu derivaci v každém bodě $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ a platí

$$T'(u_0)h = \int_0^1 K(t, \tau) \frac{\partial g}{\partial \xi}(\tau, u_0(\tau))h(\tau)d\tau .$$

□

5.3 Některá zobecnění

Z předmětu Matematická analýza V víme, že je-li g absolutně spojitá funkce na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a $g' \in L^1(0, 1)$, pak platí

$$(5.4) \quad g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)dt , \quad x \in \langle 0, 1 \rangle .$$

Na základě tohoto tvrzení můžeme vzorec (5.4) zobecnit pro zobrazení $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kde X je normovaný lineární prostor, a to následujícím způsobem.

Předpokládejme, že f má na úsečce spojující body $a, a + h \in X$ spojitou derivaci ve směru h , tj. pro $g : t \mapsto f(a + th)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, je

$$g' : t \mapsto \delta f(a + th, h)$$

spojitá funkce na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pak je podle (5.4) platné následující vyjádření

$$f(a + h) - f(a) = \int_0^1 \delta f(a + th, h) dt .$$

Pro zobrazení $f : X \rightarrow Y$ (kde Y je také normovaný lineární prostor) však rozdíl

$$f(a + h) - f(a)$$

tímto způsobem vyjádřit *nelze*. Musíme tedy přejít k takové definici integrálu, která umožní integrovat zobrazení s hodnotami v normovaném lineárním prostoru.

Definice 5.5 Nechť $f : \langle a, b \rangle \rightarrow Y$, kde Y je Banachův prostor. Prvek $y \in Y$ nazveme *Riemannovým-Gravesovým integrálem* zobrazení f v mezích od a do b (značíme jej $\int_a^b f dt$), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna dělení

$$D = \{t_0, \dots, t_n \in \langle a, b \rangle; a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

intervalu $\langle a, b \rangle$, pro které je

$$\nu(D) = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}) < \delta ,$$

a pro každé $\vartheta_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, platí

$$\|y - \underbrace{\sum_{i=1}^n f(\vartheta_i)(t_i - t_{i-1})}_{S(D)}\| < \varepsilon .$$

Poznámka Pro funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splývá Riemannův-Gravesův integrál s Riemannovým integrálem.

Věta 5.4 Nechť Y je Banachův prostor, $f : \langle a, b \rangle \rightarrow Y$ je spojitě zobrazení na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak existuje $\int_a^b f dt$.

Důkaz Protože f je spojitě zobrazení na uzavřeném omezeném intervalu, je také stejnoměrně spojitě. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $t, \tau \in \langle a, b \rangle$, $|t - \tau| < \delta$, je $\|f(t) - f(\tau)\| < \varepsilon$. Nechť dělení D má dělicí body $a = t_0 < \dots < t_n = b$, $\nu(D) < \delta$,

dělení $\tilde{D}$ je zjemněním dělení D a pro určitost má dělicí body $t_{i-1} = \tau_0^{(i)} < \dots < \tau_{k(i)}^{(i)} = t_i$, $i = 1, \dots, n$. Pak

$$\begin{aligned} \|S(D) - S(\tilde{D})\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k(i)} [f(\vartheta_i) - f(\eta_j^{(i)})] (\tau_j^{(i)} - \tau_{j-1}^{(i)}) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k(i)} \|f(\vartheta_i) - f(\eta_j^{(i)})\| (\tau_j^{(i)} - \tau_{j-1}^{(i)}) < \varepsilon (b-a) . \end{aligned}$$

Označíme-li nyní D_n dělení s dělicími body $t_i = a + i \frac{b-a}{2^n}$, $i = 0, \dots, 2^n$, je podle předcházejícího odhadu posloupnost $\{S(D_n)\}$, kde

$$S(D_n) = \sum_{i=1}^{2^n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) ,$$

cauchyovská v Y . Protože Y je *Banachův prostor*, existuje

$$y = \lim S(D_n) .$$

Zároveň však platí

$$\|y - S(D)\| \leq \|y - S(D_n)\| + \|S(D_n) - S(D \cup D_n)\| + \|S(D \cup D_n) - S(D)\| < 3\varepsilon(b-a)$$

pro všechna dostatečně velká n , což dokazuje rovnost

$$y = \int_a^b f dt .$$

■

Věta 5.5 *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor. Jestliže zobrazení $f : X \rightarrow Y$ má derivaci ve směru $b-a$ v každém bodě úsečky spojující body $a, b \in X$ a zobrazení $u \mapsto \delta f(u, b-a)$ je spojitě na této úsečce (vzhledem k této úsečce), pak*

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \delta f(a + t(b-a), b-a) dt .$$

Princip důkazu Zobrazení

$$g : t \mapsto \delta f(a + t(b-a), b-a), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle ,$$

je spojitě, takže podle předcházející věty 5.4 *existuje*

$$y = \int_0^1 \delta f(a + t(b-a), b-a) dt .$$

Na základě stejnoměrné spojitosti g se ukáže, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ je

$$\|y - [f(b) - f(a)]\| < \varepsilon .$$

■

Důsledek Necht X a Y jsou prostory jako ve větě 5.5 a $f : X \rightarrow Y$ je třídy C^1 na otevřené konverzní množině $G \in X$.

(i) Pak pro $a, b \in G$ platí

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{t \in (0,1)} \|f'(a + t(b - a))\| .$$

(ii) Jestliže navíc je $\sup_{u \in G} \|f'(u)\| \leq K$, pak f splňuje Lipschitzovu podmínku na G , tj. pro $a, b \in G$ platí

$$\|f(b) - f(a)\| \leq K\|b - a\| .$$

Předpokládejme, že zobrazení $f : X \rightarrow Y$ má Fréchetovu derivaci v otevřené množině $G \subset X$. Pak $f' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ a můžeme definovat *druhou* Fréchetovu derivaci jako Fréchetovu derivaci zobrazení f' v bodě $a \in G$, tj. jako prvek prostoru $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$. Při definici n -té Fréchetovy derivace bychom však museli pracovat s poměrně složitým prostorem, jehož struktura by byla značně "neprůhledná": např. pro $n = 3$ jde o prostor

$$\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))) .$$

Proto je vhodné provést formální ztotožnění takových prostorů s prostory tzv. multilineárních zobrazení, jejichž struktura je zřejmá.

Definice 5.6 Necht $X_1, \dots, X_n, Y$ jsou normované lineární prostory. Zobrazení

$$T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$$

nazýváme *multilineárním zobrazením* (nebo též *n -lineárním zobrazením*), jestliže T je lineární v každé proměnné:

$$T(u_1, \dots, \alpha u_i + \beta u_i^*, \dots, u_n) = \alpha T(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) + \beta T(u_1, \dots, u_i^*, \dots, u_n)$$

pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $u_i, u_i^* \in X_i$, $i = 1, \dots, n$. Multilineární zobrazení nazýváme *spojitým*, jestliže zobrazení T je navíc spojitě v každém bodě $(u_1, \dots, u_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$. Množinu všech spojitých multilineárních zobrazení $X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ označíme jako $N(X_1, \dots, X_n, Y)$ a v případě, že $X_i = X$, $i = 1, \dots, n$, jako $N_n(X, Y)$. Je-li $n = 2$, píše se často $B(X_1, X_2, Y)$ místo $N(X_1, X_2, Y)$, neboť se jedná o *bilineární zobrazení*.

Poznámka $N(X_1, \dots, X_n, Y)$ je lineární prostor. Přesvědčte se o tom!

Lemma 5.1 Necht $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$ jsou normované lineární prostory. Pak multilineární zobrazení $T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ je spojitě, právě když existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $(u_1, \dots, u_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ platí

$$(5.5) \quad \|T(u_1, \dots, u_n)\|_Y \leq K\|u_1\|_{X_1} \dots \|u_n\|_{X_n} .$$

Důkaz Důkaz provedeme pouze pro $n = 2$.

(i) Postačitelnost: Zvolme $(v_1, v_2) \in X_1 \times X_2$. Potom

$$\begin{aligned} \|T(u_1, u_2) - T(v_1, v_2)\|_Y &\leq \|T(u_1 - v_1, u_2)\|_Y + \|T(v_1, u_2 - v_2)\|_Y \leq \\ &\leq K [\|u_1 - v_1\|_{X_1} \|u_2\|_{X_2} + \|v_1\|_{X_1} \|u_2 - v_2\|_{X_2}] < K\delta [\|v_2\|_{X_2} + \delta + \|v_1\|_{X_1}] \end{aligned}$$

pro $\|u_1 - v_1\|_{X_1} < \delta$, $\|u_2 - v_2\|_{X_2} < \delta$. Poznamenejme, že jsme v poslední nerovnosti využili toho, že platí

$$\|u_2\|_{X_2} = \|u_2 - v_2\|_{X_2} + \|v_2\|_{X_2} \leq \delta + \|v_2\|_{X_2}.$$

(ii) Nutnost: Nechť T je spojitý v bodě (o_1, o_2) . (Proč stačí uvažovat tento případ? Zdůvodněte!) Potom pro $\|u_1\|_{X_1} \leq \delta$, $\|u_2\|_{X_2} \leq \delta$ platí

$$\|T(u_1, u_2)\|_Y \leq 1,$$

je-li $\delta > 0$ dostatečně malé. Nechť nyní $u_1 \in X_1 \setminus \{o_1\}$, $u_2 \in X_2 \setminus \{o_2\}$ jsou libovolné prvky, potom

$$\|T(u_1, u_2)\|_Y = \frac{\|u_1\|_{X_1} \|u_2\|_{X_2}}{\delta^2} \|T(\frac{\delta}{\|u_1\|_{X_1}} u_1, \frac{\delta}{\|u_2\|_{X_2}} u_2)\|_Y \leq \frac{1}{\delta^2} \|u_1\|_{X_1} \|u_2\|_{X_2}.$$

■

Poznámka Pro $T \in N(X_1, \dots, X_n, Y)$ je

$$\|T\| = \inf\{K; K \text{ má vlastnost (5.5)}\}$$

normou na lineárním prostoru $N(X_1, \dots, X_n, Y)$. Zřejmě platí

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|u_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|T(u_1, \dots, u_n)\|_Y.$$

(Zdůvodněte!)

Lemma 5.2 *Nechť X_1, X_2, Y jsou normované lineární prostory. Pro $T \in B(X_1, X_2, Y)$ a $u_1 \in X_1$ označme*

$$T_{u_1} : u_2 \mapsto T(u_1, u_2), \quad u_2 \in X_2.$$

Pak

- (i) $\tilde{T} : u_1 \mapsto T_{u_1}$, $u_1 \in X_1$, je spojitý lineární zobrazení prostoru X_1 do prostoru $\mathcal{L}(X_2, Y)$;
- (ii) zobrazení $T \mapsto \tilde{T}$ je lineární izometrické zobrazení prostoru $B(X_1, X_2, Y)$ na prostor $\mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y))$.

Důkaz Ad (i). Pro každé $u_1 \in X_1$ platí

$$\|T_{u_1}(u_2)\| = \|T(u_1, u_2)\| \leq \|T\| \|u_1\| \|u_2\| ,$$

tj. $T_{u_1} \in \mathcal{L}(X_2, Y)$ pro každé $u_1 \in X_1$. Z výše uvedené nerovnosti vyplývá, že

$$\|T_{u_1}\| \leq \|T\| \|u_1\| ,$$

a tedy platí

$$(5.6) \quad \|\tilde{T}\| \leq \|T\| .$$

Protože $\tilde{T}$ je zobrazení lineární, je tvrzení (i) dokázáno.

Ad (ii). Na druhou stranu pro libovolné $u_i \in X_i$, $\|u_i\| = 1$, $i = 1, 2$, je

$$\|T(u_1, u_2)\| \leq \|T_{u_1}\| \leq \|\tilde{T}\| ,$$

tj. $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$, což spolu s (5.6) znamená, že $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. Zbývá tedy ukázat, že zobrazení

$$T \mapsto \tilde{T}$$

je zobrazení na prostor $\mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y))$. Zvolme tedy $V \in \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y))$ a pro $(u_1, u_2) \in X_1 \times X_2$ položme

$$T(u_1, u_2) = V(u_1)u_2 .$$

Potom T je bilineární zobrazení (zdůvodněte!), podle lemmatu 5.1 je spojitý a

$$T_{u_1} = V(u_1) .$$

Platí tedy $\tilde{T} = V$. ■

Důsledek Prostory $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ a $B_2(X, Y) = B(X, X, Y)$ lze formálně ztotožnit.

Poznámka Tvrzení lemmatu 5.2 lze indukci zobecnit pro multilineární zobrazení s $n > 2$.

Definice 5.7 Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $f : X \rightarrow Y$. Řekneme, že zobrazení f má v bodě $u_0 \in X$ *druhý Fréchetův diferenciál*, jestliže f' existuje v okolí bodu u_0 a existuje zobrazení $f''(u_0) \in B_2(X, Y)$ tak, že platí

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f'(u_0 + h) - f'(u_0) - f''(u_0)(h, \cdot)\|_{\mathcal{L}(X, Y)}}{\|h\|_X} = 0$$

Zobrazení $f''(u_0)$ nazýváme *druhou Fréchetovou derivací* zobrazení f v bodě u_0 ; je tedy

$$f''(u_0)(h, \cdot) : k \mapsto f''(u_0)(h, k), \quad k \in X .$$

Řekneme, že zobrazení f je prvkem $C^2(G)$ pro otevřenou množinu $G \subset X$, jestliže f'' je na G spojitý zobrazení prostoru X do $B_2(X, Y)$.

Analogicky definujeme *n-tou Fréchetovu derivaci* $f^{(n)}(u_0)$ a lineární prostor $C^n(G)$. Dále označíme $C^\infty(G) = \cap_{n=1}^\infty C^n(G)$.

Věta 5.6 *Nechť pro $f : X \rightarrow Y$ existuje druhá Fréchetova derivace $f''(u_0)$. Pak pro $h, k \in X$ je*

$$f''(u_0)(h, k) = f''(u_0)(k, h) .$$

Důkaz tohoto tvrzení je analogický klasickému důkazu o záměnnosti parciálních derivací druhého řádu (viz např. [2]).

■

Poznámka Předcházející větu je možné zobecnit indukcí tak, že za předpokladu existence n -té Fréchetovy derivace zobrazení $f : X \rightarrow Y$ v bodě $u_0 \in X$ je n -lineární zobrazení $f^{(n)}(u_0)$ symetrické vzhledem ke svým proměnným.

Příklad 5.11 Uvažujme zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} ,$$

které je definováno v jistém okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Je-li $e_1^{(m)}, e_2^{(m)}, \dots, e_m^{(m)}$ standardní báze v $\mathbb{R}^m$, pak zřejmě

$$\delta f(a, e_j^{(m)}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) .$$

(Zdůvodněte!). Uvažujme nyní obecnější zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

a označme $e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}$ standardní bázi v prostoru $\mathbb{R}^n$. Píšeme-li

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) ,$$

tj. $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i^{(n)}$ pro $x \in \mathcal{D}(f)$, dostáváme

$$\delta f(a, e_j^{(m)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) e_i^{(n)} .$$

(Zdůvodněte!) Je-li zobrazení $h \mapsto \delta f(a, h)$ lineární, tvoří *Jacobiova matice*

$$(5.7) \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

maticovou reprezentaci tohoto zobrazení vzhledem ke standardním bázím. Má-li zobrazení f totální diferenciál (tj. Fréchetovu derivaci), je opět Jacobiova matice (5.7) jeho maticovou reprezentací a je zřejmé, že se jedná o *lineární zobrazení* z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$.

□

Příklad 5.12 Uvažujme opět zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

a předpokládejme, že f má v okolí U bodu a parciální derivace. Buď $h \in \mathbb{R}^m$ a t dostatečně malé a zapišme rozdíl $f(a + th) - f(a)$ ve tvaru

$$\sum_{j=1}^m [f(a_1 + th_1, \dots, a_j + th_j, a_{j+1}, \dots, a_m) - f(a_1 + th_1, \dots, a_{j-1} + th_{j-1}, a_j, \dots, a_m)] .$$

Protože na každý ze sčítanců lze použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě, existují body $v_j \in (0, 1)$, $j = 1, \dots, m$, pro které

$$f(a + th) - f(a) = t \sum_{j=1}^m h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1 + th_1, \dots, a_{j-1} + th_{j-1}, a_j + v_j h_j, a_{j+1}, \dots, a_m) .$$

Jsou-li parciální derivace funkce f spojité v bodě a , vyplývá z předcházejícího vyjádření, že

$$\delta f(a, h) = \sum_{j=1}^m h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) .$$

(Zdůvodněte podrobně!) Analogicky pro zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ je

$$\delta f(a, h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) e_i^{(n)} .$$

Vyplývá tedy odtud, že spojitost parciálních derivací zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ v bodě $a \in \mathbb{R}^m$ je postačující podmínkou pro existenci Gâteauxovy derivace zobrazení f v bodě a . $\square$

Poznámka Dá se ukázat, že spojitost parciálních derivací zobrazení f v bodě a zaručuje dokonce existenci Fréchetovy derivace zobrazení f v bodě a .

Příklad 5.13 Uvažujme zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} .$$

Za předpokladu existence druhého diferenciálu $f''(a)$ je $f''(a)$ bilineární forma na prostoru $\mathbb{R}^m$: Pro

$$h = \sum_{i=1}^m h_i e_i, \quad k = \sum_{j=1}^m k_j e_j$$

je

$$f''(a)(h, k) = \sum_{i,j=1}^m h_i k_j f''(a)(e_i, e_j) .$$

Matici $(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$, kde $\alpha_{ij} = f''(a)(e_i, e_j)$, nazveme *reprezentací* bilineární formy $f''(a)$ ve standardní bázi. Pro nalezení hodnot α_{ij} uvažujme v prostoru $\mathbb{R}^m$ normu $\|h\| = \max_{i=1,\dots,m} |h_i|$.

Potom

$$\begin{aligned} & \|f'(a+h) - f'(a) - f''(a)(h, \cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})} = \\ & = \max_{j=1,\dots,m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} h_i \right| = o(\|h\|) \quad \text{pro } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

To je ekvivalentní s tím, že

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} h_i \right|}{\|h\|} = 0,$$

$j = 1, \dots, m$, neboli s tím, že derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, m$, mají totální diferenciál (tj. Fréchetovu derivaci) v bodě a . Odtud dále vyplývá, že

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

(Zdůvodněte!) Reprezentací druhé Fréchetovy derivace $f''(a)$ ve standardní bázi je *Hessova matice*

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,m}.$$

Zároveň z uvedených výsledků vyplývá, že $f \in C^n(G)$ pro otevřenou podmnožinu $G \subset \mathbb{R}^m$ právě tehdy, když parciální derivace n -tého řádu jsou na množině G spojité. □

Analogicky jako jsme definovali n -tou Fréchetovu derivaci, můžeme definovat vyšší derivaci ve směru či Gâteauxovy derivace vyšších řádů.

Definice 5.8 Necht X, Y jsou normované lineární prostory, $f : X \rightarrow Y$, $u_0 \in X$.

- (i) Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ a $(h_1, \dots, h_n) \in X \times \dots \times X$ existuje v bodě $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ parciální derivace

$$\frac{\partial^n f(u_0 + \sum_{i=1}^n t_i h_i)}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n},$$

pak hodnotu této derivace nazýváme *n -tou derivací zobrazení f v bodě u_0 ve směru $(h_1, \dots, h_n)$* a značíme $\delta^n f(u_0; h_1, \dots, h_n)$.

- (ii) Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $(h_1, \dots, h_n) \in X \times \dots \times X$ existuje $\delta^n f(u_0; h_1, \dots, h_n)$ a zobrazení

$$(h_1, \dots, h_n) \mapsto \delta^n f(u_0; h_1, \dots, h_n)$$

je spojité n -lineární zobrazení z $X \times \dots \times X$ do Y , pak toto zobrazení nazýváme *n -tou Gâteauxovou derivací f v bodě u_0* a značíme $D^n f(u_0)$.

Poznámka Pomocí pojmu n -té Gâteauxovy derivace můžeme zobecnit Taylorův rozvoj následujícím způsobem: Je-li X normovaný lineární prostor, Y Banachův prostor, $u_0, h \in X$ a f má tu vlastnost, že zobrazení $u \mapsto \delta^n f(u; h_1, \dots, h_n)$ je spojitě v každém bodě úsečky spojující body $u_0, u_0 + h$ (vzhledem k této úsečce), pak platí

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \delta^k f(u_0; \underbrace{h, \dots, h}_{k\text{-krát}}) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^n f(u_0 + th; \underbrace{h, \dots, h}_{n\text{-krát}}) dt .$$

Důkaz se provádí indukcí na základě Taylorova rozvoje funkce jedné reálné proměnné.

Příklad 5.14 Vypočtěte Fréchetovy derivace všech řádů zobrazení

$$f : u \mapsto \int_0^1 s^3 u^5(s) ds , \quad u \in C(\langle 0, 1 \rangle) .$$

První Fréchetova derivace:

$$f'(u_0)h = 5 \int_0^1 s^3 u_0^4(s) h(s) ds .$$

Druhá Fréchetova derivace:

$$f''(u_0)(h_1, h_2) = 20 \int_0^1 s^3 u_0^3(s) h_1(s) h_2(s) ds .$$

Pátá Fréchetova derivace:

$$f^{(5)}(u_0)(h_1, \dots, h_5) = 5! \int_0^1 s^3 h_1(s) \dots h_5(s) ds .$$

Šestá Fréchetova derivace a Fréchetovy derivace vyššího řádu jsou identicky rovny nule (zdůvodněte!).

□

Cvičení 5.1 Nechť F je zobrazení z příkladu 5.9. Předpokládejme navíc, že funkce f má v $\langle a, b \rangle \times \mathbb{R}^2$ spojitě druhé parciální derivace. Dokažte, že pro libovolné $u_0 \in C(\langle a, b \rangle)$ existuje druhá Fréchetova derivace zobrazení F a platí

$$F''(u_0)(h, k) = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, u_0(x), u'_0(x)) h'(x) k'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, u_0(x), u'_0(x)) (h(x) k'(x) + h'(x) k(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, u_0(x), u'_0(x)) h(x) k(x) \right] dx .$$

5.4 Lokální extrémy funkcionalů

V tomto odstavci se budeme zabývat *funkcionály* (obecně *nelineárními*) z reálného normovaného lineárního prostoru X do $\mathbb{R}$. Naším cílem bude zobecnit pro tyto funkcionaly metody výpočtu lokálních extrémů pro funkce jedné reálné proměnné, s nimiž jsme se setkali v předmětu Matematická analýza I (viz [7]).

Definice 5.9 Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Říkáme, že funkcional

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

má v bodě u_0 *lokální minimum (maximum)*, jestliže existuje okolí U bodu u_0 takové, že pro $u \in U \setminus \{u_0\}$ je $f(u) \geq f(u_0)$ ($f(u) \leq f(u_0)$). V případě platnosti ostrých nerovností hovoříme o *ostrém lokálním minimu (maximu)*. Má-li funkcional v bodě u_0 lokální minimum nebo lokální maximum, říkáme, že má v bodě u_0 *lokální extrém*.

Platí následující důležité tvrzení.

Věta 5.7 (Eulerova nutná podmínka) *Nechť funkcional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $u_0 \in X$ lokální extrém. Jestliže pro $h \in X$ existuje derivace ve směru $\delta f(u_0, h)$, pak platí*

$$(5.8) \quad \delta f(u_0, h) = 0 .$$

Důkaz Pro funkci $g : t \mapsto f(u_0 + th)$ je $g'(0) = \delta f(u_0, h)$. Jestliže tedy $g'(0) \neq 0$ (tj. neplatí (5.8)), pak funkce g nemá v bodě 0 lokální extrém, a tedy ani funkcional f nemůže mít v bodě u_0 lokální extrém. ■

Poznámka Větu 5.7 nelze obrátit! Podmínka (5.8) je pouze nutnou, nikoliv postačující podmínkou existence extrému. Situace je analogická jako v konečné dimenzi (viz též následující příklad 5.15). Jestliže f je funkcional a $\delta f(u_0, h) = 0$ pro všechna $h \in X$, pak bod u_0 ještě nemusí být lokálním extrémem. Takový bod se nazývá *kritický bod* funkcionalu f .

Nyní uvedeme ještě jednu nutnou podmínku existence lokálního extrému. Požaduje sice existenci druhé derivace ve směru, ale zato je schopna "rozlišit", zda se jedná o lokální minimum nebo maximum.

Věta 5.8 (Lagrangeova nutná podmínka) *Nechť funkcional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $u_0 \in V$ lokální minimum (maximum). Jestliže pro $h \in X$ existuje druhá derivace ve směru $\delta^2 f(u_0; h, h)$, pak platí*

$$(5.9) \quad \delta^2 f(u_0; h, h) \geq 0 \quad (\delta^2 f(u_0; h, h) \leq 0) .$$

Důkaz Je-li g funkce z důkazu věty 5.7, pak $g''(0) = \delta^2 f(u_0; h, h)$ (zdůvodněte!). Nyní stačí použít nutné podmínky pro lokální extrém reálné funkce jedné reálné proměnné (provedte podrobně!). ■

Z teorie funkcí jedné reálné proměnné víme, že pouze s nutnými podmínkami existence extrémů nevystačíme. Následující tvrzení udává jednu z postačujících podmínek.

Věta 5.9 (Lagrangeova postačující podmínka) *Nechť X je reálný normovaný lineární prostor a bod $u_0 \in X$ je kritickým bodem funkcionálu $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť existuje okolí U bodu u_0 tak, že zobrazení $u \mapsto D^2 f(u)$ je spojitě na U .*

(i) *Jestliže existuje $\alpha > 0$ takové, že pro každé $h \in X$ je*

$$D^2 f(u_0)(h, h) \geq \alpha \|h\|^2 ,$$

pak f má v bodě u_0 ostré lokální minimum.

(ii) *Jestliže existuje $\alpha > 0$ takové, že pro každé $h \in X$ je*

$$D^2 f(u_0)(h, h) \leq -\alpha \|h\|^2 ,$$

pak f má v bodě u_0 ostré lokální maximum.

Důkaz Pro každé $h \in X$ takové, že $u_0 + h \in U$, má smysl Taylorův rozvoj funkcionálu f v bodě u_0 (viz poznámku za definicí 5.8):

$$(5.10) \quad f(u_0 + h) - f(u_0) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(u_0 + th)(h, h) dt .$$

(Zde volíme $n = 2$ a vzhledem k našim předpokladům je $\delta^2 f(u_0 + th; h, h) = D^2 f(u_0 + th)(h, h)$.) Z výrazu (5.10) vyplývá, že k důkazu tvrzení (i) stačí dokázat existenci $\delta > 0$ takového, že pro $0 < \|h\| < \delta$ je

$$(5.11) \quad D^2 f(u_0 + h)(h, h) > 0 .$$

Platí však

$$\begin{aligned} D^2 f(u_0 + h)(h, h) &\geq D^2 f(u_0)(h, h) - |D^2 f(u_0 + h)(h, h) - D^2 f(u_0)(h, h)| \geq \\ &\geq [\alpha - \|D^2 f(u_0 + h) - D^2 f(u_0)\|] \|h\|^2 . \end{aligned}$$

Vzhledem ke spojitosti druhé Gâteauxovy derivace $D^2 f(u)$ v okolí U je pro malé $\delta > 0$ (a tedy pro $\|h\|$ malé) hranatá závorka ostře větší než nula. Odtud již plyne (5.11) a tvrzení (i) je tedy dokázáno.

Tvrzení (ii) se dokáže zcela analogicky (zdůvodněte podrobně!).

■

Příklad 5.15 Uvažujme funkci

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} .$$

Jestliže má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^m$ všechny parciální derivace prvního řádu a lokální extrém, pak podle věty 5.7 platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0 .$$

Víme z předmětu Matematická analýza II ([8]), že v bodě $a \in \mathbb{R}^m$, ve kterém jsou všechny parciální derivace nulové, *může, ale nemusí* mít funkce f lokální extrém. Věta 5.9 v tomto případě doporučuje, za předpokladu spojitosti druhých parciálních derivací v okolí bodu a , sestavit kvadratickou formu

$$f''(a)(h, h) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j .$$

(Viz též příklad 5.13.) Vzhledem k tomu, že tato kvadratická forma je homogenní stupně 2 (vzhledem k h), stačí k důkazu toho, že f má v bodě a lokální minimum, zjistit, že existuje $\alpha > 0$ takové, že

$$f''(a)(h, h) \geq \alpha$$

pro $\|h\| = 1$ (zdůvodněte!). Protože jednotková koule v $\mathbb{R}^m$ je kompaktní, stačí k tomu ověřit, že

$$f''(a)(h, h) > 0 \text{ pro } \|h\| = 1$$

(zdůvodněte a uvědomte si, že toto by nestačilo, kdybychom místo $\mathbb{R}^m$ uvažovali normovaný lineární prostor X nekonečné dimenze!). V lineární algebře se dokazuje, že pro každou kvadratickou formu na prostoru $\mathbb{R}^m$ existuje báze $u_1, \dots, u_m$ prostoru $\mathbb{R}^m$ a čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

taková, že pro všechna $h = \sum_{i=1}^m \xi_i u_i$ je

$$\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i^2$$

(reprezentace kvadratické formy v diagonálním tvaru). Umíme-li tedy kvadratickou formu $f''(a)(h, h)$ převést na diagonální tvar, stačí zjistit znaménka čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Jsou-li například všechna kladná, má funkce f v bodě a ostré lokální minimum. V případě, že mezi nimi existuje alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné, nemá podle věty 5.8 funkce f v bodě a lokální extrém.

□

Příklad 5.16 Uvažujme konkrétní funkci

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

tvaru

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y) ,$$

pro $(x, y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. V této množině platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

právě tehdy, když

$$(x, y) = (0, 0), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right).$$

V bodě $(0, 0)$ dostáváme $f''(0, 0) = 0$ a postup uvedený v příkladu 5.15 nedává žádný výsledek. Snadno však zjistíme, že f mění v okolí bodu $(0, 0)$ znaménko (ověřte!), takže nemá v tomto bodě lokální extrém. Dále je

$$\begin{aligned} \left(f''\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)(h_1, h_2), (h_1, h_2)\right) &= -\sqrt{3}(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) = \\ &= -\sqrt{3}\left[\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{3h_2^2}{4}\right] < 0 \end{aligned}$$

pro $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ (zdůvodněte!) a tedy funkce f má v bodě $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ostré lokální maximum.

Analogicky zjistíme, že f má v bodě $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ ostré lokální minimum (zdůvodněte podrobně!).

□

Cvičení 5.2 Je-li funkcionál $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní na normovaném lineárním prostoru X , tj. platí-li pro každé dva body $u_1, u_2 \in X$ a pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$ nerovnost

$$f(tu_1 + (1-t)u_2) \leq tf(u_1) + (1-t)f(u_2),$$

potom každý kritický bod f je bodem minima f na X . Dokažte!

Návod: Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $f(o) = 0$ a $\delta f(o, h) = 0$ pro každé $h \in X$. Předpokládejme, že v bodě o nemá f minimum. Pak existuje $u \in X$, pro které $f(u) = \alpha < 0$. Z nerovnosti $f(tu + (1-t)o) \leq t\alpha$ (konvexita) plyne

$$\frac{f(tu) - f(o)}{t} \leq \alpha,$$

a tedy $\delta f(o, u) \leq \alpha < 0$, což je spor.

Příklad 5.17 Hledejme lokální extrémy funkcionálu

$$f(u) = \int_0^1 [u^2(t) + u(t)v(t) + w(t)] dt,$$

na prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$, kde $w(t)$ a $v(t)$ jsou zadané spojité funkce na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Platí

$$\delta f(u, h) = \int_0^1 [2u(t)h(t) + v(t)h(t)] dt$$

pro všechna $h \in C(\langle 0, 1 \rangle)$. Odtud vyplývá, že $\delta f(u, h) = 0$ pro všechna $h \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ právě tehdy, když $u(t) = -\frac{1}{2}v(t)$. Funkcionál f má tedy podle věty 5.7 právě jeden kritický bod

$$u_0(t) = -\frac{1}{2}v(t).$$

Druhá Fréchetova derivace funkcionálu f v tomto kritickém bodě u_0 existuje a platí

$$D^2 f(u_0)(h, h) = 2 \int_0^1 h^2(t) dt$$

pro každé $h \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ (zdůvodněte podrobně!). Platí tedy

$$(5.12) \quad D^2 f(u_0)(h, h) \geq 0$$

(a tedy také $\delta^2 f(u_0; h, h) \geq 0$) pro všechna $h \in C(\langle 0, 1 \rangle)$. Neplatí však

$$D^2 f(u_0)(h, h) \geq \alpha \|h\|^2$$

s žádným $\alpha > 0$! (Zdůvodněte!) Nemůžeme tedy použít větu 5.9. Funkcionál f je však konvexní, a tedy na základě předcházejícího cvičení je kritický bod u_0 bodem lokálního minima na $C(\langle 0, 1 \rangle)$. Zdůvodněte, proč tento bod je zároveň bodem absolutního minima na prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$!

□

Kapitola 6

Základní věty nelineární funkcionální analýzy

6.1 Věta o implicitní funkci

Předpokládejme, že f je reálná funkce dvou proměnných x, y a platí $f(x_0, y_0) = 0$. Klasická věta o implicitní funkci udává postačující podmínky, při kterých lze z rovnice $f(x, y) = 0$ v okolí bodu (x_0, y_0) vypočítat y jako funkci x . Ukážeme nyní, že analogická úloha se může vyskytnout i v prostorech nekonečné dimenze.

Příklad 6.1 Uvažujme počáteční úlohu

$$(6.1) \quad \frac{dy}{dt} = g(t, y), \quad y(0) = x,$$

kde $g, \frac{\partial g}{\partial y}$ jsou spojité funkce na množině $\langle 0, 1 \rangle \times \mathbb{R}$. Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic je známo, že úloha (6.1) je ekvivalentní s řešením integrální rovnice

$$(6.2) \quad f(x, y) = y(t) - x - \int_0^t g(\tau, y(\tau)) d\tau = 0.$$

Kdyby bylo $g(t, 0) = 0$ pro libovolné $t \in \langle 0, 1 \rangle$, pak $f(0, 0) = 0$ a úloha zjistit existenci řešení $y = y(t)$ rovnice (6.2) pro malé nenulové parametry $x \in \mathbb{R}$ připomíná klasickou větu o implicitní funkci. Zde však $y = y(t)$ patří do prostoru nekonečné dimenze!

□

Věta 6.1 (Věta o implicitní funkci) *Nechť X, Y, Z jsou Banachovy prostory a nechť zobrazení $f : X \times Y \rightarrow Z$ je spojitý v bodě $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Předpokládejme, že $f(x_0, y_0) = 0$ a že parciální Fréchetova derivace $f'_2(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z$ je spojitý izomorfismus prostoru Y na prostor Z (viz odstavec 2.3). Nechť dále*

$$f'_2 : X \times Y \rightarrow \mathcal{L}(Y, Z)$$

je spojité zobrazení v bodě (x_0, y_0) . Potom existují kladná čísla ε, δ tak, že ke každému $x \in X$, $\|x - x_0\| < \delta$, existuje právě jedno $u(x) \in Y$,

$$\|u(x) - y_0\| < \varepsilon ,$$

splňující rovnici

$$f(x, u(x)) = 0 .$$

Navíc zobrazení u je spojité v bodě x_0 .

Důkaz Rovnici $f(x, y) = 0$ můžeme zapsat v ekvivalentním tvaru $y = A(x, y)$, kde

$$A(x, y) = y - [f'_2(x_0, y_0)]^{-1} \circ f(x, y)$$

(zdůvodněte!). Důkaz spočívá v tom, že se dokáže existence a jednoznačnost řešení $y \in Y$ rovnice

$$(6.3) \quad y = A(x, y)$$

pomocí Banachovy věty o kontrakci (viz odst. 3.1). Protože f a f'_2 jsou spojitá zobrazení v bodě (x_0, y_0) , je zobrazení A definováno na okolí bodu (x_0, y_0) . Pro každé dostatečně malé $r > 0$ a pro $(x, y) \in X \times Y$, $\|x - x_0\| < r$, $\|y - y_0\| < r$ je

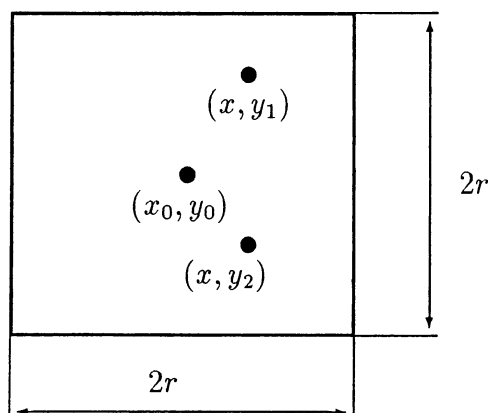
$$A'_2(x, y) = I - [f'_2(x_0, y_0)]^{-1} \circ f'_2(x, y) = [f'_2(x_0, y_0)]^{-1} \circ (f'_2(x_0, y_0) - f'_2(x, y)) .$$

Dostáváme tedy následující odhad

$$\|A'_2(x, y)\| \leq \| [f'_2(x_0, y_0)]^{-1} \| \sup_{\substack{\|x - x_0\| \leq r \\ \|y - y_0\| \leq r}} \|f'_2(x_0, y_0) - f'_2(x, y)\| = q(r) .$$

Platí potom

$$(6.4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} q(r) = 0 ,$$



neboť $f'_2(x, y)$ je spojité zobrazení v bodě (x_0, y_0) . Z důsledku (i) věty 5.5 vyplývá odhad

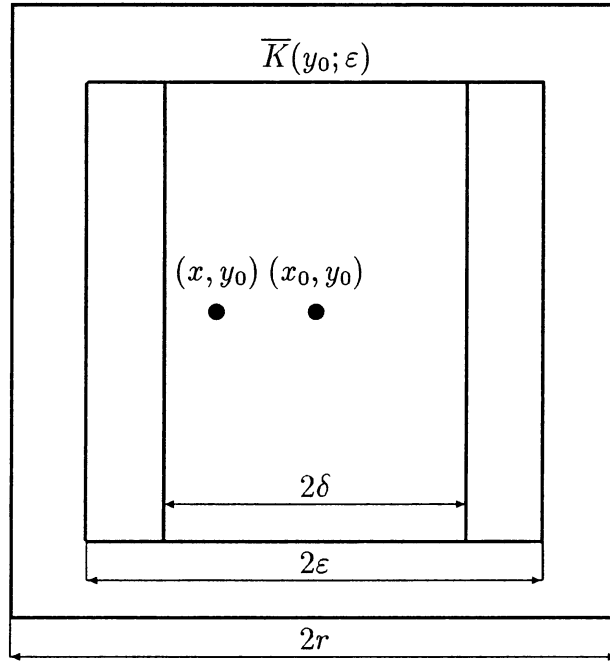
$$(6.5) \quad \|A(x, y_1) - A(x, y_2)\| \leq q(r) \|y_1 - y_2\| ,$$

pokud $\|x - x_0\| \leq r$, $\|y_i - y_0\| \leq r$ ($i = 1, 2$). Dále platí

$$\|A(x, y_0) - y_0\| \leq \| [f'_2(x_0, y_0)]^{-1} \| \sup_{\|x - x_0\| \leq r} \|f(x, y_0)\| = p(r)$$

a vzhledem k tomu, že f je spojitý v bodě (x_0, y_0) a platí $f(x_0, y_0) = 0$, je také

$$(6.6) \quad \lim_{r \rightarrow 0} p(r) = 0 .$$



Vzhledem k (6.4) existuje tak malé $\varepsilon > 0$, že $q(\varepsilon) = q < 1$. Z nerovnosti (6.5) plyne, že zobrazení $A(x, \cdot)$ je pro libovolné $x \in X$, $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$, kontrakcí na množině

$$\{y \in Y; \|y - y_0\| \leq \varepsilon\} = \overline{K}(y_0; \varepsilon) .$$

Zvolme ještě $\delta > 0$ takové, že $\delta \leq \varepsilon$ a navíc $p(\delta) < (1 - q)\varepsilon$. Potom pro každé $x \in X$, $\|x - x_0\| \leq \delta$ platí

$$\begin{aligned} \|A(x, y) - y_0\| &\leq \|A(x, y) - A(x, y_0)\| + \|A(x, y_0) - y_0\| \leq \\ &\leq q\|y - y_0\| + p(\delta) < q\varepsilon + (1 - q)\varepsilon = \varepsilon , \end{aligned}$$

a tedy $A(x, \cdot)$ zobrazuje $\overline{K}(y_0; \varepsilon)$ do $\overline{K}(y_0; \varepsilon)$. Podle Banachova principu kontrakce existuje pro $x \in X$, $\|x - x_0\| \leq \delta$, právě jedno $y \in \overline{K}(y_0; \varepsilon)$, které je řešením rovnice (6.3). Toto řešení označíme $y = u(x)$.

Zřejmě platí $u(x_0) = y_0$ a zbývá tedy ještě dokázat, že u je spojitě v x_0 . Z rovnosti $u(x) = A(x, u(x))$ plyne

$$\begin{aligned} \|u(x) - u(x_0)\| &\leq \|A(x, u(x)) - A(x, u(x_0))\| + \|A(x, u(x_0)) - A(x_0, u(x_0))\| \leq \\ &\leq q\|u(x) - u(x_0)\| + \| [f'_2(x_0, y_0)]^{-1} \| \|f(x, y_0)\| . \end{aligned}$$

Odtud pak dostaneme

$$\|u(x) - u(x_0)\| \leq \frac{1}{1-q} \| [f'_2(x_0, y_0)]^{-1} \| \|f(x, y_0)\| \leq \frac{1}{1-q} p(\|x - x_0\|)$$

a z této nerovnosti podle (6.6) vyplývá spojitost u v bodě x_0 . ■

Poznámka Banachova věta o kontrakci dává přímo návod k numerickému výpočtu hodnoty $u(x)$: V pevném bodě $x \in X$, $\|x - x_0\| < \delta$ definujeme

$$u_0(x) = y_0 ,$$

$$u_k(x) = u_{k-1}(x) - [f'_2(x_0, y_0)]^{-1} f(x, u_{k-1}(x)) ,$$

$k = 1, 2, \dots$. Potom platí následující odhad:

$$(6.7) \quad \|u(x) - u_k(x)\| \leq \frac{q^k}{1-q} \| [f'_2(x_0, y_0)]^{-1} \| \|f(x, y_0)\| \leq \frac{q^k}{1-q} p(\delta) ,$$

a tedy $u_k(x) \rightarrow u(x)$ pro $k \rightarrow \infty$.

Poznámka Budeme-li navíc ve větě 6.1 předpokládat, že f je spojitě zobrazení na *okolí* bodu (x_0, y_0) , pak lze ε, δ zvolit tak, že zobrazení u je spojitě na množině

$$(6.8) \quad U_\delta(x_0) = \{x \in X; \|x - x_0\| \leq \delta\} .$$

To totiž vyplývá okamžitě z toho faktu, že všechna zobrazení u_k (z předcházející poznámky) jsou spojitá na množině $U_\delta(x_0)$. Podle (6.7) posloupnost $\{u_k\}$ konverguje stejnoměrně na množině $U_\delta(x_0)$ k zobrazení u , a tedy u je spojitě na $U_\delta(x_0)$.

Stejně jako v konečné dimenzi můžeme implicitní funkci derivovat, máme-li k dispozici informaci o diferencovatelnosti zobrazení f . Přesněji, platí následující tvrzení.

Věta 6.2 Předpokládejme ve větě 6.1 navíc, že zobrazení f je třídy C^1 na nějakém okolí bodu (x_0, y_0) . Potom lze ε, δ zvolit tak, že $u \in C^1(U_\delta(x_0))$, kde $U_\delta(x_0)$ je definováno vztahem (6.8), a platí

$$u'(x) = -[f'_2(x, u(x))]^{-1} \circ f'_1(x, u(x)) .$$

Princip důkazu Pro všechna $x \in U_\delta(x_0)$ platí rovnost

$$f(x, u(x)) = 0 .$$

Nulová tedy bude i Fréchetova derivace na tomto okolí:

$$f'_1(x, u(x)) + f'_2(x, u(x)) \circ u'(x) = 0 .$$

Odtud postupně dostáváme

$$\begin{aligned} f'_2(x, u(x)) \circ u'(x) &= -f'_1(x, u(x)) , \\ u'(x) &= -[f'_2(x, u(x))]^{-1} \circ f'_1(x, u(x)) . \end{aligned}$$

■

Příklad 6.2 Vraťme se k příkladu 6.1 a chápejme zobrazení f definované vztahem (6.2) jakožto zobrazení

$$f : \mathbb{R} \times C^1(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow C^1(\langle 0, 1 \rangle) .$$

Potom je

$$f'_2(x, y)h = h(t) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial y}(\tau, y(\tau))h(\tau) d\tau .$$

Předpokládáme-li, že funkce $\frac{\partial g}{\partial y}$ je spojitá, můžeme se přesvědčit, že zobrazení

$$f'_2(x, y) : \mathbb{R} \times C^1(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow \mathcal{L}(C^1(\langle 0, 1 \rangle), C^1(\langle 0, 1 \rangle))$$

je spojitě. Dále je zobrazení

$$f'_2(0, 0)h = h(t) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial y}(\tau, 0)h(\tau) d\tau$$

zřejmě lineární a zobrazuje $C^1(\langle 0, 1 \rangle)$ do $C^1(\langle 0, 1 \rangle)$. Vztah $f'_2(0, 0) = 0$ je ekvivalentní tomu, že h je řešením lineární počáteční úlohy

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial y}(t, 0)h(t), \quad h(0) = 0$$

(zdůvodněte!). Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic (věta o jednoznačnosti) však vyplývá, že pak již nutně $h(t) = 0$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Odtud plyne, že $f'_2(0, 0)$ je prosté zobrazení. Rovnice

$$(6.9) \quad f'_2(0, 0)h = \chi, \quad \chi \in C^1(\langle 0, 1 \rangle)$$

je ekvivalentní počáteční úloze

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial y}(t, 0)h(t) + \chi'(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad h(0) = \chi(0) .$$

Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic (věta o existenci řešení počáteční úlohy) opět vyplývá, že tato úloha má řešení, a tedy pro libovolné $\chi \in C^1(\langle 0, 1 \rangle)$ existuje $h \in C^1(\langle 0, 1 \rangle)$ tak, že platí (6.9). Z definičního vztahu pro $f'_2(0, 0)$ přímo plyne omezenost (čili spojitost) tohoto zobrazení. Aplikujeme-li Banachovu větu o otevřeném zobrazení (věta 3.3), dostáváme ihned spojitost inverzního zobrazení $[f'_2(0, 0)]^{-1}$. Zobrazení

$$f'_2(0, 0) : C^1(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow C^1(\langle 0, 1 \rangle)$$

je tedy izomorfismus. Ze spojitosti závislosti řešení počáteční úlohy na parametru a na počáteční podmínce a ze spojitosti funkce $\frac{\partial g}{\partial y}$ plyne spojitost zobrazení $f'_2(x, y)$ v bodě $(0, 0)$ a podobně spojitost zobrazení $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$ (zdůvodněte podrobně!). Proto můžeme použít větu 6.1 a dostáváme existenci takového $\delta > 0$, že pro $|x| < \delta$ existuje právě jedno řešení $y_x = y_x(t)$ počáteční úlohy (6.1). Přitom zobrazení

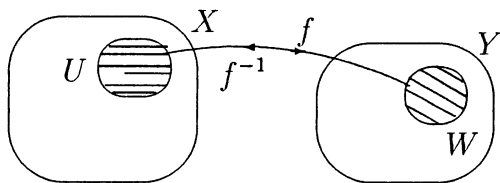
$$x \mapsto y_x(t)$$

chápané jako zobrazení z $\mathbb{R}$ do $C^1(\langle 0, 1 \rangle)$ je spojitým zobrazením v bodě 0. □

Poznámka Předpokládáme-li ve větě 6.2 navíc, že f je třídy C^n na nějakém okolí bodu (x_0, y_0) , potom je $u \in C^n(U_\delta(x_0))$.

Definice 6.1 Nechť f je zobrazení Banachova prostoru X do Banachova prostoru Y . Zobrazení f nazveme *difeomorfismem* na otevřené množině $U \subset X$, jestliže:

- (i) f je prosté na U ,
- (ii) $W = f(U)$ je otevřená podmnožina v Y ,
- (iii) $f \in C^1(U)$,
- (iv) $f^{-1} \in C^1(W)$.



Věta 6.3 (O lokálním difeomorfismu) *Buďte X, Y Banachovy prostory a nechť $f : X \rightarrow Y$ je třídy C^1 na nějakém okolí bodu $x_0 \in X$. Předpokládejme, že $f'(x_0)$ je spojitý izomorfismus prostoru X na prostor Y . Potom existuje okolí $U \subset X$ bodu x_0 tak, že zobrazení f je difeomorfismus na U . Navíc, je-li $f \in C^n(U)$, pak inverzní zobrazení $f^{-1} : Y \rightarrow X$ je třídy C^n na $W = f(U)$.*

Princip důkazu je založen na aplikaci věty 6.1 (o implicitní funkci). Definujme zobrazení $\varphi : Y \times X \rightarrow Y$ předpisem

$$\varphi(y, x) = f(x) - y .$$

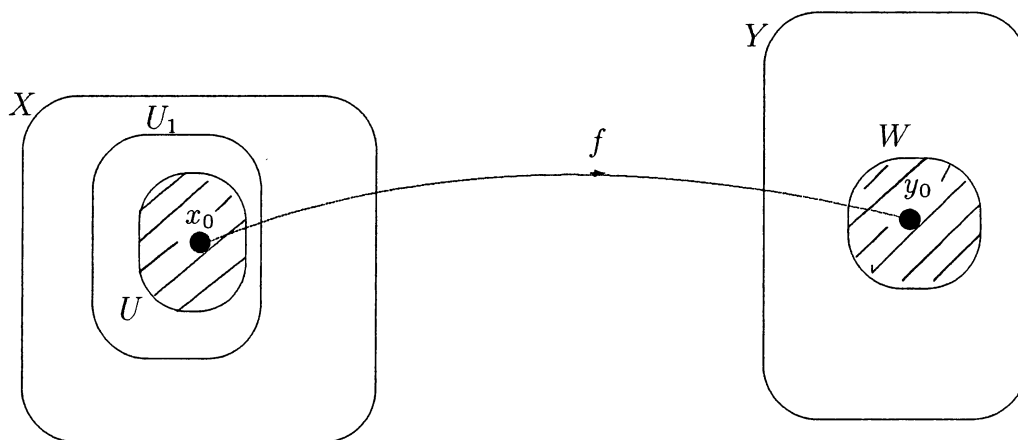
Zobrazení φ pak vyhovuje předpokladům věty 6.1 (kde ovšem zaměníme roli proměnných x a y). Podle této věty tedy existuje okolí W bodu $y_0 = f(x_0)$ a okolí U_1 bodu x_0 tak, že pro $y \in W$ existuje právě jedno $x \in U_1$ tak, že

$$\varphi(y, x) = 0, \text{ tj. } f(x) = y .$$

Použijme pro toto x označení $x = f^{-1}(y)$ a budiž $U = f^{-1}(W)$. Pak zobrazení $f|_U$ je prosté a f^{-1} je zobrazení k němu inverzní. Množina U je okolím bodu x_0 (je otevřená), neboť

$$U = U_1 \cap f^{-1}(W) .$$

Z věty 6.2, resp. z poznámky předcházející definici 6.1, dostáváme $f^{-1} \in C^1(W)$, resp. $f^{-1} \in C^n(W)$. ■



Příklad 6.3 V prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$ uvažujme nelineární integrální rovnici

$$(6.10) \quad x(t) - \int_0^1 K(t, s, x(s)) \, ds = y(t) ,$$

kde $K = K(t, s, u)$ je spojitá funkce na množině $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \mathbb{R}$ a má tam spojitou parciální derivaci $K'_u(t, s, u)$. Předpokládejme dále, že

$$K(t, s, 0) = K'_u(t, s, 0) = 0 .$$

Zobrazení

$$f : x \mapsto x(t) - \int_0^1 K(t, s, x(s)) ds$$

má v každém bodě $x \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ spojitou Fréchetovu derivaci

$$f'(x) : h \mapsto h(t) - \int_0^1 K'_u(t, s, x(s))h(s) ds .$$

Dále platí (vzhledem k předpokladům o K a K'_u), že $f'(0) = I$. Přitom také $f(0) = 0$. Můžeme tedy použít větu 6.3 a podle ní *pro dostatečně malé funkce y (v normě prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$) existuje právě jedno řešení $x \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ rovnice (6.10).*

□

6.2 Morseova-Sardova věta

V tomto odstavci se budeme zabývat diferencovatelnými zobrazeními, tj. budeme předpokládat, že $f'(x_0)$ existuje pro každé $x_0 \in X$. Body, ve kterých jsou splněny předpoklady věty 6.3 (o lokálním difeomorfismu), nazýváme *regulárními body*. V okolí takových bodů se zobrazení f chová „velmi slušně“, takže se zde dá dokázat řada jeho důležitých vlastností (viz například řešitelnost rovnice (6.10) – příklad 6.3). Z pochopitelných důvodů se tedy při vyšetřování různých modelů budeme snažit pohybovat právě v okolí takových bodů. Naopak, body, které tyto požadavky nesplňují, se budeme snažit eliminovat nebo alespoň budeme chtít získat informaci o tom, „kolik jich je“.

Definice 6.2 Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Bod $x_0 \in X$ nazýváme *kritickým bodem* zobrazení $f : X \rightarrow Y$, platí-li $f'(x_0)(X) \neq Y$. Prvek $f(x_0)$ pak budeme nazývat *kritickou hodnotou*.

Při vyšetřování „velikosti“ množiny všech kritických hodnot se omezíme na zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

neboť obecný případ $f : X \rightarrow Y$ přesahuje rámec těchto skript.

Označme $\mu_i(M)$ Lebesgueovu míru množiny $M \subset \mathbb{R}^i$ (tj. $\mu_i(M)$ je tzv. i -rozměrná Lebesgueova míra množiny M). V našem speciálním případě popisuje velikost množiny kritických hodnot následující věta.

Věta 6.4 (MORSE-SARD) *Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ otevřená množina, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $f \in C^{m+1}(\Omega)$. Nechť $A \subset \Omega$ je množina všech kritických bodů zobrazení f v množině Ω . Potom*

$$\mu_n(f(A)) = 0 .$$

Poznámka Z uvedeného tvrzení vyplývá, že množina kritických hodnot zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ je dostatečně malá ve smyslu Lebesgueovy míry.

Tvrzení věty 6.4 je důsledkem dvou speciálnějších tvrzení. Poznamenejme, že v případě zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

je bod a kritickým bodem f , jestliže

$$f'(a) = 0$$

(zdůvodněte!). Pak platí

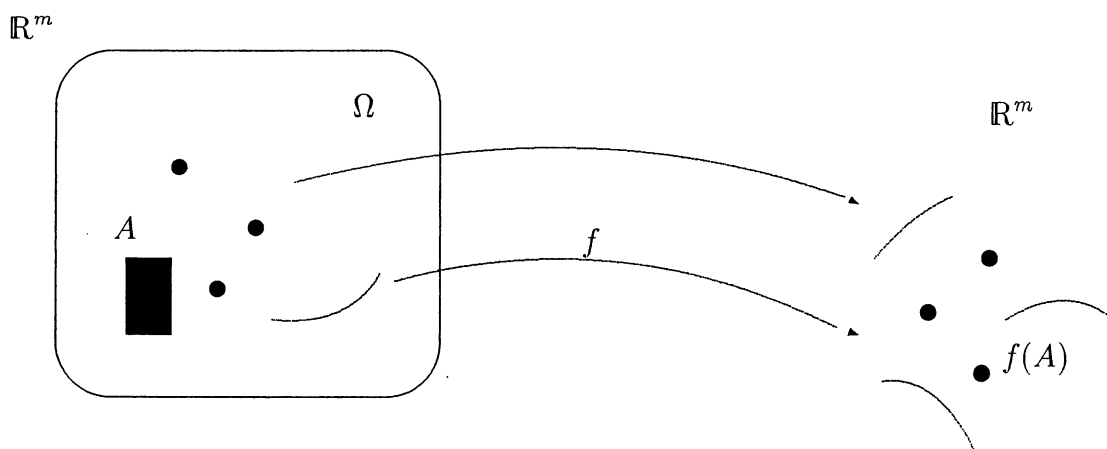
Věta 6.5 (MORSE) *Nechť $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení třídy C^{m+1} na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Nechť dále A je množina všech bodů, ve kterých $f'(a) = 0$. Potom*

$$\mu_1(f(A)) = 0 .$$

Případem zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (tj. $m = n$) se zabývá

Věta 6.6 (SARD) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je zobrazení třídy C^1 na Ω . Nechť dále A je množina všech kritických bodů zobrazení f v množině Ω . Potom*

$$\mu_m(f(A)) = 0 .$$



6.3 Věta o vázaných extrémech

V matematické analýze jsme se zabývali vyšetřováním extrémů funkcí více proměnných vzhledem k nějaké podmnožině definičního oboru - šlo o tzv. extrémy s vazbami. Také tyto věty mají svoje nekonečnědimenzionální analogie, které se dají dokázat pro funkcionály $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kde X je Banachův prostor.

Definice 6.3 Buď $\mathcal{M}$ podmnožina metrického prostoru X , $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkcionál f má v bodě $x_0 \in X$ *lokální extrém vzhledem k množině $\mathcal{M}$* , jestliže existuje okolí U bodu x_0 takové, že funkcionál f má v bodě x_0 extrém na množině $\mathcal{M} \cap U$, tj platí buď

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ pro všechna } x \in \mathcal{M} \cap U$$

(*lokální maximum vzhledem k množině $\mathcal{M}$*), nebo

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ pro všechna } x \in \mathcal{M} \cap U$$

(*lokální minimum vzhledem k množině $\mathcal{M}$*).

Poznámka Má-li množina $\mathcal{M}$ speciální tvar

$$\mathcal{M} = \{x \in X; T(x) = c\},$$

kde T je zobrazení, $T : X \rightarrow Y$, Y je normovaný lineární prostor a $c \in Y$ je pevný bod, nazýváme někdy lokální extrém funkcionálu f vzhledem k množině $\mathcal{M}$ *lokálním extrémem s vazbou*

$$T(x) = c.$$

Analogií známé věty o Lagrangeových multiplikátorech pro vazby typu rovnosti je následující tvrzení.

Věta 6.7 Buď X reálný Banachův prostor a f, g dva reálné funkcionály definované v X , $x_0 \in X$. Nechť funkcionál f má lokální extrém vzhledem k množině $\mathcal{M} = \{v \in X; g(v) = g(x_0)\}$ v bodě x_0 a existují Fréchetovy derivace $f'(x_0), g'(x_0), g'(x_0) \neq 0$, a funkcionál g je spojitý na nějakém okolí bodu x_0 . Potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$f'(x_0) = \lambda g'(x_0).$$

Poznámka Reálnému číslu λ z předcházející věty se často říká *Lagrangeův multiplikátor* a větě samotné pak *věta o Lagrangeově multiplikátoru*. Její důkaz zde provádět nebudeme a zájemce odkazujeme např. na skripta [2].

Poznámka Z věty 6.7 plyne, že k nalezení všech lokálních extrémů funkcionálu f vzhledem k vazbě $g(v) = c$ je nutné zjistit množinu všech $\lambda \in \mathbb{R}$ (označme ji Λ) takovou, že funkcionál $f - \lambda g$ má kritický bod x_λ (tj. $f'(x_\lambda) - \lambda g'(x_\lambda) = 0$) na množině $\{v \in X; g(v) = c\}$. Z přednášky Matematická analýza II si jistě čtenář pamatuje, že v případě $X = \mathbb{R}^N$ byla množina Λ většinou konečná. Vzniká tedy otázka, jak vypadá charakterizace množiny Λ v obecném případě.

V případě $\dim X = \infty$ a při jistých dalších předpokladech o funkcionálech f, g obsahuje množina Λ posloupnost nenulových čísel, která konverguje k nule. V některých případech se dá ukázat, že Λ je právě spočetná množina (např. jsou-li f a g homogenní funkcionály: $f(tx) = t^a f(x)$, $g(tx) = t^b g(x)$, $t > 0$, $x \in X$). Tyto problémy souvisí s vyšetřováním vlastních čísel nelineárních operátorů a v této oblasti je dosud řada otevřených problémů, neboť se jedná o teorii, která není zdaleka uzavřená. O této problematice se mohou zájemci více dovědět např. v [2], [3], [4] a v literatuře tam citované.

Kapitola 7

Absolutní extrémy nelineárních funkcionalů

7.1 Existenční věty pro absolutní extrémy

Tento odstavec a tuto kapitolu uvedme otázkou, zda „rozumný“ funkcional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá na omezené a uzavřené podmnožině D Banachova prostoru X své největší a nejmenší hodnoty. Jinými slovy, ptáme se, zda pro něj platí jistá analogie Weierstrassovy věty.

V případě, že množina D je kompaktní, stačí podle Weierstrassovy věty z teorie metrických prostorů (viz [2]) předpokládat, že funkcional f je spojitý. Má-li však Banachův prostor X nekonečnou dimenzi, pak jeho kompaktní podmnožiny jsou velice „malé“, neobsahují žádný vnitřní bod, takže například uzavřená jednotková koule v takovém prostoru není kompaktní.

Věta 7.1 *Normovaný lineární prostor X má konečnou dimenzi právě tehdy, když každá omezená podmnožina prostoru X je relativně kompaktní (tj. její uzávěr je kompaktní množina v X).*

Tato věta je dokázána např. v [2]. My se zde spokojíme pouze s jejím zněním a uvědomíme si, že pojem „rozumného“ funkcionalu budeme muset v nekonečné dimenzi chápat poněkud jinak než v případě $X = \mathbb{R}^N$ (kdy „rozumný“ = spojitý). K tomu potřebujeme definovat některé základní pojmy. Pro jednoduchost se omezíme na hledání extrémů na podmnožinách separabilního Hilbertova prostoru H .

Definice 7.1 Buď M podmnožina Hilbertova prostoru H .

- (i) Řekneme, že množina M je *slabě sekvenciálně uzavřená*, patří-li limitní prvek každé slabě konvergentní posloupnosti prvků z M opět do M .
- (ii) Řekneme, že množina M je *slabě sekvenciálně relativně kompaktní*, jestliže z libovolné posloupnosti $\{u_n\} \subset M$ lze vybrat podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ takovou, že $\{u_{n_k}\}$ konverguje slabě k nějakému prvku z H .

- (iii) Řekneme, že množina M je *slabě sekvenciálně kompaktní*, jestliže je slabě sekvenciálně uzavřená a slabě sekvenciálně relativně kompaktní.

Zřejmě platí následující tvrzení.

Lemma 7.1

- (i) Každá slabě sekvenciálně uzavřená množina je uzavřená.
(ii) Každá kompaktní (resp. relativně kompaktní) množina je slabě sekvenciálně kompaktní (resp. slabě sekvenciálně relativně kompaktní).

Poznámka (i) Ne každá uzavřená množina je slabě sekvenciálně uzavřená! Jako příklad může sloužit množina

$$S = \{u \in l^2; \|u\| = 1\}.$$

To je uzavřená množina. Pro posloupnost $\{e_n\} \subset S$ prvků tvaru

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

s jedničkou na n -tém místě platí

$$e_n \rightarrow o$$

(zdůvodněte) a přitom $o \notin S$. Proto S není slabě sekvenciálně uzavřená.

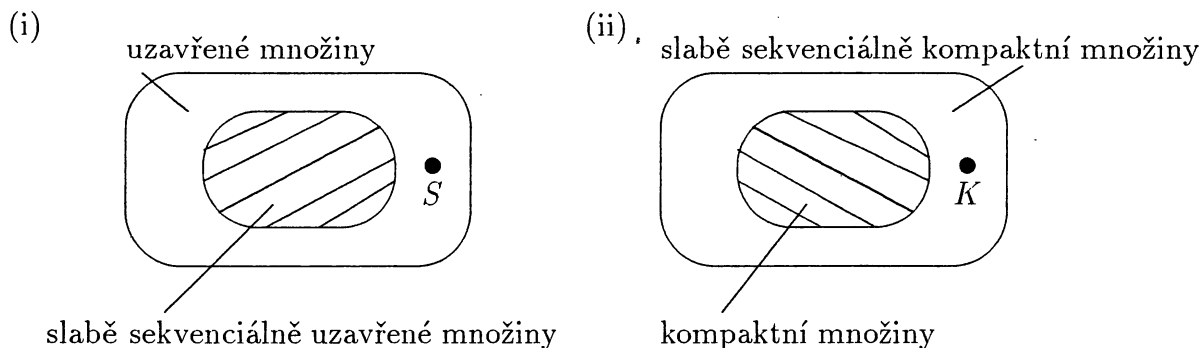
(ii) Podobně ne každá slabě sekvenciálně kompaktní množina je kompaktní! Jako příklad můžeme uvést množinu

$$K = \{u \in H; \|u\| \leq 1\}.$$

Je-li totiž $\{u_n\} \subset K$ libovolná posloupnost, potom $\|u_n\| \leq 1$. Vzhledem k reflexivitě prostoru H existuje vybraná podposloupnost $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, která slabě konverguje k nějakému prvku $u \in H$ (Eberleinova-Šmuljanova věta – věta 2.25): $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Potom ale

$$\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k}\| \leq 1,$$

tj. $u \in K$ (viz věta 2.23). Podle věty 7.1 však K není kompaktní, pokud $\dim H = \infty$.



Dá se dokázat následující zajímavé tvrzení, s jehož pomocí lze „identifikovat“ ty uzavřené množiny, které jsou zároveň slabě sekvenciálně uzavřené.

Věta 7.2 *Každá uzavřená a konvexní podmnožina M reálného Hilbertova prostoru H je slabě sekvenciálně uzavřená.*

Důkaz této věty využívá Rieszovu větu o reprezentaci (věta 2.35) a jistý důsledek Hahnovy–Banachovy věty (tzv. Mazurovu větu) – viz [2]. ■

Abychom mohli charakterizovat slabě sekvenciálně kompaktní množiny, potřebujeme, vzhledem k části (iii) definice 7.1, mít k dispozici dobré kritérium pro to, aby daná podmnožina Hilbertova prostoru H byla slabě sekvenciálně relativně kompaktní (kritérium slabé sekvenciální uzavřenosti nám totiž dává věta 7.2).

Věta 7.3 *Každá omezená podmnožina Hilbertova prostoru H je slabě sekvenciálně relativně kompaktní.*

Důsledek *Každá omezená, uzavřená a konvexní množina v Hilbertově prostoru H je slabě sekvenciálně kompaktní.*

Důkaz tvrzení vyplývá přímo z předcházejících vět 7.2 a 7.3.

Příklad 7.1 Uzavřená jednotková koule v Hilbertově prostoru je slabě sekvenciálně kompaktní množina. (Zdůvodněte!) □

Cvičení 7.1 Dokažte, že slabě sekvenciálně kompaktní podmnožina Hilbertova prostoru H je omezená.

Cvičení 7.2 Průnik libovolného systému slabě sekvenciálně uzavřených podmnožin Hilbertova prostoru je slabě sekvenciálně uzavřená množina. Sjednocení konečně mnoha slabě sekvenciálně uzavřených množin je slabě sekvenciálně uzavřená množina. Dokažte!

Nyní budeme formulovat některé postačující podmínky k tomu, aby funkcionál nabýval na slabě sekvenciálně kompaktní podmnožině Hilbertova prostoru svého minima.

Definice 7.2 Buď H reálný Hilbertův prostor a M podmnožina prostoru H . Řekneme, že funkcionál $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ je v bodě $u_0 \in M$ *slabě zdola polospojité vzhledem k M* (resp. slabě shora polospojité vzhledem k M), jestliže pro každou posloupnost $\{u_n\} \subset M$, $u_n \rightharpoonup u_0$ platí

$$f(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \quad (\text{resp. } f(u_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(u_n)).$$

Řekneme, že funkcionál f je *slabě zdola (shora) polospojité na množině M* , jestliže je slabě zdola (shora) polospojité v každém bodě množiny M vzhledem k množině M .

Příklad 7.2 (i) Norma reálného Hilbertova prostoru H je slabě zdola polospojité funkcionál na prostoru H (zdůvodněte!).

(ii) Každý spojitý lineární funkcionál f na reálném Hilbertově prostoru je slabě zdola polospojité na prostoru H : Pak totiž podle Rieszovy věty existuje prvek $v \in H$ takový, že

$$f(u) = (u, v)$$

pro všechna $u \in H$, a proto platí implikace:

$$u_n \rightharpoonup u_0 \Rightarrow (u_n, v) \rightarrow (u_0, v) \Rightarrow f(u_n) \rightarrow f(u_0).$$

□

Věta 7.4 *Nechť M je slabě sekvenciálně kompaktní neprázdná podmnožina reálného Hilbertova prostoru H a nechť f je slabě zdola polospojité funkcionál na množině M . Potom f je zdola omezený na M a existuje $u_0 \in M$ tak, že*

$$f(u_0) = \inf_{u \in M} f(u).$$

Důkaz Existuje posloupnost $\{u_n\} \subset M$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \inf_{u \in M} f(u).$$

Protože množina M je slabě sekvenciálně kompaktní, existuje $u_0 \in M$ a vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{u_n\}$ tak, že $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$. Odtud plyne:

$$\inf_{u \in M} f(u) \leq f(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \inf_{u \in M} f(u).$$

$$\leq f(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \inf_{u \in M} f(u)$$

■

Všetchna další tvrzení tohoto odstavce budou vycházet z předcházející věty, která je v této souvislosti *základním* tvrzením. V dalším výkladu se soustředíme na následující dva problémy:

(a) vyjasnění předpokladů věty 7.4;

(b) otázka existence minima funkcionálu na neomezených množinách.

Důsledek věty 7.4 *Bud' M uzavřená konvexní omezená a neprázdná podmnožina reálného Hilbertova prostoru H . Nechť f je slabě zdola polospojité funkcionál na množině M . Potom f je zdola omezený na M a existuje $u_0 \in M$ tak, že*

$$f(u_0) = \inf_{u \in M} f(u).$$

Důkaz proveďte sami.

Uvědomte si, že předpoklad konvexity, uzavřenosti a omezenosti množiny se ověřuje „příjemněji“ než předpoklad slabé sekvenciální kompaktnosti. K vyřešení problému (a) tedy zbývá studovat podmínky postačující k tomu, aby funkcionál f byl slabě zdola polospojité.

Lemma 7.2 *Buď M podmnožina reálného Hilbertova prostoru H . Funkcionál $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ je slabě zdola polospojité na množině M právě tehdy, když pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina*

$$E(a) = \{u \in M; f(u) \leq a\}$$

slabě sekvenciálně uzavřená v M .

Důkaz 1. Nechť f je slabě zdola polospojité funkcionál na množině M , $a \in \mathbb{R}$, $\{u_n\} \subset E(a)$, $u_n \rightharpoonup u_0 \in M$. Potom

$$f(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \leq a$$

a tedy $u_0 \in E(a)$.

2. Nechť $E(a)$ je pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ slabě sekvenciálně uzavřená, $\{u_n\} \subset M$, $u_n \rightharpoonup u_0 \in M$ a předpokládejme, že funkcionál f není v bodě u_0 slabě zdola polospojité, tj. že platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) < f(u_0).$$

Zvolme $a \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) < a < f(u_0).$$

Potom existuje vybraná podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ ležící v $E(a)$ (zdůvodněte!). Protože množina $E(a)$ je slabě sekvenciálně uzavřená, je $u_0 \in E(a)$. Odtud plyne

$$f(u_0) \leq a < f(u_0)$$

a to je spor. ■

Definice 7.3 Funkcionál $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *konvexní* na konvexní množině M , jestliže pro každé $u, v \in M$ a $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je splněna nerovnost

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v).$$

Řekneme, že funkcionál f je na množině M *ryze konvexní*, jestliže pro každé $u, v \in M$, $u \neq v$ a $t \in (0, 1)$ platí

$$f(tu + (1-t)v) < tf(u) + (1-t)f(v).$$

Věta 7.5 *Konvexní a spojitý funkcionál f definovaný na konvexní podmnožině M reálného Hilbertova prostoru H je slabě zdola polospojité na M .*

Idea důkazu Ze spojitosti a konvexity funkcionálu f plyne, že množina $E(a) = \{u \in M; f(u) \leq a\}$ je pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ uzavřená a konvexní v M . Podle věty 7.2 je tedy slabě sekvenciálně uzavřená. Tvrzení je tedy důsledkem lemmatu 7.2. ■

Obdržené výsledky tedy můžeme shrnout takto:
 „Buď M uzavřená konvexní omezená a neprázdná podmnožina reálného Hilbertova prostoru H . Nechť $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní a spojitý funkcionál na množině M . Potom f je zdola omezený na množině M a existuje $u_0 \in M$ tak, že

$$f(u_0) = \inf_{u \in M} f(u).$$

Je-li navíc f ryze konvexní, pak existuje právě jedno u_0 s výše uvedenou vlastností.“

Nyní obrátíme pozornost k případu, kdy je třeba udat postačující podmínku k tomu, aby funkcionál nabýval svého minima na celém prostoru.

Definice 7.4 Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Říkáme, že funkcionál $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je slabě koercitivní na prostoru X , jestliže

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} f(u) = \infty.$$

Věta 7.6 Nechť $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ je slabě zdola polospojité a slabě koercitivní funkcionál na reálném Hilbertově prostoru H . Potom f je na prostoru H zdola omezený a existuje $u_0 \in H$ tak, že

$$f(u_0) = \inf_{u \in H} f(u).$$

Důkaz Nechť $d > \inf_{u \in H} f(u)$. Existuje $R > 0$ tak, že pro $u \in H$, $\|u\| > R$ je

$$f(u) \geq d.$$

Potom

$$\inf_{\|u\| \leq R} f(u) = \inf_{u \in H} f(u)$$

(zdůvodněte!) a podle věty 7.4 existuje bod $u_0 \in H$, $\|u_0\| \leq R$, pro který platí

$$f(u_0) = \inf_{\|u\| \leq R} f(u) = \inf_{u \in H} f(u).$$

■

Poznámka Místo předpokladu, že f je slabě zdola polospojité funkcionál, můžeme ve větě 7.6 předpokládat, že f je spojitý a konvexní.

Cvičení 7.3 (i) Dokažte, že lineární funkcionál a norma reálného Hilbertova prostoru jsou konvexní funkcionály!

(ii) Buď f konvexní funkcionál definovaný na konvexní podmnožině M reálného Hilbertova prostoru H . Dokažte, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je množina $E(a) = \{u \in M; f(u) \leq a\}$ konvexní!

(iii) Ukažte, že ve větě 7.6 lze místo slabé koercitivity f předpokládat, že pro každý bod

$u \in H$ existuje $r > 0$ tak, že pro všechny body $v \in H$, $\|v\| \geq r$ je $f(v) > f(u)$.

(iv) Dokažte, že pro každý spojitý lineární funkcionál f na reálném Hilbertově prostoru H existuje prvek $u \in H$, $\|u\| = 1$, takový, že $\|f\| = f(u)$.

[Návod: Dokažte, že funkcionál

$$u \mapsto \|f\| \|u\| - f(u)$$

nabývá svého minima a toto minimum se rovná 0. Pak využijte homogenosti normy a lineárního funkcionálu f .]

7.2 Přibližné metody hledání minima funkcionálu

V předcházejícím odstavci bylo ukázáno, že za jistých předpokladů funkcionál definovaný na podmnožině reálného Hilbertova prostoru nabývá svého minima. V praktických úlohách však tyto *existenční* výsledky nestačí a je nutné určit buď *jak velké* je toto *minimum*, nebo *ve kterém bodě* je ho *nabýváno*. Většinou však nelze tyto hodnoty určit přesně, a proto se budeme v tomto odstavci stručně zabývat metodami jejich přibližného výpočtu.

Definice 7.5 Nechť reálný funkcionál f je zdola omezený na podmnožině A normovaného lineárního prostoru X . Posloupnost $\{u_n\} \subset A$ nazýváme *minimalizující posloupností*, jestliže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \inf_{u \in A} f(u).$$

Z praktického hlediska pro nás budou mít význam pouze takové minimalizující posloupnosti, pomocí nichž bude možné nalézt bod $u^* \in A$, v němž reálný funkcionál f nabývá svého infima na množině A . To se nám podaří, když například z nalezené minimalizující posloupnosti bude možné vybrat (slabě či silně) konvergentní podposloupnost v množině A a funkcionál f bude (slabě či silně) zdola polospojité (zdůvodněte sami!).

Poznamenejme, že místo termínu silně zdola polospojité funkcionál se používá pouze termín *zdola polospojité* funkcionál; ten je definován tak, že v definici 7.2 nahradíme slabou konvergenci konvergencí v normě. Podobným způsobem je definován pojem *shora polospojitého* funkcionálu. Proto je pro nás důležité nalézt např. takové požadavky na funkcionál f , aby minimalizující posloupnost byla omezená.

Lemma 7.3 *Nechť funkcionál f je slabě koercitivní na Hilbertově prostoru H . Pak každá minimalizující posloupnost je omezená.*

Důkaz Označme

$$\alpha = \inf_{u \in H} f(u).$$

Protože f nemůže být konstantní (zdůvodněte), existuje $w \in H$ tak, že

$$f(w) > \alpha.$$

kdyby minimalizující posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ nebyla omezená, pak by existovala vybraná podposloupnost $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, pro kterou je $\|u_{n_k}\| > k$, $k \in \mathbb{N}$. Podle definice slabé koercitivity je $f(u_{n_k}) > f(w)$ pro $k \geq k_0$, a tedy *není*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \alpha.$$

Pak ale $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ nemůže být minimalizující posloupnost a to je spor. ■

Z praktického hlediska je pro nás však důležitější následující tvrzení.

Věta 7.7 *Nechť f je slabě koercitivní, spojitý a ryze konvexní funkcionál definovaný na reálném Hilbertově prostoru H . Pak existuje právě jeden prvek $u^* \in H$, pro který*

$$f(u^*) = \inf_{u \in H} f(u),$$

a každá minimalizující posloupnost slabě konverguje k prvku u^ .*

Důkaz Existence prvku $u^* \in H$ vyplývá z vět 7.5 a 7.6 (zdůvodněte podrobně). Jednoznačnost pak plyne z ryzí konvexity funkcionálu f . Minimalizující posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ je omezená, což znamená, že existuje vybraná podposloupnost $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, která slabě konverguje:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0.$$

Protože však f je spojitý a konvexní, je podle věty 7.5 slabě zdola polospojité a platí tedy

$$f(u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(u_{n_k}) = \inf_{u \in H} f(u).$$

Z jednoznačnosti prvku u^* pak plyne $u_0 = u^*$, a tedy

$$u_{n_k} \rightharpoonup u^*.$$

Stejnou úvahou pak ukážeme, že každá vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{u_n\}$ konverguje slabě k prvku u^* . Odtud pak již plyne

$$u_n \rightharpoonup u^*.$$

■

Ještě výhodnější však je, máme-li k dispozici *silnou konvergenci* minimalizující posloupnosti.

Věta 7.8 *Nechť funkcionál f je definován na reálném Hilbertově prostoru H a má v každém bodě tohoto prostoru druhou Gâteauxovu derivaci, která je pozitivně definitní, tj. existuje $\gamma > 0$ tak, že pro všechna $u \in H$, $h \in H$ je*

$$D^2 f(u)(h, h) \geq \gamma \|h\|^2.$$

Pak existuje právě jeden prvek $u^ \in H$ takový, že*

$$f(u^*) = \inf_{u \in H} f(u),$$

a každá minimalizující posloupnost konverguje v normě prostoru H k prvku u^ .*

Důkaz Podle věty 5.5 pro $u, u + h \in H$ můžeme psát

$$(7.1) \quad f(u + h) - f(u) = \int_0^1 Df(u + th)h \, dt$$

(poznamenejme, že platí $Df(u + th)h = \delta f(u + th, h)$). Pro pevná $t \in \langle 0, 1 \rangle$ a $h \in H$ položme

$$\varphi : \tau \rightarrow Df(u + \tau th)h, \quad \tau \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Ověřte sami, že funkce φ splňuje v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě (viz [7]). Na základě této věty existuje $\xi \in (0, 1)$ tak, že

$$\varphi(1) - \varphi(0) = Df(u + th)h - Df(u)h = D^2 f(u + \xi th)(h, th).$$

Dosazením tohoto vyjádření do vztahu (7.1) obdržíme

$$(7.2) \quad f(u + h) - f(u) = Df(u)h + \int_0^1 t D^2 f(u + \xi th)(h, h) \, dt.$$

Volbou $u = o$ dostáváme

$$f(h) = f(o) + Df(o)h + \int_0^1 t D^2 f(\xi th)(h, h) \, dt \geq f(o) + \|h\| \left(\frac{\gamma}{2} \|h\| - \|Df(o)\| \right)$$

pro $h \in H$, což znamená, že f je slabě koercitivní funkcionál (zdůvodněte). Položíme-li $u + h = v$, pak ze vztahu (7.2) vyplývá, že pro $u \neq v$ je

$$(7.3) \quad f(v) - f(u) - Df(u)(v - u) > 0.$$

Speciálně pro $u = tv_1 + (1 - t)v_2$, $v_1 \neq v_2$, $t \in (0, 1)$ máme

$$f(v_1) - f(u) > (1 - t)Df(u)(v_1 - v_2),$$

$$f(v_2) - f(u) > -tDf(u)(v_1 - v_2).$$

Násobením první nerovnosti číslem t , druhé nerovnosti číslem $(1 - t)$ a sečtením zjistíme, že f je ryze konvexní funkcionál (provedte podrobně!).

Nechť nyní $u_n \rightharpoonup u$. Pak podle (7.3) je

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) - f(u) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} Df(u)(u_n - u) = 0.$$

Odtud plyne, že f je také slabě zdola polospojité. Existence prvku u^* nyní vyplývá z předcházející věty 7.8.

Předpokládejme nyní, že $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ je nějaká minimalizující posloupnost, a ve vztahu (7.2) položme $u + h = u_n$ a $u = u^*$. Protože f má v bodě u^* minimum, je $Df(u^*)h = o$ a tedy

$$f(u_n) - f(u^*) = \int_0^1 t D^2 f(u^* + \xi t(u_n - u^*))(u_n - u^*, u_n - u^*) \, dt \geq \frac{\gamma}{2} \|u_n - u^*\|^2.$$

Protože levá strana této nerovnosti má za limitu nulu, plyne odtud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^*\| = 0.$$

■

Při numerických výpočtech nám jde o efektivní konstrukci minimalizující posloupnosti, která konverguje k bodu $u^* \in H$ s vlastností

$$f(u^*) = \inf_{u \in H} f(u).$$

Z hlediska praktického pak sledujeme obvykle tato dvě hlavní kritéria:

1. Konstrukce takové minimalizující posloupnosti co možná *nejjednodušším způsobem*.
2. Konstrukce takové minimalizující posloupnosti, která k u^* *konverguje co nejrychleji*.

Vyhovět najednou oběma požadavkům většinou nelze, neboť často jdou v jistém smyslu „proti sobě“. Záleží pak na konkrétním tvaru funkcionálu f a na charakteru prostoru H , jakou metodu zvolíme. Z tohoto důvodu existuje celá řada metod konstrukce minimalizující posloupnosti. Jedna z nejpoužívanějších metod je tzv. *Ritzova metoda*, kterou se budeme nadále v tomto odstavci zabývat.

Předpokládejme, že f je reálný funkcionál na reálném separabilním Hilbertově prostoru H a nechť $\{u_k\}$ je úplný systém v H (viz definici 2.40). Označme

$$H_n = \text{Lin}\{u_1, \dots, u_n\}$$

tj. H_n je lineární prostor dimenze n tvořený všemi lineárními kombinacemi prvků $u_1, \dots, u_n$, a nechť

$$\alpha_n = \inf_{u \in H_n} f(u).$$

Zřejmě platí $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ (zdůvodněte). Podstatou Ritzovy metody je domněnka, že

$$(7.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \inf_{u \in H} f(u).$$

Předpokládejme na okamžik, že (7.4) platí a že existují prvky $v_n \in H_n$ takové, že

$$f(v_n) = \alpha_n.$$

Potom $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří minimalizující posloupnost. Tuto posloupnost pak hledáme na základě nutných podmínek, které musí být splněny: Předpokládejme, že f má na H_n Gâteauxovu derivaci. Pak v bodě minima v_n musí platit

$$(7.5) \quad Df(v_n)h = (h, Df(v_n)) = 0$$

pro každé $h \in H_n$ (zdůvodněte). Takové h však můžeme vyjádřit ve tvaru

$$h = \sum_{i=1}^n h_i u_i.$$

Dosazením do (7.5) pak dostáváme

$$\sum_{i=1}^n h_i (u_i, Df(v_n)) = 0.$$

Odtud plyne, že

$$(u_i, Df(v_n)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Protože však také $v_n \in H_n$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$(7.6) \quad v_n = \sum_{j=1}^n a_j u_j,$$

budou neznámé koeficienty $a_1, \dots, a_n$ (pomocí nichž můžeme získat prvek v_n) řešením tzv. *Ritzovy soustavy*

$$(7.7) \quad \left(u_i, Df \left(\sum_{j=1}^n a_j u_j \right) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Je-li $a_1, \dots, a_n$ řešením soustavy (7.7), pak prvek v_n tvaru (7.6) nazýváme *n-tou Ritzovou aproximací*.

Následující tvrzení uvádí do souvislosti existenci řešení soustavy (7.7) a existenci minima f na H_n .

Lemma 7.4 *Nechť Ritzova soustava (7.7) má řešení $a_1, \dots, a_n$. Jestliže funkcionál f je konvexní na prostoru H_n , pak pro příslušnou Ritzovu aproximaci v_n tvaru (7.6) platí*

$$f(v_n) = \min_{u \in H_n} f(u).$$

Důkaz Označme

$$\varphi(w) = f(v_n + w) - f(v_n), \quad w \in H_n.$$

Jestliže f nenabývá minima na H_n v bodě v_n , pak existuje $w_n \in H_n$ tak, že

$$\varphi(w_n) < 0.$$

Protože je f (na H_n) konvexní, je i φ konvexní, a tedy platí

$$\varphi(\lambda w_n) = \varphi(\lambda w_n + (1 - \lambda)0) \leq \lambda \varphi(w_n)$$

pro $\lambda \in (0, 1)$. Odtud vyplývá

$$\delta f(v_n, w_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{\varphi(\lambda w_n)}{\lambda} \leq \varphi(w_n) < 0.$$

To je však spor s předpokladem, že v_n je Ritzova aproximace (zdůvodněte).

■

Nyní se vraťme na začátek našich úvah o Ritzově metodě a uvědomme si, že nám zbývá vyřešit následující dva problémy:

- (i) Nalézt podmínky, za kterých pro $n \in \mathbb{N}$ existuje řešení Ritzovy soustavy.
- (ii) Nalézt podmínky, za kterých posloupnost takto získaných Ritzových aproximací tvoří minimalizující posloupnost.

Odpověď na otázku (i) dává následující tvrzení.

Lemma 7.5 *Nechť funkcionál f je na prostoru H_n slabě koercitivní a zdola polospojité a f má v každém bodě prostoru H_n lineární Gâteauxův diferenciál. Pak existuje n -tá Ritzova aproximace.*

Důkaz Protože f je slabě koercitivní na H_n , existuje číslo $r > 0$ tak, že

$$\inf_{u \in H_n} f(u) = \inf_{\substack{\|u\| \leq r \\ u \in H_n}} f(u).$$

Množina $\{u \in H_n; \|u\| \leq r\}$ je kompaktní (zdůvodněte) a tedy (vzhledem k polospojitosti f zdola) existuje bod $v_n \in H_n$ takový, že

$$f(v_n) = \inf_{\substack{\|u\| \leq r \\ u \in H_n}} f(u).$$

Z definice Gâteauxova diferenciálu vyplývá, že

$$\delta f(v_n, h) = 0$$

pro všechna $h \in H_n$, tj. v_n je n -tá Ritzova aproximace. ■

Poznámka Vzhledem k tomu, že slabá a silná konvergence na prostorech konečné dimenze splývají (zdůvodněte!), je možné v lemmatu 7.5 předpokládat, že f je slabě zdola polospojité funkcionál na prostoru H .

Odpovědí na otázku (ii) je následující tvrzení.

Lemma 7.6 *Nechť funkcionál $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní a shora polospojité na reálném separabilním Hilbertově prostoru H . Bud' $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost Ritzových aproximací funkcionálu f . Potom $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří minimalizující posloupnost.*

Důkaz Označme

$$\alpha = \inf_{u \in H} f(u)$$

a necht' $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká minimalizující posloupnost funkcionálu f . Protože $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný systém v H , pro libovolné n a $\delta_n > 0$ existuje prvek $z_m \in H_m$ ($m \geq n$) takový, že

$$\|z_m - w_n\| < \delta_n.$$

Zvolíme-li δ_n tak, aby pro $u \in H$, $\|u - w_n\| < \delta_n$ bylo

$$f(u) < f(w_n) + \frac{1}{n}$$

(volba takového δ_n je možná díky polospojitosti f shora), podle lemmatu 7.4 je

$$\alpha = \inf_{u \in H} f(u) \leq f(v_m) = \min_{u \in H_m} f(u) \leq f(z_m) < f(w_n) + \frac{1}{n}.$$

Protože $\{f(v_m)\}$ je nerostoucí posloupnost, vyplývá z poslední nerovnosti, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(v_m) = \alpha,$$

tj. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří minimalizující posloupnost (zdůvodněte). ■

Všechny naše úvahy o Ritzově metodě můžeme nyní shrnout v následujícím tvrzení.

Věta 7.9 *Nechť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný systém v separabilním reálném Hilbertově prostoru H a nechť funkcionál $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ je slabě koercitivní, konverzní, spojitý na prostoru H a má v každém bodě prostoru H lineární Gâteauxův diferenciál. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje řešení Ritzovy soustavy (7.7) a posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ Ritzových aproximací tvoří minimalizující posloupnost. Jestliže navíc funkcionál f je ryze konverzní na prostoru H , pak $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje slabě k bodu $u^* \in H$ takovému, že*

$$f(u^*) = \min_{u \in H} f(u).$$

Důkaz Podle lemmatu 7.5 existují Ritzovy aproximace a na základě lemmatu 7.6 tvoří minimalizující posloupnost. Poslední část tvrzení je obsažena ve větě 7.7. ■

Příklad 7.3 V tomto příkladu budeme ilustrovat Ritzovu metodu na přibližném řešení lineární rovnice

$$(7.8) \quad Tu = f.$$

Předpokládejme, že T je symetrické lineární zobrazení Hilbertova prostoru H do sebe, definované na husté podmnožině $\mathcal{D}(T) \subset H$. Pro $f \in H$ definujeme kvadratický funkcionál

$$F : u \mapsto (Tu, u) - 2(u, f),$$

$u \in \mathcal{D}(T)$ (viz odst. 3.3). Jestliže $u, h \in \mathcal{D}(T)$, pak

$$\delta F(u, h) = 2(Tu - f, h),$$

což znamená, že pokud existuje $u_0 \in \mathcal{D}(T)$ takové, že $F(u_0) = \min_{u \in \mathcal{D}(T)} F(u)$, pak pro všechna $h \in \mathcal{D}(T)$ platí

$$\delta F(u_0, h) = 0.$$

Protože $\mathcal{D}(T)$ je hustá podmnožina prostoru H , je nutně u_0 řešením rovnice (7.8) (zdůvodněte).

Zvolíme-li úplný lineárně nezávislý systém $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(T)$, má Ritzova soustava pro přibližné určení $\min_{u \in \mathcal{D}(T)} F(u)$ tvar

$$(7.9) \quad \sum_{j=1}^n a_j(Tu_j, u_i) = (f, u_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Příslušná n -tá Ritzova aproximace bude existovat, pokud bude matice soustavy (7.9) regulární. Jestliže budeme navíc předpokládat, že T je pozitivně definitní, tj. existuje číslo $\gamma > 0$ tak, že

$$(Tu, u) \geq \gamma \|u\|^2$$

pro všechna $u \in \mathcal{D}(T)$, pak $\lambda = 0$ není vlastním číslem zobrazení T (zdůvodněte), a speciálně matice (Tu_j, u_i) , $i, j = 1, \dots, n$, je regulární.

Uvažujme nyní rozšíření kvadratického funkcionálu F na energetický prostor H_T , $\mathcal{D}(T) \subset H_T \subset H$, a označme $\|u\|_T = \sqrt{(u, u)_T}$ energetickou normu na H_T (viz odst. 3.3). Pomocí skalárního součinu na H_T lze Ritzovu soustavu (7.9) přepsat do tvaru

$$(7.10) \quad \sum_{j=1}^n a_j(u_i, u_j)_T = (u_0, u_i)_T, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde $u_0 \in H_T$ je řešení rovnice (7.8), tj.

$$(u, f) = (u, u_0)_T$$

pro všechna $u \in H_T$ (viz [1], str. 113). Uvědomte si, že pro sestavení soustavy (7.10) stačí předpokládat, že $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset H_T$! Ze soustavy (7.10) je patrné, že n -tá Ritzova aproximace v_n má tu vlastnost, že

$$(v_n - u_0, u_i)_T = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Jinými slovy: n -tá Ritzova aproximace v_n je ortogonální projekcí prvku u_0 v prostoru H_T na podprostor $H_n = \text{Lin}\{u_1, \dots, u_n\}$. Jestliže tedy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ tvoří úplný systém v prostoru H_T , pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - u_0\|_T = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(v_n) = \min_{u \in H_T} F(u).$$

Dokázali jsme tedy, že pro $f \in \mathcal{R}(T)$ tvoří posloupnost Ritzových aproximací minimalizující posloupnost a konverguje k řešení rovnice (7.8) v normě prostoru H_T (a tedy v normě prostoru H).

Z hlediska numerického výpočtu nejsou však tímto tvrzením ani zdaleka vyřešeny všechny problémy. Podstatnou částí praktického použití metody je např. výběr takové posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, aby řešení soustavy (7.10) málo záviselo na nepřesném určení pravých stran a koeficientů matice soustavy.

□

Poznámka Soustavu analogickou soustavě (7.9) můžeme sestavit i bez předpokladu, že T je lineární zobrazení. Je-li $T : H \rightarrow H$ a $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků množiny $\mathcal{D}(T)$, pak

$$v_n = \sum_{j=1}^n a_j u_j$$

nazýváme n -tou *Galerkinovou aproximací* řešení rovnice (7.8), jestliže n -tice $a_1, \dots, a_n$ je řešením soustavy

$$(7.11) \quad \left(T \left(\sum_{j=1}^n a_j u_j \right), u_i \right) = (f, u_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Při praktické aplikaci *Galerkinovy metody* je třeba vyřešit následující dva problémy:

- dokázat existenci řešení soustavy (7.11);
- dokázat konvergenci Galerkinových aproximací k přesnému řešení rovnice (7.8).

Poznámka Jak již bylo řečeno v příkladu 7.3, Ritzova metoda vychází z hledání projekce přesného řešení u_0 v H_T na podprostor $\text{Lin}\{u_1, \dots, u_n\}$, což odpovídá hledání minima funkce

$$\left(T \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i - u_0 \right), \sum_{i=1}^n a_i u_i - u_0 \right)$$

jakožto funkce neznámých koeficientů $a_1, \dots, a_n$. Oproti tomu tzv. *metoda nejmenších čtverců* požaduje určení koeficientů $a_1, \dots, a_n$ tak, aby své nejmenší hodnoty nabývala veličina

$$\left\| T \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i - u_0 \right) \right\|^2 = \left\| T \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i \right) - f \right\|^2.$$

Označíme-li zúplnění množiny $\mathcal{D}(T)$ vzhledem ke skalárnímu součinu $(u, v)_{T^2} = (Tu, Tv)$ jako H_{T^2} , lze podobně jako v příkladu 7.3 ukázat, že hledané koeficienty $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ jsou takové, že

$$\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i u_i$$

je ortogonální projekce přesného řešení u_0 na podprostor $\text{Lin}\{u_1, \dots, u_n\}$. Za předpokladu, že $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ je úplný systém v prostoru H_{T^2} (a to je právě tehdy, když je posloupnost $\{Tu_n\}_{n=1}^\infty$ úplná v prostoru H), konvergují tyto projekce k řešení u_0 v normě prostoru H_{T^2} (a tedy i v normě prostoru H , pokud T je pozitivně definitní zobrazení).

Poznámka Existuje i řada dalších přibližných metod konstrukce minimalizující posloupnosti. Jednou z nejznámějších je *metoda největšího spádu* (nebo též *metoda gradientů*), která vychází z interpretace pojmu gradientu jako směru nejrychlejší změny funkcionálu. Podle konkrétní povahy problému se pak můžeme setkat s různými modifikacemi základních metod: např. *metoda sdružených gradientů* apod (viz. [11]).

Kapitola 8

Nelineární operátorové rovnice a jejich řešení

Nechť H je reálný Hilbertův prostor a

$$T : H \rightarrow H$$

je operátor definovaný na H s hodnotami v prostoru H . Buď $f \in H$ a zkoumejme, zda existuje řešení $u_0 \in H$ rovnice

$$(8.1) \quad Tu = f .$$

Cílem této kapitoly je formulovat některé podmínky postačující k tomu, aby $T(H) = H$. Jinými slovy, podmínky postačující k tomu, aby rovnice (8.1) měla řešení *pro libovolnou pravou stranu* $f \in H$.

Ilustrujme situaci na speciálním a dobře známém případě, kdy $H = \mathbb{R}$. Aby měla rovnice (8.1) řešení pro každou pravou stranu, stačí předpokládat, že $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a platí podmínka

$$(8.2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} Tx = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} Tx = -\infty ,$$

nebo podmínka

$$(8.3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} Tx = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} Tx = +\infty .$$

Potom již skutečně $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (zdůvodněte!).

Je-li však dimenze prostoru H alespoň 2, pak podmínky (8.2) a (8.3) nemají žádnou analogii, neboť symboly $+\infty$ a $-\infty$ ztrácejí smysl. Všimněme si však, že splnění podmínek (8.2) a (8.3) zaručíme pro $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také podmínkou

$$(8.4) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |Tx| = +\infty$$

a podmínkou, že T je monotónní funkce.

Podmínku (8.4) pak již můžeme v normovaném lineárním prostoru $(X, \|\cdot\|)$ zapsat analogicky následujícím způsobem

$$(8.5) \quad \lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \|Tu\| = \infty .$$

Definice 8.1 Necht H je reálný Hilbertův prostor. Zobrazení $T : H \rightarrow H$, které splňuje podmínku (8.5), se nazývá *slabě koercitivní*.

Jako definici monotónní funkce (např. pro neklesající funkci) obvykle používáme implikaci

$$(8.6) \quad x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow Tx \leq Ty .$$

Převedení této definice do normovaného lineárního prostoru $(X, \|\cdot\|)$ by znamenalo zavést na množině X uspořádání. Abychom se tomu vyhnuli, využijeme toho, že (8.6) je ekvivalentní s platností nerovnosti

$$(8.7) \quad (x - y) \cdot (Tx - Ty) \geq 0$$

pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$. Budeme-li tečku ve vztahu (8.7) považovat za skalární součin v Hilbertově prostoru $H = \mathbb{R}$, dojdeme přirozeným způsobem k pojmu neklesajícího zobrazení.

Definice 8.2 Buď H reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$. Řekneme, že zobrazení $T : H \rightarrow H$ je *monotónní zobrazení (operátor)*, jestliže platí

$$(8.8) \quad (u - v, Tu - Tv) \geq 0$$

pro libovolnou dvojici bodů $u, v \in H$.

Jednou ze základních vět této kapitoly bude tvrzení, že pro spojitě monotónní a slabě koercitivní zobrazení T má rovnice (8.1) řešení pro libovolnou pravou stranu $f \in H$.

8.1 Variační metoda řešení nelineárních rovnic

Nejprve budeme definovat některá speciální zobrazení.

Definice 8.3 Zobrazení T reálného Hilbertova prostoru H do H se nazývá

- (i) *omezené*, jestliže obraz každé omezené podmnožiny prostoru H je omezená podmnožina prostoru H ;
- (ii) *koercitivní*, jestliže

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{(Tu, u)}{\|u\|} = +\infty .$$

Pozorování Buď H reálný Hilbertův prostor, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionál (obecně nelineární) a $h \in H$. Předpokládejme, že existuje Gâteauxova derivace $Df(u)$ funkcionálu f v libovolném bodě $u \in H$. K tomu, aby existoval prvek $u_0 \in H$ tak, že $Df(u_0) = h$, je nutné a stačí, aby existoval bod $u_0 \in H$ vyhovující rovnici $Dg(u_0) = 0$, kde

$$(8.9) \quad g : u \mapsto f(u) - (u, h) .$$

(Zdůvodněte!)

Lemma 8.1 *Buď g funkcionál definovaný na reálném Hilbertově prostoru H a Dg jeho Gâteauxova derivace. Nechť $Dg : H \rightarrow H$ je monotónní zobrazení. Potom g je slabě zdola polospojité funkcionál na prostoru H .*

Důkaz Buďte $u, v \in H$. Podle věty o střední hodnotě existuje $t \in (0, 1)$ tak, že platí

$$(8.10) \quad \begin{aligned} g(v) - g(u) &= \left(v - u, Dg(u + t(v - u)) \right) = \\ &= (v - u, Dg(u)) + \left(v - u, Dg(u + t(v - u)) - Dg(u) \right) \geq \\ &\geq (v, Dg(u)) - (u, Dg(u)) , \end{aligned}$$

neboť vzhledem k monotónnosti je $(v - u, Dg(u + t(v - u)) - Dg(u)) \geq 0$. Nechť nyní $\{u_n\}$ je posloupnost prvků z prostoru H , která slabě konverguje k prvku u , tj. platí také

$$(u_n, Dg(u)) \rightarrow (u, Dg(u)) .$$

Odtud a z nerovnosti (8.10) vyplývá, že

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} g(u_n) \geq g(u) - (u, Dg(u)) + \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, Dg(u)) = g(u) .$$

■

Lemma 8.2 *Buď H reálný Hilbertův prostor a $Dg : H \rightarrow H$ Gâteauxova derivace funkcionálu $g : H \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť Dg je koercitivní a omezené zobrazení. Potom funkcionál g je slabě koercitivní.*

Důkaz Podle věty 5.5 (o střední hodnotě) platí

$$(8.11) \quad g(u) = g(0) + \int_0^1 (tu, Dg(tu)) \frac{dt}{t} = g(0) + \int_0^{\|u\|} \left(\tau \frac{u}{\|u\|}, Dg\left(\tau \frac{u}{\|u\|}\right) \right) \frac{d\tau}{\tau}$$

pro libovolné $u \in H$, $u \neq 0$. Protože Dg je koercitivní zobrazení, existuje $M \geq 0$ tak, že platí

$$\frac{1}{\tau} \left(\tau \frac{u}{\|u\|}, Dg\left(\tau \frac{u}{\|u\|}\right) \right) \geq 1$$

pro libovolné $\tau \geq M$ a $u \in H$, $u \neq 0$. (Zdůvodněte!) Dále je

$$\sup_{\substack{\tau \in (0, M) \\ u \in H, u \neq 0}} \left\| Dg \left(\tau \frac{u}{\|u\|} \right) \right\| = m < \infty,$$

neboť Dg je omezené zobrazení. Tedy podle (8.11) je

$$g(u) = g(0) + \int_0^M \dots + \int_M^{\|u\|} \dots \geq g(0) - Mm + \|u\| - M$$

pro libovolné $u \in H$, $u \neq 0$. Z poslední nerovnosti ihned plyne tvrzení. ■

Následující dvě věty jsou stěžejní tvrzení tohoto odstavce.

Věta 8.1 *Bud' H reálný Hilbertův prostor a $Df : H \rightarrow H$ Gâteauxova derivace funkcionálu $f : H \rightarrow \mathbb{R}$. Předpokládejme, že Df je monotónní, koercitivní a omezené zobrazení. Potom*

$$Df(H) = H.$$

Důkaz Podle našeho pozorování stačí dokázat, že funkcionál g definovaný vztahem (8.9) má kritický bod (tj. bod u_0 takový, že $Dg(u_0) = 0$). Protože však funkcionál g splňuje předpoklady lemmat 8.1 a 8.2, je slabě zdola polospojitém a slabě koercitivním funkcionálem na prostoru H . Podle věty 7.6 nabývá funkcionál g svého minima na prostoru H a podle Eulerovy nutné podmínky (věta 5.7) je tento bod bodem kritickým. ■

Věta 8.2 *Nechť H je reálný Hilbertův prostor a $f' : H \rightarrow H$ je Fréchetova derivace funkcionálu $f : H \rightarrow \mathbb{R}$. Předpokládejme, že f' je spojitý, monotónní, slabě koercitivní a omezené zobrazení. Potom f' zobrazuje prostor H na prostor H .*

Důkaz této věty zde provádět nebudeme. Čtenář jej může nalézt v doporučené literatuře. Poznamenejme pouze, že předpoklad spojitosti Fréchetovy derivace f' lze nahradit poněkud slabším předpokladem její tzv. „hemispojivosti“.

Cvičení 8.1 Zobrazení $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$U : (x, y) \mapsto (y, -x)$$

je monotónní a slabě koercitivní. Není však koercitivní. Dokažte!

Cvičení 8.2 Ukažte, že každé koercitivní zobrazení $T : H \rightarrow H$ je i slabě koercitivní!

8.2 Teorie monotónních operátorů

V tomto odstavci se soustředíme na důkaz tvrzení vět 8.1 a 8.2 pro tzv. *nepotenciální operátory* $T : H \rightarrow H$, tj. zobrazení T nebude nutně Gâteauxova či Fréchetova derivace nějakého funkcionálu $f : H \rightarrow \mathbb{R}$. Základním tvrzením je zde následující věta.

Věta 8.3 *Bud' H reálný Hilbertův prostor a $T : H \rightarrow H$ spojitý, monotónní a slabě koerzivní zobrazení. Potom*

$$T(H) = H .$$

Důkaz této věty je založen na následujícím tvrzení se silnějšími předpoklady.

Věta 8.4 *Bud' H reálný Hilbertův prostor a $S : H \rightarrow H$ spojitý zobrazení. Nechť existuje $c > 0$ tak, že pro $u, v \in H$ je*

$$(8.12) \quad (Su - Sv, u - v) \geq c\|u - v\|^2 .$$

Potom má rovnice $Su = f$ právě jedno řešení pro libovolné $f \in H$. Speciálně tedy platí

$$S(H) = H .$$

Důkaz této věty provedeme za dodatečného předpokladu, že S splňuje Lipschitzovu podmínku, tj. existuje konstanta $M > 0$ tak, že

$$(8.13) \quad \|Su - Sv\| \leq M\|u - v\|$$

pro libovolné $u, v \in H$. Existenci řešení rovnice

$$Su = f ,$$

kde f je libovolný prvek z H , převedeme na hledání pevného bodu zobrazení

$$S_\varepsilon u = u - \varepsilon(Su - f) ,$$

pro vhodně zvolené $\varepsilon > 0$, pro které je S_ε *kontrahující zobrazení* (definice 3.1). Platí:

$$\begin{aligned} \|S_\varepsilon u - S_\varepsilon v\|^2 &= \|(u - v) - \varepsilon(Su - Sv)\|^2 = \\ &= \|u - v\|^2 - 2\varepsilon(Su - Sv, u - v) + \varepsilon^2\|Su - Sv\|^2 \leq \\ &\leq \|u - v\|^2 (1 - 2\varepsilon c + \varepsilon^2 M^2) \end{aligned}$$

(využili jsme (8.12) a (8.13) - zdůvodněte!). Pro $\varepsilon = \frac{c}{M^2}$ je konstanta

$$(1 - 2\varepsilon c + \varepsilon^2 M^2) = \left(1 - \frac{c^2}{M^2}\right)$$

menší než 1, neboť bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $M > c$. Na základě Banachovy věty o kontrakci (věta 3.1) existuje právě jedno $u_f \in H$ tak, že

$$S_\varepsilon u_f = u_f ,$$

neboli

$$S u_f = f$$

(zdůvodněte!).

■

Princip důkazu "silnější" věty 8.3 nyní spočívá v tom, že zavedeme operátory

$$T_n : H \rightarrow H, \quad T_n : u \mapsto \frac{1}{n}u + Tu, \quad u \in H ,$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Každý z operátorů T_n zřejmě splňuje podmínku (8.12) (zdůvodněte!), a tedy $T_n(H) = H$. Pro dané $f \in H$ tedy ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje prvek $u_n \in H$ takový, že platí

$$T_n u_n = f .$$

Ve zbytku důkazu se ukáže, že $\{u_n\}$ je omezená posloupnost, že vybraná podposloupnost slabě konverguje k nějakému prvku $u_0 \in H$ a že tento prvek je řešením rovnice

$$Tu = f .$$

Poznámka Operátor S , který splňuje podmínku (8.12), se nazývá *silně monotónní*. Silně monotónní zobrazení je prosté, koercitivní zobrazení a jeho inverzní zobrazení splňuje Lipschitzovu podmínku. Skutečně, snadno ověříme, že $Su = Sv$ implikuje $u = v$. Zvolíme-li v (8.12) $v = o$, obdržíme

$$(u, Su - So) \geq c\|u\|^2$$

a odtud již okamžitě plyne

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{(u, Su)}{\|u\|} = \infty$$

(zdůvodněte podrobně).

Označíme-li S^{-1} inverzní zobrazení k zobrazení S , můžeme vztah (8.12) psát takto:

$$(S^{-1}U - S^{-1}V, U - V) \geq c\|S^{-1}U - S^{-1}V\|^2 ,$$

kde $U = Su$, $V = Sv$. Pomocí Schwarzovy nerovnosti odtud dostaneme

$$\begin{aligned} \|S^{-1}U - S^{-1}V\|^2 &\leq \frac{1}{c} |(S^{-1}U - S^{-1}V, U - V)| \leq \\ &\leq \frac{1}{c} \|S^{-1}U - S^{-1}V\| \|U - V\| , \end{aligned}$$

a tedy

$$\|S^{-1}U - S^{-1}V\| \leq \frac{1}{c}\|U - V\| .$$

Zobrazení S^{-1} tedy splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantou $\frac{1}{c} > 0$.

Příklad 8.1 Uvažujme okrajovou úlohu

$$(8.14) \quad \begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) &= f(x) , \ x \in (0, 1) , \\ u(0) = u(1) &= 0 , \end{cases}$$

kde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá funkce* a $f \in L^2(0, 1)$. Úlohu budeme chápat v zobecněném (slabém) smyslu a přeformulujeme jí do tvaru *operátorové rovnice* v Sobolevově prostoru $H = W_0^{1,2}(0, 1)$, který je reálným separabilním Hilbertovým prostorem. Dodejme pro úplnost, že prostor H je definován jako zúplnění prostoru

$$Z = \{u \in C^1([0, 1]); u(0) = u(1) = 0\}$$

vzhledem k normě

$$\|u\| = \|u\|_{1,2} = \left[\int_0^1 (u'(x))^2 dx \right]^{1/2}$$

(viz definici 2.25 a následující poznámku (ii)).

Jestliže naši rovnici vynásobíme funkcí $v \in H$ a integrujeme přes $(0, 1)$, potom integraci per partes v prvním členu a s využitím okrajových podmínek dostaneme integrální identitu

$$(8.15) \quad \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 g(u(x))v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx .$$

Slabou formulací okrajové úlohy (8.14) pak rozumíme úlohu najít funkci $u \in H$ takovou, že integrální identita (8.15) platí pro každé $v \in H$. Definujme operátory $J, G : H \rightarrow H$ a prvek $f^* \in H$ následujícím způsobem:

$$(Ju, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx ,$$

$$(Gu, v) = \int_0^1 g(u(x))v(x) dx ,$$

$$(f^*, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

pro každé $u, v \in H$. Ověřte sami, že jde skutečně o operátory z H do H a o prvek z prostoru H ! Za cvičení dále ověřte, že J je lineární a omezený (a tedy spojitý) operátor, který je silně monotónní a koercitivní a splňuje Lipschitzovu podmínku. Integrální identita (8.15) (tj. nalezení slabého řešení okrajové úlohy (8.14)) tedy vlastně znamená řešení operátorové rovnice

$$Su = f^* ,$$

kde

$$S = J + G .$$

Je-li $g \equiv 0$, potom na základě věty 8.4 existuje právě jedno *slabé řešení* naší okrajové úlohy. Zajímavější je případ $g \not\equiv 0$. Potom je $S = J + G$ obecně nelineární operátor. Předpokládejme, že g je *omezená a neklesající funkce* (např. $g(t) = \arctg t$, $t \in \mathbb{R}$). Potom S je silně monotónní operátor:

$$\begin{aligned} (Su - Sv, u - v) &= \\ &= \int_0^1 (u'(x) - v'(x))^2 dx + \int_0^1 [g(u(x)) - g(v(x))] [u(x) - v(x)] dx \geq \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

pro libovolná $u, v \in H$ (zdůvodněte). Je-li navíc g funkce splňující Lipschitzovu podmínku,

$$|g(s) - g(t)| \leq M|s - t|, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

pak také operátor S splňuje Lipschitzovu podmínku:

$$\begin{aligned} \|Su - Sv\| &= \sup_{\|w\| \leq 1} (Su - Sv, w) \leq \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left\{ \int_0^1 (u'(x) - v'(x)) w'(x) dx + \int_0^1 [g(u(x)) - g(v(x))] w(x) dx \right\} \leq \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left\{ \left(\int_0^1 |u' - v'|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (w')^2 dx \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^1 [g(u) - g(v)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 w^2 dx \right)^{1/2} \right\} \leq \\ &\leq \|u - v\| + M \left(\int_0^1 |u - v|^2 dx \right)^{1/2} \leq (1 + Mc) \|u - v\| \end{aligned}$$

pro libovolná $u, v \in H$. Poznamenejme, že jsme využili Hölderovu nerovnost a nerovnost

$$\int_0^1 |u|^2 dx \leq c \int_0^1 |u'|^2 dx,$$

která platí pro libovolné $u \in H = W_0^{1,2}(0,1)$ (z této nerovnosti totiž vyplývá ekvivalence normy $\|\cdot\|_{1,2}$ s normou

$$\|u\|_{1,2} = \left[\int_0^1 (u'(x))^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int_0^1 u^2(x) dx \right]^{1/2} !).$$

Z věty 8.4 tedy opět plyne, že naše okrajová úloha má právě jedno slabé řešení.

Ukazuje se, že podmínky na funkci g je možné podstatným způsobem "zeslabit" při zachování existence slabého řešení naší okrajové úlohy. Místo věty 8.4 se pak využívá "silnější" věty 8.3, která nevyžaduje silnou monotónnost ani splnění Lipschitzovy podmínky.

□

8.3 Princip kontrakce a neexpanzivní zobrazení

V průběhu přednášky z funkcionální analýzy jsme se několikrát setkali s tím, že místo operátorové rovnice typu (8.1) je třeba řešit operátorovou rovnici ve tvaru

$$(8.16) \quad Tu = u .$$

Základním tvrzením, které se týká řešitelnosti rovnice (8.16), je Banachova věta o kontrakci (někdy zvaná Banachova věta o pevném bodu) - věta 3.1. Připomeňme, že zobrazení $T : X \rightarrow X$ úplného metrického prostoru (X, ρ) do sebe se nazývá kontrahující, jestliže platí

$$\rho(Tu, Tv) \leq q\rho(u, v)$$

pro libovolné dva prvky $u, v \in X$ s konstantou

$$q < 1 .$$

Snaha zobecňovat Banachův princip kontrakce je motivována řadou praktických problémů a je vedena ve směru „zvětšování konstanty q “ tak, aby vzniklo tvrzení o pevném bodě i pro $q = 1$.

Definice 8.4 Zobrazení $T : X \rightarrow X$ úplného metrického prostoru (X, ρ) do sebe nazveme *neexpanzivní*, jestliže pro každé dva prvky $u, v \in X$ platí

$$\rho(Tu, Tv) \leq \rho(u, v) .$$

Poznámka Nahradíme-li kontrakci ve větě 3.1 neexpanzivním zobrazením, tvrzení věty platit nemusí, jak ukážeme v následujícím příkladu. Chceme-li tedy vyslovit větu o pevném bodu pro neexpanzivní zobrazení, musíme přidat některé další předpoklady.

Příklad 8.2 Položme $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ a definujme zobrazení $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$T : x \mapsto x - \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} .$$

Potom T je neexpanzivní zobrazení:

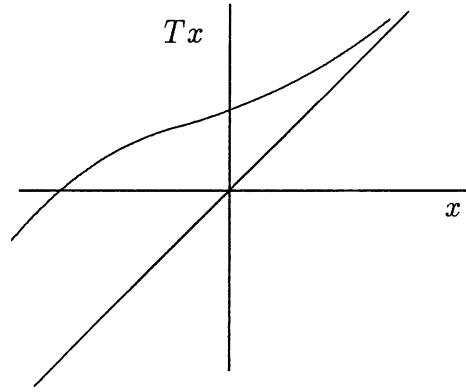
$$|Tx - Ty| = |x - y - \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y| \leq |x - y| .$$

(Dokažte výše uvedenou nerovnost a zdůvodněte, proč T není kontrakce!) Přitom platí

$$Tx \neq x$$

pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

□



Poznámka Asi nejjednodušší neexpanzivním zobrazením v obecném úplném metrickém prostoru X , které nemá pevný bod je „posunutá identita“: $Tu = u + c$, kde $c \in X$ je pevně zvolený prvek.

Věta 8.5 *Nechť K je neprázdná, omezená, konvertní a uzavřená podmnožina reálného Hilbertova prostoru H . Nechť $T : K \rightarrow K$ je neexpanzivní zobrazení. Potom existuje bod $u_0 \in K$ tak, že platí*

$$Tu_0 = u_0 .$$

Princip důkazu této věty spočívá především v tom, že zobrazení T lze vhodným způsobem rozšířit na celý prostor H : Existuje $\hat{T} : H \rightarrow H$ takové, že platí

- (a) $Tu = \hat{T}u$ pro $u \in K$;
- (b) $\|\hat{T}u - \hat{T}v\| \leq \|u - v\|$ pro $u, v \in H$;
- (c) $\hat{T}(H) \subset K$

(dokázat to však není jednoduché - viz [2]). Protože $\hat{T}$ je vzhledem k (b) neexpanzivní v celém H , je zobrazení $I - \hat{T}$ monotónní a spojitý (zdůvodněte). Protože K je omezená množina, platí

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \|u - \hat{T}u\| \geq \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} (\|u\| - \|\hat{T}u\|) = +\infty ,$$

a tedy $I - \hat{T}$ je slabě koercitivní zobrazení. Podle věty 8.3 tedy existuje bod $u_0 \in H$ tak, že $u_0 - \hat{T}u_0 = 0$, tj.

$$u_0 = \hat{T}u_0 .$$

Protože však $\hat{T}u_0 \in K$, je také $u_0 \in K$ a platí $\hat{T}u_0 = Tu_0$, tj. $Tu_0 = u_0$.

Podobně jako v případě věty o kontrakci, je možné i zde podat „konstruktivní“ důkaz věty 8.5, který poskytuje i jistý návod pro numerický výpočet pevného bodu:

Buď $v_0 \in K$ pevný prvek a pro $s \in (0, 1)$ definujme zobrazení

$$(8.17) \quad T_s(u) = sT(u) + (1 - s)v_0 .$$

Potom $T_s(K) \subset K$ (zdůvodněte) a

$$(8.18) \quad \|T_s u - T_s v\| \leq s \|u - v\|$$

pro $u, v \in K$. Protože H je úplný metrický prostor a K je uzavřená množina, je K s metrikou indukovanou skalárním součinem Hilbertova prostoru H úplný metrický prostor. Podle Banachova principu kontrakce - věta 3.1 (T_s je kontrakce s konstantou s - viz (8.18)) pro každé $s \in (0, 1)$ existuje právě jedno $u_s \in K$ takové, že

$$(8.19) \quad T_s u_s = u_s .$$

Pro $n \geq 2$ a $s_n = 1 - \frac{1}{n}$ označme $u_n = u_{s_n}$. Protože K je slabě sekvenciálně kompaktní, existuje vybraná podposloupnost $\{u_{n_j}\}$, která slabě konverguje k prvku u_0 . Dokážeme, že $Tu_0 = u_0$. Platí

$$\begin{aligned} \|u_{n_j} - Tu_0\|^2 &= \|u_{n_j} - u_0 + u_0 - Tu_0\|^2 = \\ &= \|u_{n_j} - u_0\|^2 + \|u_0 - Tu_0\|^2 + 2(u_{n_j} - u_0, u_0 - Tu_0) \end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{j \rightarrow \infty} [\|u_{n_j} - Tu_0\|^2 - \|u_{n_j} - u_0\|^2] = \|u_0 - Tu_0\|^2 .$$

Dále máme

$$\|u_{n_j} - Tu_0\| \leq \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + \|Tu_{n_j} - Tu_0\| \leq \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + \|u_{n_j} - u_0\| .$$

Protože ze vztahů (8.17) a (8.19) (kde $s = 1 - \frac{1}{n_j}$) plyne

$$Tu_{n_j} - u_{n_j} = \frac{1}{n_j}(Tu_{n_j} - u_0) ,$$

je

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|Tu_{n_j} - u_{n_j}\| = 0$$

a tedy

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} [\|u_{n_j} - Tu_0\| - \|u_{n_j} - u_0\|] \leq 0 .$$

Odtud tedy vyplývá

$$\|u_0 - Tu_0\|^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} [\|u_{n_j} - Tu_0\|^2 - \|u_{n_j} - u_0\|^2] \leq 0$$

a tím je věta dokázána.

Cvičení 8.3 Buď H reálný Hilbertův prostor a $T : H \rightarrow H$ kontrahující zobrazení. Potom zobrazení

$$I - T : H \rightarrow H$$

je surjektivní zobrazení. [Návod: Použijte větu 8.5.]

Cvičení 8.4 Necht

$$K = \{u \in C([0, 1]); 0 \leq u(t) \leq 1, u(0) = 0, u(1) = 1\},$$

$$T : u(t) \mapsto tu(t) .$$

Potom T je neexpanzivní zobrazení zobrazující K do K , které nemá v množině K žádný pevný bod. Jak si vysvětlujete vztah tohoto tvrzení a věty 8.5?

8.4 Schauderovy principy (Schauderovy věty o pevném bodu)

V tomto odstavci budeme pokračovat ve studiu řešitelnosti operátorové rovnice (8.1) a ukážeme, jak se problém řešitelnosti v prostorech nekonečné dimenze převede na problém řešitelnosti téže rovnice na prostorech konečné dimenze.

Základním tvrzením zde bude tzv. *Brouwerova věta o pevném bodu*, jejíž důkaz (ve speciálním případě) provedeme později na základě teorie stupně zobrazení.

Věta 8.6 (BROUWER) *Bud' K uzavřená, neprázdná, konvexní a omezená podmnožina v konečněrozměrném Banachově prostoru X . Necht' F je spojité zobrazení množiny K do K . Potom existuje $u_0 \in K$ tak, že*

$$Fu_0 = u_0 .$$

V následujícím příkladu ukážeme, že tvrzení Brouwerovy věty obecně neplatí, vypustíme-li předpoklad konečné dimenze prostoru X .

Příklad 8.3 (S. KAKUTANI) Necht' H je separabilní Hilbertův prostor, $K = \{u \in H; \|u\| \leq 1\}$. Necht' $\{e_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, je ortonormální báze prostoru H . Budiž $U \in \mathcal{L}(H, H)$ takové zobrazení, že platí

$$Ue_n = e_{n+1} .$$

Takové zobrazení je izomorfismus prostoru H na H (zdůvodněte). Položme nyní

$$F : u \mapsto \frac{1}{2}(1 - \|u\|)e_0 + Uu .$$

Snadno se ukáže, že F je spojité zobrazení a $F(K) \subset K$ (ověřte!). Ukážeme, že F nemá pevný bod. Předpokládejme sporem, že pro

$$u = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i e_i$$

platí

$$Fu = u .$$

Je tedy jednak

$$u - Uu = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (a_i - a_{i-1})e_i ,$$

jednak

$$u - Uu = u - Fu + \frac{1}{2}(1 - \|u\|)e_0 ,$$

tj.

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} (a_i - a_{i-1})e_i = \frac{1}{2}(1 - \|u\|)e_0 .$$

Odtud vyplývá, že musí být

$$a_i = a_{-1}, \quad i = -2, -3, \dots, \quad a_i = a_0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad a_0 - a_{-1} = \frac{1}{2}(1 - \|u\|)$$

(zdůvodněte). Protože však řada

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 = \|u\|^2$$

konverguje, musí být $a_i = 0$ pro všechna $i \in \mathbb{Z}$, tj. také $u = o$. V tom případě však přímo z definice F vyplývá, že $F(o) \neq o$ a to je spor.

□

Ukazuje se, že když v případě nekonečnědimenzionálního prostoru uvažujeme operátor T v jistém smyslu "blízký" k operátoru s konečnědimenzionálním oborem hodnot, potom bude věta o pevném bodu platit i v tomto případě.

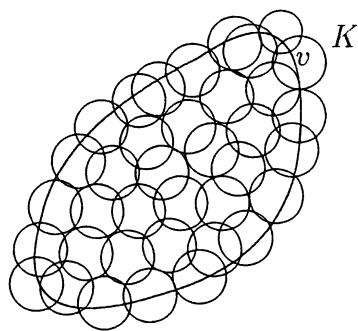
Definice 8.5 Množina $K \subset X$ (v Banachově prostoru X) se nazývá *relativně kompaktní*, je-li její uzávěr $\overline{K}$ kompaktní množina v X .

Definice 8.6 Nechť $T : X \rightarrow X$ je operátor zobrazující Banachův prostor X do sebe. Pak T nazýváme *kompaktním operátorem*, je-li T spojitě zobrazení a $T(M)$ je relativně kompaktní množina pro každou omezenou podmnožinu $M \subset X$.

Všimněte si, že v případě lineárního operátoru T nemusíme explicitně v definici kompaktního operátoru vyžadovat jeho spojitost - viz definici 3.6 (zdůvodněte to!).

Poznámka Vzhledem k tomu, že otevřené množiny (vzhledem k normě $\|\cdot\|$ na prostoru X) tvoří topologii na X , můžeme z každého otevřeného pokrytí kompaktní množiny $\overline{K}$ vždy vybrat konečné podpokrytí (viz předmět Matematická analýza V). Odtud vyplývá, že je-li K relativně kompaktní množina v Banachově prostoru $(X, \|\cdot\|)$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existují body $v_1, v_2, \dots, v_p \in X$ tak, že pro libovolné $v \in K$ je

$$\min_{i=1, \dots, p} \|v - v_i\| < \varepsilon .$$



Pro neprázdnou množinu K lze body $v_1, \dots, v_p$ vybrat z prvků množiny K . V tomto případě se množina $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ nazývá ε -sít množiny K .

Je-li $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ε -sít relativně kompaktní množiny K , položíme

$$F_\varepsilon : u \mapsto \frac{\sum_{i=1}^p m_i(u) v_i}{\sum_{i=1}^p m_i(u)}, \quad u \in K,$$

kde

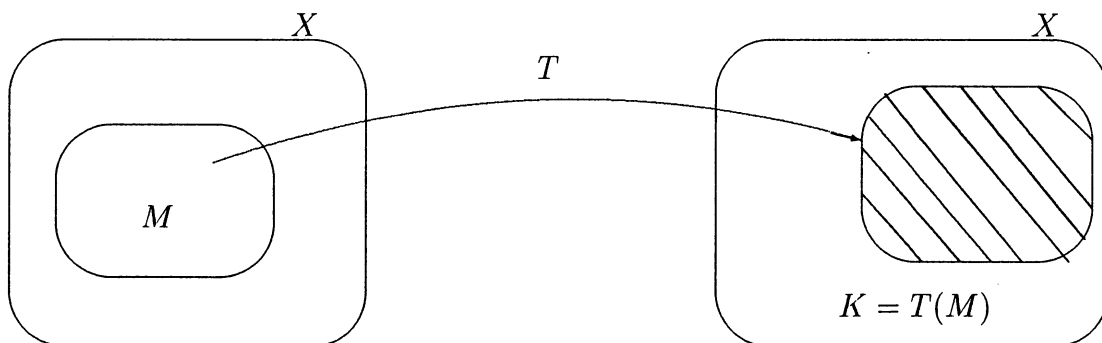
$$m_i(u) = \begin{cases} \varepsilon - \|u - v_i\|, & \text{je-li } \|u - v_i\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{je-li } \|u - v_i\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Potom dostáváme následující pomocné tvrzení.

Lemma 8.3 *Buď M omezená podmnožina Banachova prostoru X a $T : M \rightarrow X$ kompaktní zobrazení na M . Položme $K = T(M)$ a buď F_ε zobrazení na K definované výše. Potom platí*

$$(8.20) \quad \|Tu - F_\varepsilon Tu\| < \varepsilon$$

pro libovolné $u \in M$.



Důkaz Připomeňme nejprve, že je-li T kompaktní zobrazení, je $T(M)$ relativně kompaktní množina a zobrazení F_ε tedy lze na této množině definovat. Vzhledem k jeho definici platí

$$\|Tu - F_\varepsilon Tu\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^p m_i(Tu) Tu - \sum_{i=1}^p m_i(Tu) v_i}{\sum_{i=1}^p m_i(Tu)} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^p m_i(Tu) \|Tu - v_i\|}{\sum_{i=1}^p m_i(Tu)} < \varepsilon .$$

(Zdůvodněte podrobně!) ■

Věta 8.7 (Schauderův princip) *Buď K uzavřená, neprázdná, konvexní a omezená podmnožina Banachova prostoru X . Nechť T je kompaktní zobrazení definované na K a $T(K) \subset K$. Potom existuje $u_0 \in K$ tak, že*

$$Tu_0 = u_0 .$$

Důkaz Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť X_n označuje lineární obal $\frac{1}{n}$ -sítě množiny $T(K)$. Lineární prostor X_n s normou indukovanou prostorem X je Banachův prostor konečné dimenze. Položme

$$K_n = K \cap X_n, \quad T_n = F_{\frac{1}{n}} T : K_n \rightarrow X_n ,$$

kde $F_{\frac{1}{n}}$ je zobrazení z lemmatu 8.3. Množina K_n je uzavřená (v X_n), konvexní, omezená a neprázdná a T_n je spojitě zobrazení na K_n . Vzhledem k definici $F_{\frac{1}{n}}$ a protože K_n je konvexní množina, platí

$$T_n(K_n) \subset K_n$$

(zdůvodněte podrobně). Podle Brouwerovy věty pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $u_n \in K_n \subset K$ tak, že

$$u_n = T_n u_n .$$

Navíc podle vztahu (8.20) platí

$$\|Tu_n - u_n\| = \|Tu_n - T_n u_n\| < \frac{1}{n}$$

a tedy

$$(8.21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n - u_n\| = 0 .$$

Protože $Tu \in \overline{T(K)}$ a $\overline{T(K)}$ je kompaktní množina, existuje vybraná posloupnost $\{u_{n_k}\}$ a bod $u_0 \in \overline{T(K)}$ tak, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Tu_{n_k} = u_0 .$$

Podle (8.21) je však také

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = u_0 .$$

Protože T je spojitě zobrazení, je $\lim_{k \rightarrow \infty} Tu_{n_k} = Tu_0$, tj.

$$Tu_0 = u_0 .$$

■

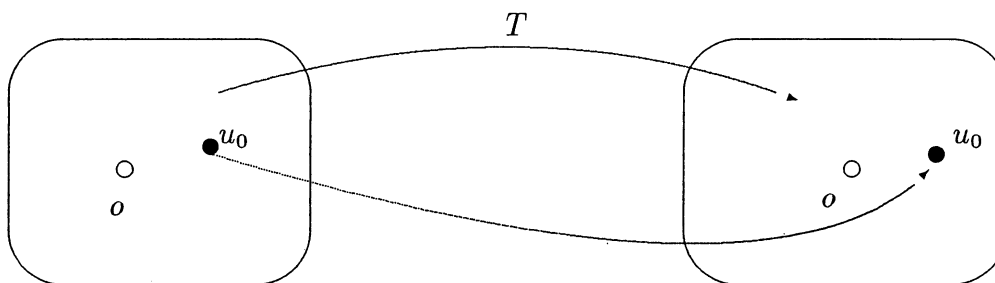
Ukážeme nyní, že z Brouwerovy věty vyplývá ještě jiná věta o pevném bodu.

Definice 8.7 Buď E podmnožina Hilbertova prostoru H . Řekneme, že operátor $T : E \rightarrow H$ je *slabě spojitý* na E , jestliže pro každé $u \in E$ a libovolnou posloupnost $\{u_n\} \subset E$ takovou, že $u_n \rightharpoonup u$, platí $Tu_n \rightharpoonup Tu$.

Poznámka Poznamenejme, že pojem slabé spojitosti operátoru T je slabší než pojem kompaktnosti $\mathcal{K}$. Přesněji, každý kompaktní operátor T je slabě spojitým operátorem, ale opačná implikace neplatí. Proto musíme v následující větě „platit jistou daň“ za obecnější typ operátoru v podobě speciálnějšího prostoru a speciálnější množiny K .

Věta 8.8 (slabý Schauderův princip) *Buď H reálný separabilní Hilbertův prostor, $K = \{u \in H; \|u\| \leq 1\}$. Nechť $T : K \rightarrow K$ je slabě spojitě zobrazení na K takové, že $T(K) \subset K$. Potom existuje $u_0 \in K$ tak, že*

$$Tu_0 = u_0 .$$



Důkaz Nechť $\{e_n\}$ je ortonormální báze v H . Položme

$$H_n = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_n\}, \quad K_n = K \cap H_n .$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ buď $P_n : H \rightarrow H_n$ ortogonální projekce prostoru H na prostor H_n , tj. spojitě samoadjungované zobrazení takové, že

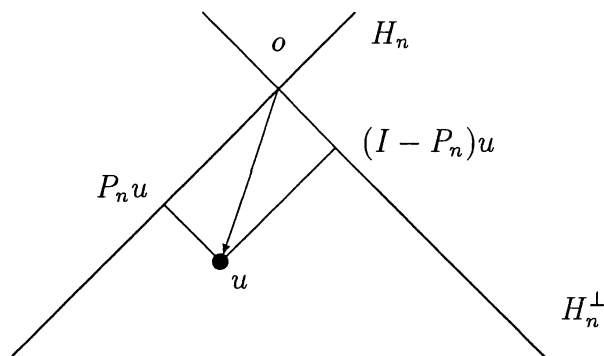
$$P_n u \in H_n \quad \text{pro všechna } u \in H ,$$

$$P_n u = u \quad \text{pro všechna } u \in H_n ,$$

$$(P_n u - u, v) = 0 \quad \text{pro všechna } u \in H, v \in H_n .$$

Zobrazení $T_n = P_n T$ zobrazuje konvexní, uzavřenou, omezenou a neprázdnou množinu K_n do K_n a je spojitě. Podle Brouwerovy věty pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $u_n \in K_n \subset K$ tak, že

$$T_n u_n = u_n .$$



Protože K je slabě sekvenciálně kompaktní množina, existuje vybraná podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ a prvek $u_0 \in K$ tak, že

$$(8.22) \quad P_{n_k} T u_{n_k} = T_{n_k} u_{n_k} = u_{n_k} \rightharpoonup u_0 .$$

Protože T je slabě spojitě zobrazení, platí

$$T u_{n_k} \rightharpoonup T u_0 .$$

Vzhledem k samoadjungovanosti zobrazení P_{n_k} pak dostáváme

$$(P_{n_k} T u_{n_k}, v) = (T u_{n_k}, P_{n_k} v - v) + (T u_{n_k}, v) \rightarrow (T u_0, v)$$

pro každé $v \in H$ (využili jsme toho, že $T u_{n_k} \rightharpoonup T u_0$, $P_{n_k} v \rightarrow v$ a $|(T u_{n_k}, P_{n_k} v - v)| \leq \|T u_{n_k}\| \|P_{n_k} v - v\| \rightarrow 0$). Platí tedy

$$(8.23) \quad \underbrace{\|T u_{n_k}\|}_{\leq 1} \|P_{n_k} v - v\| \rightarrow 0 \quad P_{n_k} T u_{n_k} \rightharpoonup T u_0 .$$

Ze vztahů (8.22), (8.23) a z jednoznačnosti slabé limity vyplývá $T u_0 = u_0$. ■

Poznámka (i) Dokázané věty o pevném bodu platí v řadě případů v obecnějších prostorech. Tak například poslední tvrzení (věta 8.8) platí po vypuštění předpokladu separability a reálnosti prostoru H a obecněji pro každou neprázdnou uzavřenou a omezenou konvexní množinu K .

(ii) Na rozdíl od Banachova principu kontrakce netvrdí věty 8.6 - 8.9 nic o jednoznačnosti řešení rovnice $Tu = u$. Existují jednoduché příklady, které ukazují, že v takových případech může mít rovnice $Tu = u$ dokonce nekonečně mnoho řešení.

Cvičení 8.5 Dokažte následující tvrzení: *Je-li H konečněrozměrný Hilbertův prostor, pak zobrazení $F : H \rightarrow H$ je spojitě na množině $M \subset H$ právě tehdy, když je na množině M kompaktní.*

Kapitola 9

Teorie stupně zobrazení

V předcházející kapitole, kde jsme vyšetřovali řešitelnost operátorové rovnice $Tu = f$, hrál velmi důležitou roli předpoklad koercitivity (resp. slabé koercitivity) operátoru T . Řada praktických problémů však vede k operátorovým rovnicím, v nichž operátor tyto předpoklady nesplňuje. Mluvíme pak o *nekoercitivních úlohách* a při studiu jejich řešitelnosti hraje důležitou roli teorie *Brouwerova* a *Lerayova-Schauderova* stupně zobrazení.

9.1 Brouwerův stupeň zobrazení

Zásadní význam pro nás bude mít následující tvrzení.

Věta 9.1 *Bud' $R > 0$ a označme*

$$K(o, R) = \{x \in \mathbb{R}^N; \|x\| < R\} , \quad S(o, R) = \{x \in \mathbb{R}^N; \|x\| = R\} .$$

Budiž F spojitě zobrazení definované na $\overline{K}(o, R)$ s hodnotami v $\mathbb{R}^N$ a takové, že

$$F(x) \neq o \quad \text{pro každé } x \in S(o, R) .$$

Pak existuje celé číslo

$$d[F; K(o, R), o]$$

(které nazýváme *Brouwerův stupeň zobrazení F vzhledem ke kouli $K(o, R)$ a bodu o nebo jen krátce *stupeň zobrazení F*) tak, že platí:*

(a)

$$d[I; K(o, R), o] = 1 .$$

(b) *Jestliže*

$$d[F; K(o, R), o] \neq 0$$

pak existuje $x_0 \in K(o, R)$ takové, že

$$F(x_0) = o .$$

- (c) (Invariance vzhledem k homotopii) Bud' $h_t(x) = h(x, t)$ spojité zobrazení množiny $\overline{K}(o, R) \times \langle 0, 1 \rangle$ do $\mathbb{R}^n$ takové, že pro všechna $t \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro všechna $x \in S(o, R)$ je $h(x, t) \neq o$. Potom

$$d[h_t; K(o, R), o] = \Psi(t)$$

je konstantní funkcí proměnné $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Speciálně platí

$$d[h_0; K(o, R), o] = d[h_1; K(o, R), o] .$$

- (d) Je-li zobrazení F navíc liché (tj. platí-li $F(x) = -F(-x)$ pro všechna $x \in \overline{K}(o, R)$), pak

$$d[F; K(o, R), o]$$

je liché (a tedy nenulové) číslo.

Poznámka (použití a význam stupně zobrazení) Je důležité si uvědomit, že věta 9.1 zaručuje existenci řešení rovnice

$$(9.1) \quad F(x) = o .$$

Nedává však žádný vzorec pro výpočet stupně $d[F; K(o, R), o]$. Základní význam stupně zobrazení vyplývá z vlastnosti (b):

Nechť je dáno zobrazení F na prostoru $\mathbb{R}^N$. Naším úkolem je zjistit, zda rovnice (9.1) má řešení. Jestliže rovnice (9.1) má řešení na $S(o, R)$, pak není třeba dále nic zkoumat. Jestliže platí $F(x) \neq o$ pro všechna $x \in S(o, R)$ (což je druhá eventualita), pak věta 9.1 nám dává návod k jednomu možnému přístupu. Pokud se totiž nějakým způsobem podaří zjistit, že zobrazení F má vzhledem ke kouli $K(o, R)$ a bodu o *nenulový stupeň*, pak již z vlastnosti (b) stupně zobrazení plyne, že uvažovaná rovnice (9.1) má alespoň jedno řešení v množině $K(o, R)$. Právě toto je *význam* Brouwerova stupně zobrazení.

V souvislosti s výše provedenou úvahou se však nabízí přirozená otázka: "Jak pro konkrétní zobrazení F zjistit, že jeho stupeň je nenulový?" Především víme, že každé liché zobrazení má nenulový stupeň (vlastnost (d)) a speciálně, že stupeň identity je 1 (vlastnost (a)). Pokud zobrazení F není identita nebo alespoň liché, pak nám nabízí další možnost vlastnost (c): Můžeme se pokusit o "homotopické spojení" našeho zobrazení F s nějakým lichým zobrazením.

Poznamenejme ještě, že dvě spojitá zobrazení F_0 a F_1 na množině $\overline{K}(o, R)$ nazýváme *homotopická*, jestliže existuje spojité zobrazení $h_t(x) = h(x, t)$ na $\overline{K}(o, R) \times \langle 0, 1 \rangle$ tak, že pro všechna $x \in \overline{K}(o, R)$ platí

$$h_0(x) = F_0(x), \quad h_1(x) = F_1(x)$$

a pro všechna $x \in S(o, R)$ a všechna $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$$h_t(x) \neq o .$$

Zobrazení $h_t(x)$ s uvedenými vlastnostmi se nazývá *homotopie* zobrazení F_0 a F_1 .

Princip důkazu věty 9.1. Věta 9.1 je jedním ze základních tvrzení algebraické topologie. Způsobů konstrukce stupně zobrazení

$$d[F; K(o, R), o]$$

s vlastnostmi uvedenými ve větě 9.1 je několik. Konstrukci je možné provést také pomocí prostředků matematické analýzy (přesněji integrálního a diferenciálního počtu) a její základní myšlenky zde shrneme. Důkaz spočívá ve třech základních krocích.

I.krok: *Konstrukce Brouwerova stupně pro speciální zobrazení F .*

Předpokládejme, že

(α) zobrazení

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_N(x))$$

je spojitý na $\overline{K}(o, R)$, $F(x) \neq 0$ pro všechna $x \in S(o, R)$;

(β) všechny parciální derivace

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

jsou spojitý na $K(o, R)$;

(γ) rovnice

$$F(x) = o$$

(tj. soustava rovnic $F_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, N$) má v množině $K(o, R)$ pouze konečně mnoho řešení $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)}$ a jakobián $J_F(x)$, tj. determinant matice

$$\left(\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,N}$$

je v každém z bodů $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)}$ nenulový.

V tomto případě položíme

$$d[F; K(o, R), o] = \sum_{i=1}^m \frac{J_F(\xi^{(i)})}{\|J_F(\xi^{(i)})\|}.$$

II.krok: *Odstranění předpokladu (γ).*

Nechť zobrazení $F(x)$ splňuje předpoklady (α), (β). Je třeba sestavit posloupnost zobrazení $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ definovaných na $\overline{K}(o, R)$ tak, že platí

(i) $F_n(x)$ splňuje předpoklady (α), (β), (γ) pro každé $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \overline{K}(o, R)} \|F_n(x) - F(x)\| = 0$.

Existence posloupnosti $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnostmi (i), (ii) plyne ze Sardovy věty (věta 6.6). Pro každé zobrazení F_n je podle kroku I definován stupeň

$$d[F_n; K(o, R), o]$$

a dá se ukázat, že existuje konečná limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d[F_n; K(o, R), o]$$

a že hodnota této limity je stejná pro všechny posloupnosti $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnostmi (i), (ii). Proto můžeme položit

$$d[F; K(o, R), o] = \lim_{n \rightarrow \infty} d[F_n; K(o, R), o] .$$

III.krok: Odstranění předpokladu (β) .

Nechť zobrazení $F(x)$ splňuje předpoklad (α) . Podle tzv. Weierstrassovy věty o stejnoměrné aproximaci spojitě funkce pomocí polynomů (viz např. [10]) je možno sestavit posloupnost zobrazení $F_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že platí

- (a) F_n splňuje (α) , (β) pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \overline{K}(o, R)} \|F_n(x) - F(x)\| = 0$.

Pro každé zobrazení F_n je podle kroku II definován stupeň

$$d[F_n; K(o, R), o]$$

a dá se ukázat, že existuje konečná limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d[F_n; K(o, R), o]$$

a že hodnota této limity je stejná pro všechny posloupnosti $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnostmi (a), (b). Proto můžeme definovat

$$d[F; K(o, R), o] = \lim_{n \rightarrow \infty} d[F_n; K(o, R), o] .$$

Takto definované číslo

$$d[F; K(o, R), o]$$

je celé, neboť jsme dvakrát prováděli limitní přechod v posloupnostech celých čísel (zdůvodněte) a lze dokázat, že má skutečně všechny vlastnosti uvedené ve větě 9.1.

Přesný důkaz je technicky velice náročný a čtenář jej může nalézt např. ve skriptech [2].

Poznámka Výše uvedený princip konstrukce stupně ukazuje, že jeho *výpočet* pro konkrétní zobrazení je *téměř vyloučen*. O to víc vystupuje do popředí *význam vlastností* (a) a (d) uvedených ve větě 9.1. Jejich použití si budeme ilustrovat v následujícím odstavci.

9.2 Použití Brouwerova stupně zobrazení

Dokážeme nejprve následující speciální verzi věty 8.6.

Věta 9.2 *Bud' F spojitě zobrazení na $\overline{K}(o, R)$, které kouli $\overline{K}(o, R)$ zobrazuje do $\overline{K}(o, R)$, tj.*

$$F(\overline{K}(o, R)) \subset \overline{K}(o, R) .$$

Potom existuje $x_0 \in \overline{K}(o, R)$ tak, že

$$F(x_0) = x_0 .$$

Důkaz V případě, že existuje $x_0 \in S(o, R)$ tak, že $F(x_0) = x_0$, není co dokazovat. Nechtě tedy

$$x - F(x) \neq o$$

pro každé $x \in S(o, R)$. V tomto případě je definován stupeň

$$d[I - F; K(o, R), o] .$$

Položme

$$h(x, t) = x - tF(x)$$

pro $x \in \overline{K}(o, R)$ a $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Zřejmě je $h(x, t)$ spojitě zobrazení na $\overline{K}(o, R) \times \langle 0, 1 \rangle$. Předpokládejme, že existuje $x^* \in S(o, R)$ a $t^* \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že

$$x^* - t^*F(x^*) = o .$$

Pak

$$0 = \|x^* - t^*F(x^*)\| \geq \|x^*\| - t^*\|F(x^*)\| \geq (1 - t^*)R \geq 0$$

neboť $\|F(x^*)\| \leq R$ a $\|x^*\| = R$. Platí tedy $t^* = 1$. To však je spor s předpokladem, že na $S(o, R)$ je $x - F(x) \neq o$. Tudíž

$$h(x, t) \neq o$$

pro všechna $x \in S(o, R)$ a pro všechna $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Z vlastností (a) a (c) věty 9.1 okamžitě dostáváme:

$$1 = d[I; K(o, R), o] = d[I - F; K(o, R), o] .$$

Proto můžeme použít vlastnost (b) z věty 9.1. Odtud plyne, že existuje $x_0 \in K(o, R)$ tak, že

$$F(x_0) = x_0 .$$

■

Zcela analogicky, jako jsme provedli předcházející důkaz, je možné dokázat následující větu o pevném bodu (důkaz proveďte sami jako cvičení).

Věta 9.3 *Bud' F spojitě zobrazení na $\overline{K}(o, R)$ s hodnotami v $\mathbb{R}^N$ a takové, že pro všechna $x \in S(o, R)$ platí*

$$(F(x), x) \leq 0.$$

Potom existuje alespoň jedno $x_0 \in \overline{K}(o, R)$ tak, že

$$F(x_0) = x_0.$$

Poznamenejme, že $(\cdot, \cdot)$ značí skalární součin v $\mathbb{R}^N$.

Důsledek věty 9.3. *Bud' F spojitě zobrazení na $\overline{K}(o, R)$ s hodnotami v $\mathbb{R}^N$ a takové, že pro všechna $x \in S(o, R)$ platí*

$$(F(x), x) \geq (x, x)$$

Potom existuje alespoň jedno $x_0 \in \overline{K}(o, R)$ tak, že

$$F(x_0) = o.$$

Poznámka (i) Protože libovolné dva lineární normované prostory stejné konečné dimenze jsou izomorfní, je možno ve větách 9.1 a 9.2 prostor $\mathbb{R}^N$ nahradit libovolným Banachovým prostorem konečné dimenze; ve větě 9.3 a v jejím důsledku pak libovolným Hilbertovým prostorem konečné dimenze.

(ii) Ve větě 9.2 je možné kouli $\overline{K}(o, R)$ zaměnit za uzavřenou omezenou a konvexní podmnožinu Banachova prostoru konečné dimenze (viz větu 8.6).

9.3 Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení

Stejnou metodou, jako byl dokazován Schauderův princip - věta 8.7. - je možno zobecnit i pojem Brouwerova stupně zobrazení. Při přechodu do prostoru nekonečné dimenze se však musíme omezit na speciálnější typy zobrazení. Analogie věty 9.2 pro spojitá zobrazení v prostorech nekonečné dimenze totiž neplatí, ale je možné ji dokázat pro zobrazení, která jsou v jistém smyslu blízka identitě (tzv. kompaktní perturbace identity). Základní vlastnosti jsou shrnuty v následujícím tvrzení.

Věta 9.4 *Bud' X Banachův prostor, $R > 0$ a*

$$K(o, R) = \{u \in X; \|u\| < R\}, \quad S(o, R) = \{u \in X; \|u\| = R\}.$$

Bud' T kompaktní operátor definovaný na $\overline{K}(o, R)$ s hodnotami v X a takový, že

$$Tu \neq u$$

pro každé $u \in S(o, R)$. Pak existuje celé číslo

$$d[I - T; K(o, R), o]$$

(které nazýváme *Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení $I - T$ vzhledem ke kouli $K(o, R)$ a bodu o nebo krátce stupeň zobrazení $I - T$) tak, že platí*

(a) $d[I; K(o, R), o] = 1$.

(b) *Jestliže*

$$d[I - T; K(o, R), o] \neq 0 ,$$

pak existuje $u_0 \in K(o, R)$ tak, že

$$Tu_0 = u_0 .$$

(c) *Je-li S kompaktní zobrazení na $\overline{K}(o, R)$ s hodnotami v X a platí-li*

$$u - Tu - tSu \neq o$$

pro každé $u \in S(o, R)$ a pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$, potom

$$d[I - T; K(o, R), o] = d[I - T - S; K(o, R), o] .$$

(d) *Je-li operátor T navíc lichý (tj. platí-li $Tu = -T(-u)$ pro všechna $u \in \overline{K}(o, R)$), potom stupeň*

$$d[I - T; K(o, R), o]$$

je liché (a tedy nenulové) číslo.

Poznámka (i) Je-li $X = \mathbb{R}^N$ (nebo X je Banachův prostor konečné dimenze), pak Brouwerův a Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení $F = I - T$ splývají.

(ii) Způsob použití Lerayova-Schauderova stupně zobrazení je stejný jako způsob použití Brouwerova stupně. Ilustraci podává následující příklad.

Příklad 9.1 Uvažujme okrajovou úlohu (8.14) z příkladu 8.1, tj.

$$(9.2) \quad \begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = f(x) , & x \in (0, 1) , \\ u(0) = u(1) = 0 , \end{cases}$$

kde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $f \in L^2(0, 1)$. V příkladu 8.1 jsme ukázali, že slabá formulace této úlohy vede k operátorové rovnici

$$(9.3) \quad Ju + Gu = f^* ,$$

kde $J, G : H \rightarrow H$, $f^* \in H$, $H = W_0^{1,2}(0, 1)$. V tomto případě tedy $X = H$ a prostor, ve kterém budeme pracovat, je dokonce Hilbertův (a tedy Banachův). Vzhledem k tomu, že

$$(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$

je skalární součin na H (zdůvodněte), platí $Ju = u$, $u \in H$. Jinými slovy, zobrazení J je *identita* na H . Definujeme-li operátor $S : H \rightarrow H$ předpisem

$$Su = f^* - Gu, \quad u \in H ,$$

pak můžeme psát operátorovou rovnici (9.3) v ekvivalentním tvaru

$$(9.4) \quad u - Su = o .$$

Pro vyšetření řešitelnosti rovnice (9.4) nyní použijeme teorie Lerayova-Schauderova stupně zobrazení. Předpokládejme, že g je *omezená* funkce. Na základě tvrzení o tzv. *Němyckého operátorech* (viz [3]) a na základě toho, že $W_0^{1,2}(0,1) \subset L^2(0,1)$, přičemž příslušné identické zobrazení (tzv. *vnoření*) z $W_0^{1,2}(0,1)$ do $L^2(0,1)$ je kompaktním zobrazením, lze ukázat, že $S : H \rightarrow H$ je kompaktní operátor. Z omezenosti funkce g pak vyplývá existence takové konstanty $c > 0$, že pro libovolné $u \in H$ platí

$$(9.5) \quad \|Su\| \leq c$$

(zdůvodněte). Definujme nyní homotopii h předpisem

$$h(u, t) = u - tSu$$

pro libovolné $u \in H$ a $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Potom existuje $R > 0$ takové, že

$$h(u, t) \neq o$$

pro libovolné $u \in S(o, R)$ a $t \in \langle 0, 1 \rangle$ (vzhledem k (9.5) stačí volit $R > c$ - zdůvodněte). Z vlastnosti (c) věty 9.4 vyplývá, že

$$(9.6) \quad d[I - S; K(o, R), o] = d[I; K(o, R), o]$$

a zároveň z vlastnosti (a) věty 9.4 plyne

$$(9.7) \quad d[I; K(o, R), o] = 1 .$$

Ze vztahů (9.6) a (9.7) okamžitě dostáváme, že stupeň $d[I - S; K(o, R), o]$ je roven jedné, a tedy podle vlastnosti (b) věty 9.4 existuje prvek $u_0 \in K(o, R)$ takový, že

$$u_0 - Su_0 = o .$$

Odtud vyplývá, že u_0 je řešením rovnice (9.3), a tedy prvek $u_0 \in W_0^{1,2}(0,1)$ je slabým řešením okrajové úlohy (9.2).

□

Doporučená literatura

- [1] P. Drábek, A. Kufner: Úvod do funkcionální analýzy, skripta ZČU, Plzeň 1993.
- [2] S. Fučík, J. Milota: Matematická analýza II, SPN Praha 1975.
- [3] S. Fučík, A. Kufner: Nelineární diferenciální rovnice, SNTL Praha 1978.
- [4] K. Deimling: Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Toronto 1985.
- [5] A. Kufner: Geometrie Hilbertova prostoru, SNTL Praha 1973 (a 1975).
- [6] P. Drábek: Integrální rovnice, SNTL Praha 1991 (edice MVŠT).
- [7] P. Drábek, S. Míka: Matematická analýza I, skripta ZČU, Plzeň 1991.
- [8] P. Drábek, S. Míka: Matematická analýza II, skripta ZČU, Plzeň 1992.
- [9] J. Franců: Úvod do teorie monotónních operátorů, seminární text, VUT Brno, 1987.
- [10] V. Jarník: Diferenciální počet II, Academia, Praha 1976.
- [11] A. Ralston: Základy numerické matematiky, Academia, Praha 1978.