Matematika 2

Výpočet obsahů rovinných obrazců

Příklad 1. Určete obsah obrazce, který je ohraničen

(a) přímkami $y = x - 1,\ y = 1$ a $2y = x - 3$, $[\frac{9}{2}]$

(b) křivkou $y = 6x - x^2$ a přímkou $y = 0$, $[36]$

(c) křivkou $y = 2x - x^2$ a přímkou $x + y = 0$, $[\frac{9}{2}]$

(d) křivkou $y = x^2 - 4x + 3$ a přímkami $x = 0,\ y = 0$, $[\frac{4}{3}]$

(e) křivkami $y = \dfrac{x^2}{4},\ y = 2\sqrt{x}$, $[\frac{16}{3}]$

(f) křivkami $y = x^2,\ y = \dfrac{1}{4}x^2$ a přímkou $y = 4$, $[\frac{32}{3}]$

(g) křivkou $y^2 = x^2 - x^4$, $[\frac{4}{3}]$

(h) křivkami $y = \ln x,\ y = \ln^2 x$, $[3 - \mathrm{e}]$

(i) křivkou $y = \mathrm{e}^{-x} \sin x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$, a přímkou $y = 0$, $[\frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-\pi})]$

(j) křivkami $ax = y^2,\ ay = x^2$, $[\frac{a^2}{3}]$

(k) křivkou $y = x + \sin^2 x$ a přímkou $y = x,\ 0 \le x \le \pi$, $[\frac{\pi}{2}]$

(l) křivkami $x^2 + y^2 = 8,\ y = \dfrac{x^2}{2}$ (dva obory), $[2\pi + \frac{4}{3}$ a $6\pi - \frac{4}{3}]$

(m) křivkou $y^2 = x^3$ a přímkami $y = 8,\ x = 0$, [19,2]

(n) křivkami $y = \sin^3 x,\ y = \cos^3 x$ a přímkou $x = 0$ (dva obory). $[\frac{5}{6}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$ a $\frac{5}{6}\sqrt{2} + \frac{2}{3}]$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad 2 (přímá integrace)**.** Řešte počáteční úlohy

(a) $x'(t) = t^3, \quad x(0) = 0$, $[x(t) = \frac{t^4}{4}]$

(b) $x'(t) = \cos^2 x, \quad x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{8}$, $[x(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) - \frac{1}{4}]$

(c) $x'(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}, \quad x(0) = 2$. $[x(t) = 2 + \operatorname{arctg} x]$

Příklad 3 (separace proměnných)**.** Řešte počáteční úlohy

(a) $x = x' \cos^2 t \ln x, \quad x(\pi) = 1$, $[\ln^2 |x(t)| - 2 \operatorname{tg} t = 0]$

(b) $x + x' \operatorname{cotg} t = 0, \quad x\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$, $[x(t) = -2\cos t]$

(c) $x^2 + t^2 x' = 0, \quad x(-1) = 1$, $[x(t) = -t]$

(d) $yy' + x = 1, \quad y(1) = 1$, $[(x - 1)^2 + y^2(x) = 1]$

(e) $(y + xy) + (x - xy)y' = 0, \quad y(1) = 1$, $[x - y(x) + \ln |xy(x)| = 0]$

(f) $2(1 + \mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 0$, $[2\,\mathrm{e}^{y^2(x)} + \mathrm{e}^x + 1 = 0]$

(g) $y' = 2\sqrt{y}\ln x, \quad y(\mathrm{e}) = 1.$ $[y(x) = (x(\ln x - 1) + 1)^2]$

Příklad 4 (separace proměnných). Stanovte obecné řešení diferenciální rovnice

(a) $x' = -\dfrac{t-x}{t+x},$ $[\ln(t^2 + x^2(t)) + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{t} = C$ implicitně$]$

(b) $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2},$ $[\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} = Cy$ implicitně$]$

(c) $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2},$ $[y(x) = x\sin\ln|Cx|,\ C \neq 0,\ y(x) = x,\ y = -x]$

(d) $(x + 2y) - xy' = 0.$ $[y(x) = Cx^2 - x]$

Příklad 5. Řešte počáteční úlohy

(a) $tx' = \sqrt{t^2 - x^2} + x, \quad x(1) = 1,$ $[x(t) = t\sin\left(\ln t + \frac{\pi}{2}\right)]$

(b) $y' = \dfrac{x+y}{y-x}, \quad y(1) = 0,$ $[y(x) = x - \sqrt{2x^2 - 1}]$

Příklad 6 (lineární homogenní diferenciální rovnice 1. řádu). Řešte počáteční úlohu

$y' + \dfrac{2}{x}y = 0, \quad y(1) = 2.$ $[y(x) = \frac{2}{x^2}]$

Příklad 7 (variace konstanty). Řešte počáteční úlohy

(a) $x' - x\operatorname{cotg} t = \sin t, \quad x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,$ $[x(t) = \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin t]$

(b) $x' - x\operatorname{cotg} t = \sin t, \quad x(\pi) = 1,$ [nemá řešení; proč?]

(c) $x' - \dfrac{3x}{t} = \dfrac{1 + \ln t}{t}, \quad x(1) = -\dfrac{1}{3},$ $[x(t) = \frac{t^3-4}{9} - \frac{1}{3}\ln|t|]$

(d) $xy' - (3y + 1 + \ln x) = 0, \quad y(1) = 1,$ $[-\frac{1}{9}(13x^2 - 3\ln x - 4)]$

(e) $y' + \sqrt{x}y = 3x^2, \quad y(1) = -\dfrac{3}{2},$ $[y(x) = 3\sqrt{x^3} - \frac{9}{2}]$

(f) $y' + y\cos x = \sin x\cos x, \quad y(0) = 1.$ $[y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-\sin x} + \sin x - 1]$

Příklad 8. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

(a) $y' + 2xy = 4x,$ $[y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x^2} + 2]$

(b) $x' = x\cos t + \sin 2t.$ $[x(t) = C\,\mathrm{e}^{\sin t} - 2(1 + \sin t)]$

Příklad 9 (metoda odhadu). Metodou odhadu nebo metodou variací konstanty stanovte obecné řešení diferenciální rovnice

(a) $x' = 3x - \mathrm{e}^{2t},$ $[x(t) = C\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{2t}]$

(b) $x' + 2x = 3\,\mathrm{e}^{5t},$ $[x(t) = C\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{7}\,\mathrm{e}^{5t}]$

(c) $x' + 2x = 5\,\mathrm{e}^{-2t},$ $[x(t) = C\,\mathrm{e}^{-2t} + 5t\,\mathrm{e}^{-2t}]$

(d) $x' + x = 1 - t^2,$ $[x(t) = C\,\mathrm{e}^{-t} - t^2 + 2t - 1]$

(e) $x' - 2x = 2\cos t,$ $[x(t) = C\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{4}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t]$

(f) $x' = 7x + \cos 2t - 3\sin 2t.$ $[x(t) = C\,\mathrm{e}^{7t} - \frac{1}{53}\cos 2t + \frac{23}{53}\sin 2t]$

Příklad 10 (diferenciální rovnice vyššího řádu). Řešte počáteční úlohy

(a) $y''' = \sin x + \mathrm{e}^{-2x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = \dfrac{1}{4},\ y''(0) = \dfrac{1}{2},$ $[y(x) = \cos x - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x} + x^2 + \frac{1}{8}]$

(b) $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 2,$ $[y(x) = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}]$

(c) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$ $[y(x) = \frac{1}{5}\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)]$

Příklad 11. Stanovte obecné řešení diferenciální rovnice

(a) $y''' - \sqrt{1 + (y'')^2} = 0,$ $[y(x) = \sinh x + C_1 + C_2x + C_3]$

(b) $xy^{(4)} + y''' = 0.$ $[y(x) = C_1x^2\left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{4}\right) + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4]$

Příklad 12 (charakteristická rovnice). Řešte následující úlohy

(a) $x'' - 5x' - 6x = 0,$ $[x(t) = C_1\mathrm{e}^{6t} + C_2\mathrm{e}^{-t}]$

(b) $x''' - 6x'' + 13x' = 0,$ $[x(t) = C_1 + \mathrm{e}^{3t}(C_2\cos 2t + C_3\sin 2t)]$

(c) $y'' + 4y' + 4y = 0,$ $[y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(C_1 + C_2t)]$

(d) $y'' - 4y' + 13y = 0,$ $[y(x) = \mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)]$

(e) $y'' + 6y' + 9y = 0,$ $[y(x) = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{-3x}]$

(f) $y^{(4)} - y = 0,$ $[y(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{t} + C_3\cos t + C_4\sin t]$

(g) $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = -3,\ y'(0) = 0,$ $[y(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t}(\cos t + 2\sin t)]$

(h) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0,$ $[y(t) = \mathrm{e}^{-t}(C_1t^2 + C_2t + C_3)]$

(i) $4y'' - 8y' + 5y = 0,$ $[y(x) = \mathrm{e}^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right)]$

(j) $y''' - 8y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 6,\ y''(0) = 0.$
$[y(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x - \cos\sqrt{3}x)]$

Příklad 13 (lineární nehomogenní rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty). Metodou odhadu nebo metodou variací konstant řešte úlohy

(a) $x'' + 6x' + 5x = 25t^2 - 2,$ $[x(t) = C_1\mathrm{e}^{-5t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + 5t^2 - 12t + 12]$

(b) $x'' - 2x' + 10x = 36\cos 3t,$ $[x(t) = \mathrm{e}^{t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t) + \cos 3t - 6\sin 3t]$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 3t - 8\,\mathrm{e}^{t},$ $[y(t) = \mathrm{e}^{3t}(C_1 + C_2t) + \frac{1}{3}t + \frac{2}{9} - 2\,\mathrm{e}^{t}]$

(d) $y''' + 4y' = 8\,\mathrm{e}^{2t} + 5\,\mathrm{e}^{t}\sin t,$ $[y(t) = C_1 + C_2\cos 2t + C_3\sin 2t +$
$+ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{t}(\sin t - 3\cos t)]$

(e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = \mathrm{e}^{x},$ $[y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\,\mathrm{e}^{x} + \frac{x^3}{6}\mathrm{e}^{x}]$

(f) $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6},$
$[y(x) = -\frac{x}{3}\cos 3x + \left(1 + \frac{1}{9}\ln\sin 3x\right)\sin 3x]$

(g) $y'' - 4y = 3x^3\,\mathrm{e}^{x},$ $[y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} - \left(\frac{40}{9} + \frac{14}{3}x + 2x^2 + x^3\right)\mathrm{e}^{x}]$

(h) $y'' - 8y' + 20y = 5x\,\mathrm{e}^{4x}(\sin 2x + \cos 2x).$ $[y(x) = \mathrm{e}^{4x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) +$
$+ \frac{5x\,\mathrm{e}^{4x}}{16}[(1 - 2x)\cos 2x + (1 + 2x)\sin 2x]]$

Soustavy diferenciálních rovnic

Příklad 14 (lineární homogenní soustavy 1. řádu). Řešte úlohy

(a) $\begin{cases} y' = -2, \\ z' = z, \end{cases}$ $[y = C_1 - 2x,\ z = C_2\,\mathrm{e}^x]$

(b) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2y, \end{cases}$ $[x = \frac{C_1}{2}\,\mathrm{e}^{2t} + C_2,\ y = C_1\,\mathrm{e}^{2t}]$

(c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = 5x_2, & x_2(0) = -1, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{5t} \\ -\,\mathrm{e}^{5t} \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{C_2}{3}\,\mathrm{e}^{5t} \\ C_2\,\mathrm{e}^{5t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{5t}]$

(d) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = 2x_2, & x_2(0) = 1, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + t\,\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{2t} \\ C_2\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}]$

(e) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x}, \\ z' = y + z, \end{cases}$ $[y = C_1 x,\ z = C_2\,\mathrm{e}^x - C_1(x+1)]$

(f) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^t + C_2 t\,\mathrm{e}^t \\ (C_1 - C_2)\,\mathrm{e}^t + C_2 t\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^t + C_2 \begin{bmatrix} t \\ t-1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^t]$

(g) $\begin{cases} y' = 4y - 2z, \\ z' = y + z, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ \frac{1}{2} C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}]$

(h) $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = 2x_1 + x_2, & x_2(0) = 0, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{3t} - C_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}]$

(i) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 - 2x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = 4x_1 + 4x_2, & x_2(0) = 2, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} 4 - 3\,\mathrm{e}^{2t} \\ -4 + 6\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1 - C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} - C_1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}]$

(j) $\begin{cases} x_1' = x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = -2x_1 + 2x_2, & x_2(0) = -1, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \sin t \\ -e^t(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)\,\mathrm{e}^t \\ (C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix}]$

(k) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 2, \\ x_2' = -4x_1 - x_2, & x_2(0) = 3, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\,\mathrm{e}^t + 7\,\mathrm{e}^{3t} \\ 10\,\mathrm{e}^t - 7\,\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}]$

(l) $\begin{cases} x_1' = x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = -x_1 + 2x_2, & x_2(0) = 0, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, obecné řešení: $\begin{bmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ C_2 \cos t - C_1 \sin t \end{bmatrix} =$

$$= C_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}]$$

(m) $\begin{cases} x' = -9y, \\ y' = x, \end{cases}$ $[x = 3C_1 \cos 3t - 3C_2 \sin 3t,\ y = C_2 \cos 3t + C_1 \sin 3t]$

(n) $\begin{cases} x' = -3x - 4y, & x(0) = 1, \\ y' = -2x - 5y, & y(0) = 4, \end{cases}$ $[x = -2\,\mathrm{e}^{-t} + 3\,\mathrm{e}^{-7t},\ y = \mathrm{e}^{-t} + 3\,\mathrm{e}^{-7t}]$

(o) $\begin{cases} x' = x + 5y, & x(0) = -2, \\ y' = -x - 3y, & y(0) = 1, \end{cases}$ $[x = (\sin t - 2\cos t)\,\mathrm{e}^{-t},\ y = \mathrm{e}^{-t} \cos t]$

(p) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2y, \\ z' = -z, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3\,\mathrm{e}^{t} - 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ C_1\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}]$

(q) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + z, \\ z' = 2z, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}\left(C_3 + C_2 t + \frac{C_1}{2} t^2\right) \\ \mathrm{e}^{2t}(C_2 + C_1 t) \\ C_1\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}]$

(r) $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_2 + 4y_3, \\ y_3' = y_1 - 4y_3. \end{cases}$ $[C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + C_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \mathrm{e}^{-3t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}]$

Příklad 15 (lineární homogenní soustavy 2. řádu)**.**

(a) $\begin{cases} x'' + y' + x = 0, \\ x' + y'' = 0, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 t + C_3 t^2 \\ -(C_1 + 2C_3)t - \frac{C_2}{2} t^2 - C_3 \frac{t^3}{3} + C_4 \end{bmatrix}]$

(b) $\begin{cases} x'' = y, \\ y'' = x, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t \\ C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t \end{bmatrix}]$

(c) $\begin{cases} x_1'' = x_1 - 4x_2, \\ x_2'' = -x_1 + x_2. \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}} + C_4\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} \\ \frac{C_1}{2} \cos t + \frac{C_2}{2} \sin t - \frac{C_3}{2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}} - \frac{C_4}{2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} \end{bmatrix}]$

Příklad 16 (lineární nehomogenní soustavy)**.** Řešte úlohy

(a) $\begin{cases} x_1' = x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = -3x_1 - 4x_2 + t, & x_2(0) = 2, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \frac{14}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} +$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}]$$

(b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = 2x_1 + \mathrm{e}^{t}, & x_2(0) = 0, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} - t\,\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}]$

(c) $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - t, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{t} - C_2\,\mathrm{e}^{-t} + t - 1 \\ y = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} - t + 1 \end{bmatrix}]$

(d) $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t, \\ x' + y = \cos t, \end{cases}$ $[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{-3t} \\ C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 3C_2\,\mathrm{e}^{-3t} + \cos t \end{bmatrix}]$

(e) $\begin{cases} y' = 4y - z - 5x + 1, \\ z' = y + x + 2z - 1. \end{cases}$ $\left[\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3x}(C_1 + C_2 x) + x \\ z = \mathrm{e}^{3x}(C_1 + C_2 x) - C_2\,\mathrm{e}^{3x} - x \end{bmatrix}\right]$

Základní vlastnosti funkce více proměnnných

Příklad 17. Určete, které z daných bodových posloupností $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, a najděte jejich limitu.

(a) $\boldsymbol{x}_n = \left[\dfrac{2n}{n - 0{,}3}, \sin\dfrac{3n}{2n^2 - 1}, \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}\right]$, [konvergentní, $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = [2, 0, 0]$]

(b) $\boldsymbol{x}_n = [4\cos n, 4\sin n, \sqrt{n+1}]$. [divergentní]

Příklad 18. Určete (a geometricky znázorněte) maximální definiční obory funkcí, určených následujícími předpisy

(a) $f = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, [$D(f) \subset \mathbb{R}^2$: uzavřený kruh $x^2 + y^2 \le a^2$]

(b) $f = \ln(y^2 - 4x + 8)$, [$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > 4(x - 2)\}$]

(c) $f = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$, [$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - |x| \le y \le 1 + |x|,\ x \ne 0\}$]

(d) $f = \sqrt{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2}}$,, [$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 2,\ |y| \le |x|\} \cap$
$\cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2,\ |y| \ge |x|\}$]

(e) $f = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - x^2} + \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}$, [$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$
$x^2 + y^2 + z^2 \in (2, 9\rangle\}$]

(f) $f = \ln(x, y, z)$, [$D(f)$ je sjednocení všech otevřených oktantů 1, 3, 6 a 8]

(g) $f = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. [$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > z^2\}$; $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
je rovnice kuželové plochy s vrcholem v počátku]

Příklad 19. Určete definiční obor zobrazení

(a) $f = [x(1 - \cos y), 1 + xy]$, [$D(f) = \mathbb{R}^2$]

(b) $f = [x^2 - \sin x, \arcsin\sqrt{x}]$, [$D(f) = \langle 0, 1\rangle$]

(c) $f = \left[\arcsin(1 + \mathrm{e}^{x+y}), \dfrac{x^y}{1 - x - y}\right]$, [$D(f) = \emptyset$]

(d) $f = \left[1 + \dfrac{x}{y+z}, \ln(x + y - z)^2, \operatorname{arctg}\dfrac{y}{xz}\right]$. [$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$
$x + y \ne 0,\ x + y - z \ne 0,\ x \ne 0,\ z \ne 0\}$]

Příklad 20. Vyšetřete rovnice hladin následujících funkcí a znázorněte je graficky

(a) $f = x + y + 3z$, [systém rovnoběžných rovin $x + y + 3z = C$]

(b) $f = x^2 + y^2 + z^2$, [systém kulových ploch se středem v počátku]

(c) $f = x^2 - y^2 + z^2$, [$x^2 - y^2 + z^2 = C:$ $C = 0$ kuželová plocha, $C > 0$ systém jednodílných hyperboloidů, $C < 0$ systém dvoudílných hyperboloidů]

(d) $f = \dfrac{x^2 + y^2}{2z}$, [systém rotačních paraboloidů $x^2 + y^2 = 2cz,\ z \neq 0$]

(e) $f = x^2 - y^2$, [systém hyperbol $y = \pm x$]

(f) $f = |x - 1| + |y - 2|$. [systém kosočtverců]

Diferenciální počet funkce více proměnných

Příklad 21. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu dané funkce $u = u(x, y)$, resp. $u = u(x, y, z)$ podle všech nezávisle proměnných

(a) $u = 3x - \sin(xy)$, [$u_x = 3 - y\cos(xy),\ u_y = -x\cos(xy)$]

(b) $u = x^{-y}$, [$u_x = -yx^{-y-1},\ u_y = -x^{-y}\ln x$]

(c) $u = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, [$u_x = \frac{|y|}{x^2+y^2},\ u_y = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$]

(d) $u = [\cos(xy)]^{xyz}$, [$u_x = uyz[\ln\cos(xy) - xy\operatorname{tg}(xy)]$, $u_y = uxz[\ln\cos(xy) - xy\operatorname{tg}(xy)],\ u_z = uxy\ln[\cos(xy)]$]

(e) $u = x^2 \ln y,\ x = \dfrac{f}{g},\ y = 3f - g,$ výsledek ověřte výpočtem parciálních derivací funkce $u(f, g) = u(x(f, g), y(f, g))$. [$u_f = 2\frac{x}{g}\ln y + \frac{3x^2}{y},\ u_g = -2x^2\ln y - \frac{2x^2}{y}$]

Příklad 22. Vypočtěte v bodě M hodnoty parciálních derivací prvního řádu funkce u podle všech nezávislých proměnných

(a) $u = (1 + 2xy)^x,\ M = (0, 1)$, [$u_x(0, 1) = 0,\ u_y(0, 1) = 0$]

(b) $u = y\,\mathrm{e}^{xz},\ M = (0, 2, 4)$. [$u_x(0, 2, 4) = 8,\ u_y(0, 2, 4) = 1,\ u_z(0, 2, 4) = 0$]

Příklad 23. Vypočtěte uvedené parciální derivace funkce u

(a) $u = \sin(x + y^2),\ u_{xx} =?,\ u_{yx} =?$, [$u_{xx} = -\sin(x + y^2),\ u_{yx} = -2y\sin(x + y^2)$]

(b) $u = y^{\ln x},\ u_{xxx} =?,\ u_{xyy} =?$, [$u_{xxx} = u\ln^3 y,\ u_{xyy} = [\ln x - 1][\ln x \ln y + 1]y^{\ln x - 2} + \ln x y^{\ln x - 1}$]

(c) $u = x(1 + xy^z),\ u_{xxx} =?,\ u_{yz} =?$. [$u_{xxx} = 0,\ u_{yz} = x^2 y^{z-1}(1 + z\ln y)$]

Příklad 24. Derivováním vypočtěte parciální derivace daných funkcí $u = u(x, y)$, resp. $u = u(t, x)$. Zjistěte, zda funkce u je řešením dané parciální diferenciální rovnice.

(a) $u = y\ln(x^2 - y^2)$, $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{u}{y^2} = 0$, [ano]

(b) $u = y^{\frac{y}{x}} \sin\dfrac{y}{x}$, $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} - yu = 0$, [ano]

(c) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, [ne]

(d) $u = \ln \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, [ano]

(e) $u = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x$, $\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} - x\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial^2 y} - y\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0$, [ano]

(f) $u = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, [ano]

(g) $u = \sin(x+at)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, [ano]

(h) $u = \cos(x+at)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, [ano]

(i) $u = \sqrt{x+at}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, [ano]

(j) $u = (x-at)^2$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, [ano]

(k) $u = (x+t)^3$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. [ano]

Příklad 25. Je dána funkce $u = x^4y - xy^4 + 6z$ a body $M = (1,1,-1)$, $P = (3,-1,-2)$ v $\mathbb{R}^3$. Určete

(a) diferenciál $\mathrm{d}u$ v bodě M, $[\mathrm{d}u = 3h_1 - 3h_2 + 6h_3 \equiv 3\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y + 6\,\mathrm{d}z]$

(b) derivaci u v bodě M ve směru od M do P, $[\boldsymbol{s} = \frac{\vec{MP}}{|\vec{MP}|} = \left[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]^{\mathrm{T}},\ \frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{s}} = 2]$

(c) směr a rychlost největší změny u v bodě M, $[\frac{\operatorname{grad} u(M)}{\|\operatorname{grad} u(M)\|} = \left[\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]^{\mathrm{T}};$ $\|\operatorname{grad} u(M)\| = 3\sqrt{6}]$

(d) rovnici tečné roviny k hladině procházející bodem M, $[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)})^{\mathrm{T}} \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}^{(0)}) = 0,$ $\boldsymbol{x}^{(0)} = [1,1,-1]^{\mathrm{T}};\ 3(x-1) - 3(y-1) + 6(z+1) = 0]$

(e) rovnici tečné nadroviny v $\mathbb{R}^4$ ke grafu funkce u nad bodem M. $[u - u_0 =$ $= (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)})^{\mathrm{T}} \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}^{(0)}),\ u_0 = u(\boldsymbol{x}^{(0)}) = -6\boldsymbol{x}^{(0)} = [1,1,-1]^{\mathrm{T}};$ $u + 6 = 3(x-1) - 3(y-1) + 6(x+1)]$

Příklad 26. Je dána kulová plocha (sféra v $\mathbb{R}^3$) o rovnici $x^2+y^2+z^2 = 4$. Stanovte tečnou rovinu k této kulové ploše, která je rovnoběžná s rovinou o rovnici $x + 2y - 3z + 1 = 0$. $[x + 2y - 3z - 2\sqrt{14} = 0;\ -x - 2y + 3z - 2\sqrt{14} = 0]$

Příklad 27. Je dána funkce $u = xy + yz + 1$, vektor $\boldsymbol{v} = [12, -3, -4]^T$ a body $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (3,3,5)$, $C = (0,-2,-1)$. Určete derivaci dané funkce v daných bodech podle vektoru $\boldsymbol{v}$.
$[\operatorname{grad} u(A) = [y_0, x_0 + z_0, y_0]^{\mathrm{T}},\ \frac{\partial u(A)}{\partial \boldsymbol{v}} = 8y_0 - 3x_0 - 3z_0,\ \frac{\partial u(B)}{\partial \boldsymbol{v}} = 0,\ \frac{\partial u(C)}{\partial \boldsymbol{v}} = -13]$

Příklad 28. Určete derivaci funkce u v bodě M podle vektoru $\boldsymbol{v}$.

(a) $u = \operatorname{arctg}(xy)$, $M = (1,1)$, $\boldsymbol{v} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$, $[u_{\boldsymbol{v}}(1,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

(b) $u = xy^2 + z^3 - xyz,\ M = (1,1,2),\ \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1).$ $[u_{\boldsymbol{v}}(1,1,2) = 5]$

Příklad 29. Je dána funkce $u = \frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$ a body $M_1 = (-1,2,-2)$, $M_2 = (2,0,1)$. Určete směr a velikost největšího růstu funkce $u = u(x,y,z)$ v bodě M_1 a největšího spádu v bodě M_2. $[\operatorname{grad} u(M_1) = \frac{1}{5}[1,2,-2]^{\mathrm{T}},\ \|\operatorname{grad} u(M_1)\| = \frac{3}{5},$
$-\operatorname{grad} u(M_2) = \left[\frac{10}{9}, 0, \frac{5}{9}\right]^{\mathrm{T}},\ \|\operatorname{grad} u(M_2)\| = \frac{5}{3}\sqrt{5}]$

Příklad 30. Určete vektor $\boldsymbol{v}$, v jehož směru je derivace $u_{\boldsymbol{v}}$ v bodě $M = (3,0)$ maximální; $u = \ln \frac{x+y}{x-y}$. $[\boldsymbol{v} = (0,1)]$

Příklad 31. Je dán gradient funkce $u = u(x,y)$. Stanovte tuto funkci u.

(a) $\operatorname{grad} u = \left[\dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{1}{1+y^2}\right]^{\mathrm{T}},$ $[u(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + C]$

(b) $\operatorname{grad} u = [y, x - y^3]^{\mathrm{T}}.$ $[u(x,y) = xy - \frac{y^4}{4} + C]$

Příklad 32. V bodech $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ určete hodnoty všech derivací prvního a druhého řádu funkce $u = g(x)$: $u - x\,\mathrm{e}^u + x = 0$.
$[g'(0) = 0,\ g''(0) = 0,\ g'(2) = 0,\ g''(2) = 0]$

Příklad 33. Najděte totální diferenciál funkce u :

(a) $u = \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + y^2),$ $[\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2+y^2}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)]$

(b) $u = \ln \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}},$ $[\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x-y}\left(\mathrm{d}x - \sqrt{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}y\right)]$

(c) $u = u(x,y),\ \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1.$ $[\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\sin 2u}(\sin 2x\,\mathrm{d}x + \sin 2y\,\mathrm{d}y)]$

Příklad 34. Pomocí totálního diferenciálu přibližně určete hodnotu $A = \sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$. $[A \doteq 2{,}95]$

Příklad 35. Najděte tečnou rovinu τ, normálový vektor $\boldsymbol{n}$ a normálu n grafu funkce $z = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$ v bodě $M = (3,1,?)$.
$[\tau \equiv 3x + 4y + 2z - 14 = 0;\ \boldsymbol{n} = (3,4,2);\ n \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{2}]$

Příklad 36. Určete totální diferenciál druhého řádu $u = u(x,y)$, dané implicitně rovnici $x = u \ln \frac{u}{y}$. $[\,\mathrm{d}^2 u = \frac{u(y\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)}{y(x+u)}]$

Optimalizace v konečné dimenzi

Příklad 37. Je dána funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Stanovte $\min f(x,y)$, $\max f(x,y)$. [Stacinární bod $A = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$; Hessova matice $\boldsymbol{H}(A)$ je pozitivně definitní, $f(A) = \min f(x,y) = -\frac{4}{3}$; maximum neexistuje, neboť f je konvexní]

Příklad 38. Najděte lokální extrémy funkce f :

(a) $f = x^3 - 3xy + y^2 + y - 7,$ [lokální minimum v $(1,1)$]

(b) $f = x^3y^2(12 - x - y),$ [lokální maximum v $(6,4)$]

(c) $f = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz,$ [neexistují lokální extrémy]

(d) $f = (1 + x^{\frac{2}{3}})(1 + y^{\frac{2}{3}}).$ [lokální minimum v $(-1,y),\ (x,1),\ x,y \in \mathbb{R}$]

Příklad 39. Je dána funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vyšetřete extrémy této funkce. [Stacionární body $S_1 = (1,1),\ S_2 = (-1,-1),\ S_3 = (0,0)$; $f(S_1) = f(S_2) = \min f(x,y) = 2$; S_3 je sedlový bod]

Příklad 40. Je dána funkce $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vyšetřete extrémy této funkce. [$S = (0,3),\ f(S) = \min f(x,y) = -9$]

Příklad 41. Stanovte extrémy funkce $f(x,y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. [$S = (21,20),\ f(S) = \max f(x,y) = 282$]

Příklad 42. Najděte lokální a globální extrémy funkce $f = x^2 + y^2 - 6$. [globální minimum v $(0,0)$; neexistuje lokální ani globální maximum]

Příklad 43. Stanovte globální extrémy funkce $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$ v uzavřeném čtverci $\overline{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\}$.
[$S_1 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $S_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $S_3 = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$; $f(S_1) = f(S_3) = \min f(x,y) = -\frac{1}{8}$; $\boldsymbol{H}(S_2)$ indefinitní, $f(S_2) = 0$; v bodech hranice: $f(0,y) = \cos^2 y$: $A_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ bod lokálního minima $f(A_1) = 0$; $A_2 = (0,0)$, $A_3 = (\pi,0)$, $f(A_2) = 14$, $f(A_3) = 1$; analogicky dále: $B_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $B_2 = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $B_3 = (0,\pi)$, $B_4 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $B_5 = (\pi,\pi)$. Ve vrcholech čtverce je globální maximum, v bodech S_1 a S_2 je globální minimum.]

Příklad 44. Funkce f je dána tabulkou $\begin{array}{c||c|c|c|c} x_i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f_i & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$. Stanovte přímku $y = ax + b$ takovou, aby výraz $g(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{4} (f_i - ax_i - b)^2$ byl minimální. Stanovte Hessovu matici funkce g. [$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$; $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 20 & 8 \end{bmatrix}$ pozitivně definitní]

Příklad 45. V rovině $x + 3y - z - 6 = 0$ najděte bod, který je nejblíže k počátku. [$P = \left(\frac{6}{11}, \frac{18}{11}, -\frac{6}{11}\right)$, $v = -\frac{12}{11}$, $d = \frac{6\sqrt{11}}{11}$]

Příklad 46. Na parabole $4x - y^2 = 0$ stanovte bod $P = (x,y)$, který je nejblíže bodu $M = (1,1)$. [$P \doteq (0{,}466; 1{,}365)$, $v \doteq 0{,}262$]

Příklad 47. Stanovte minimum funkce $f(x,y) = 2x - y$ na množině

$$\mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 \le 0,\ -x \le 0,\ -y \le 0\}.$$

Užijte metodu geometrického znázornění množiny $\mathcal{V}$ a hladin funkce f; metodu Lagrangeovy funkce. $[L = L(x, y, u_1, u_2, u_3) : x = 0,\ y = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 0]$

Příklad 48. Je dána funkce $f(x, y) = -xy$ a množina $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 2 = 0\}$. Stanovte extrémy f na $\mathcal{V}$. $[f(1, 1) = \min f(x, y) = -1]$

Příklad 49. Určete extrémy funkce $f(x, y) = x - 2y - 3$ na množině

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}.$$

$[\max f(x, y) = 2,\ \min f(x, y) = -2]$

Příklad 50. Určete minimum a maximum funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

$[\max f = 1 + \sqrt{2}, \min f = -\frac{1}{2}]$

Příklad 51. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, vázané na množinu

$$\mathcal{M} \equiv \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4.$$

[lokální minimum v $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, lokální maximum v $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$]

Příklad 52. Stanovte minimum funkce $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$ na množině

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq 0,\ -y \leq 0,\ x^2 + y - 1 \leq 0\}.$$

$[f(1, 0) = \min_{\mathcal{V}} f(x, y) = 1]$

Příklad 53. Mezi všemi trojúhelníky, jejichž obvod je l, najděte ten, jehož obsah je největší.

Návod. Použijte Heronova vzorce pro obsah S trojúhelníku:

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \qquad \text{kde} \quad l = 2s = a + b + c.$$

[jediným řešením je rovnostranný trojúhelník]

Příklad 54. Mezi všemi kvádry vepsanými do kulové plochy s poloměrem r najděte ten, jehož objem je maximální. [krychle]

Příklad 55. Mezi všemi kvádry vepsanými do elipsoidu s poloosami délek a, b, c najděte ten, který má maximální objem. Určete tento objem. $[V_{\max} = \frac{8}{3\sqrt{3}}abc]$

Integrální počet funkce více proměnných

Příklad 56. Změňte pořadí integrování ve dvojnásobných integrálech a znázorněte oblast integrování:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[\int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_2^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y]$

(b) $\displaystyle\int_{-6}^2 \left(\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[\int_{-1}^0 \left(\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_0^8 \left(\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)]$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$ $\quad[\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x]$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$

$[\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x]$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$ $\quad[\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x]$

(f) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[\int_0^2 \left(\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y]$

(g) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_1^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_2^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$ $\quad[\int_1^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x]$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$ $\quad[\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x]$

Příklad 57. Vypočtěte integrály

(a) $\displaystyle\int_2^4 \left(\int_x^{2x} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[90]$

(b) $\displaystyle I = \iint_{\mathcal{Q}} x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde $\mathcal{Q} = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle,$ $\quad[I = \ln 2]$

(c) $\displaystyle I = \iint_{\mathcal{D}} x^7y^6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde $\mathcal{D}$ je oblast ohraničená přímkami $y = x,\ y = \pi,\ x = 0,$

$[I = 0]$

(d) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{y^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ $\Omega : x = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ y = 2,$ $\quad[\frac{31}{20}\pi]$

(e) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x-2y+3)^2},$ $\Omega : x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1,$ $\quad[\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}]$

(f) $\displaystyle\iint_\Omega \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \Omega : y = x,\ x = 0,\ y = \pi,$ $[0]$

(g) $\displaystyle\iint_\Omega (3-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \Omega : x^2+y^2 = 4,$ $[12\pi]$

(h) $\displaystyle\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \Omega : y^2 = 4+x,\ x+3y = 0,$ $[\frac{125}{6}]$

(i) $\displaystyle\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde Ω je zadána nerovnostmi $0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{x}$ nebo $0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le y$ $[\frac{1}{24}]$

(j) $\displaystyle\iint_\Omega \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 < x^2+y^2 < 4\pi^2\},$ $[-6\pi^2]$

(k) $\displaystyle I = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde $\mathcal{D}$ je čtvrtina kruhu $x^2+y^2 \le 1$ (v prvním kvadrantu) $[I = \frac{\pi}{6}(8-3\sqrt{3})]$

(l) $\displaystyle I = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde $\mathcal{D}$ je čtvrtina kruhu $x^2+y^2 \le 1$ (v prvním kvadrantu) $[I = \frac{\pi}{8}(\pi+2)]$

(m) $\displaystyle I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \mathcal{D} : x = 2,\ y = x,\ xy = 1.$ $[I = \frac{9}{4}]$

Příklad 58. Vypočtěte míru (obsah) oblastí určených částmi daných křivek

(a) $y = x,\ y = \dfrac{x}{2},\ y = x^2,\ y = \dfrac{x^2}{2},$ $[\frac{7}{16}]$

(b) $y = 2^x,\ y = 2^{-2x},\ y = 4,$ $[12 - \frac{9}{\ln 4}]$

(c) $y^2 = 4ax + 4a^2,\ x+y = 2a\ (a > 0),$ $[\frac{64}{3}a^2]$

(d) $(x^2+y^2)^2 = xy.$ $[\frac{1}{2}]$

Příklad 59. Vypočtěte trojnásobné integrály a znázorněte oblast integrování

(a) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{x^2} z\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x,$ $[\frac{32}{3}]$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos x} \left(\int_0^{a} y^2 z\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x,$ $[\frac{8}{9}a^2]$

(c) $\displaystyle\int_0^2 x \left(\int_0^{3} y^2 \left(\int_0^{4} z^3\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x,$ $[1\,152]$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{x} z^4 \sin^3 y\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x,$ $[\frac{\pi^6}{45}]$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2} \left(\int_0^{3\sqrt{1-x^2}} z^2\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x,$ $[\frac{2}{9}\pi(3-\pi^2)]$

(f) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^{xy} x^3y^3z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$ $[\frac{a^{11}}{110}]$

Příklad 60. Zaměňte pořadí integrace

(a) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $[\int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{a-y} \left(\int\limits_0^{a-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$
$= \int\limits_0^a \left(\int_0^{a-z} \left(\int\limits_0^{a-y-z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \ldots]$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $[\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int\limits_{\frac{1}{y}}^2 \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y +$
$+ \int\limits_1^2 \left(\int\limits_1^{\frac{2}{y}} \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \ldots]$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 \left(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$ $[\int\limits_0^1 \left(\int\limits_y^1 \left(\int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \ldots]$

Příklad 61. Vypočtěte trojné integrály

(a) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^3},$ kde oblast $\mathcal{V}$ je ohraničená rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,$ $x+y+z=1,$ $[\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)]$

(b) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde oblast $\mathcal{V}$ je ohraničená souřadnicovými rovinami a rovinami $x+y+z=b,\ x=a,\ y=a\ (a:b=6:7),$ $[\frac{1}{24}(2a^4-4a^3b+4ab^3-b^4),\ a=\frac{6}{7}b]$

(c) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} x^2yz^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \mathcal{V}: z=xy,\ y=x,\ y=1,\ z=0,$ $[\frac{1}{364}]$

(d) $\displaystyle\iiint_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$
$\Omega: x^2+y^2+z^2=1,\ x=0,\ y=0\ ,z=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,$ $[\frac{1}{48}]$

(e) $\displaystyle\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde Ω je oblast v 1. oktantu omezená paraboloidem $z=x^2+y^2$ a rovinou $z=2.$ $[\frac{8\sqrt{2}}{15}]$

Příklad 62. Převodem do cylindrických souřadnic vypočtěte integrály

(a) $\displaystyle\iiint_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \Omega: x+y+z=3,\ x^2+y^2=1,\ z=0,$ $[0]$

(b) $\displaystyle\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \Omega: x^2+y^2=z^2,\ x=y,\ z=1,\ x\leq y,\ z\geq 0,$ $[\frac{\pi}{12}]$

(c) $\displaystyle\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \Omega: 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq \sqrt{2x-x^2},\ 0\leq z\leq a,$ $[\frac{8}{9}a^2]$

(d) $\displaystyle\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde Ω je „horní“ polovina koule $x^2+y^2+z^2\leq r^2.$ $[\frac{4}{15}\pi r^5]$

Příklad 63. Převodem do sférických souřadnic vypočtěte integrály

(a) $\iiint_\Omega xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$
$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,$ $[\frac{1}{48}]$

(b) $\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$
$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$ $[\frac{\pi}{10}]$

Příklad 64. Pomocí substituce řešte trojnásobné integrály

(a) $\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $[4\pi]$

(b) $\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$ $[\frac{\pi}{48}]$

Návod. Substituce $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$.

Příklad 65. Pomocí dvojnásobného integrálu vypočtěte objemy těles ohraničenými plochami (načrtněte si příslušný obrázek)

(a) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y = 1,\ z = 1 + x + y,$ $[\frac{5}{6}]$
(b) $y = 1,\ z = 0,\ y = x^2,\ z = x^2 + y^2,$ $[\frac{88}{105}]$
(c) $x^2 + y^2 = z,\ z = x + y,$ $[\frac{\pi}{8}]$
(d) $25x^2 + 9y^2 = 450z,\ 25x^2 + 9y^2 = 225z^2,$ $[20\pi]$
(e) $z = xy,\ x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ y^2 = x,\ y^2 = 2x,$ $[\frac{3}{4}]$
(f) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\ x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 \leq z^2.$ $[\pi]$

Návod. Použijte cylindrických i sférických souřadnic.

Příklad 66. Pomocí trojnásobného integrálu vypočtěte objemy těles ohraničenými plochami

(a) $z = 4 - y^2,\ z = y^2 + 2,$ $[\frac{8}{3}]$
(b) $z = x^2 + y^2,\ z = x^2 + 2y^2,\ y = z,\ y = 2x,\ x = 1,$ $[\frac{7}{12}]$
(c) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x,$ $[\frac{\pi a^3}{3}]$

Návod. Použijte sférických souřadnic.

(d) $\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right)^6 = xyz,$ $[\frac{5}{2}]$
(e) $(x + y + z)^4 = xyz,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$ $[\frac{1}{544\,400}]$