

Opakování SŠ

Příklad 1. Určete maximální definiční obor funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dané předpisem

$$f: x \mapsto \frac{3-x}{\log(4-|x|)} + \sqrt{x^2 - 10x + 16}.$$

Příklad 2. Dokažte, že $\sqrt{12}$ je iracionální číslo, tj. $\sqrt{12} \notin \mathbb{Q}$.

Příklad 3. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt{(2n)!} < 2^n n!.$$

Příklad 4. Je dána funkce $g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Najděte $g(1)$, $g(0)$, $g(-x)$, $g(x+1)$, $\frac{1}{g(x)}$, $g^{-1}(x)$, $g\left(\frac{1}{x}\right)$, $2g(x+3)$.

Najděte $x \in D(g)$, pro které je splněno $g(x) = 3$, $g(x) = x+1$.

Příklad 5. Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a + b|.$$

Návod. Využijte vztah $a = a + b - b$.

Posloupnosti

Příklad 6. Mějme posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ zadanou rekurentním předpisem

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = a_k(k+1).$$

Najděte její vyjádření ve tvaru $a_k = f(k)$ (tj. určete funkci f) a dokažte, že oba předpisy jsou navzájem ekvivalentní.

Příklad 7. Podle definice omezenosti posloupnosti dokažte, že posloupnost

$$\{(n-1)^2 - 4\}_{n=1}^{\infty}$$

je buď omezená, nebo neomezená.

Příklad 8. Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{9n^2 + 12n + 8}{n + 5}}.$$

Příklad 9. Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} - n.$$

Příklad 10. Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)! + (n+3)!}{(n+5)(n+2)!}.$$

Příklad 11. Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^{n+1}}{3^{n-1} + 5^{n+1}}.$$

Příklad 12. Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}).$$

Řady

Příklad 13. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

a určete její součet.

Příklad 14. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^{2n^2}$$

a zdůvodněte.

Příklad 15. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n!}.$$

a zdůvodněte.

Návod. Použijte d'Alembertovo kritérium.

V níže uvedených příkladech 16–19 rozhodněte o absolutní i relativní konvergenci či divergenci řady a podrobně zdůvodněte (napíšte, jaké kritérium použijete, a ověřte jeho předpoklady).

Příklad 16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n - \sqrt{2})\sqrt{n}}.$$

Příklad 17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1-n} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n^2}.$$

Příklad 18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{\pi^{2n} e^n (n!)^3}.$$

Příklad 19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Základní vlastnosti a limita funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Příklad 20. Určete, zda funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin x + \sin \sqrt{12}x$$

je periodická na \mathbb{R} , nebo není. V případě, že ano, určete základní periodu.

Příklad 21. Vypočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots} \right)^{\frac{1}{\arcsin^2 2x}}.$$

Příklad 22. Vypočtete

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}.$$

Příklad 23. Vypočtete limitu funkce

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

pro $x \rightarrow 0$.

Příklad 24. Vypočtěte limitu posloupnosti

$$\left\{ \operatorname{arctg} \frac{5 + 9 + 13 + \cdots + (4n + 5)}{2n^2 - 3n + 1} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Příklad 25. Je dána funkce $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos 2x.$$

- Určete definiční obor D a obor hodnot H funkce f .
- Je funkce f lichá, sudá, monotónní? Zdůvodněte!
- Stanovte $\sup_D f(x)$, $\inf_D f(x)$, $\max_D f(x)$, $\min_D f(x)$ (pokud existují).
- Stanovte f^{-1} a pečlivě nakreslete graf f , f^{-1} .

Derivace funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Příklad 26. Určete body nespojitosti funkce g a rozhodněte, o který druh nespojitosti se v jednotlivých případech jedná:

$$g(x) = \frac{\arcsin(1 - 2x)}{4x^2 - 1}.$$

Příklad 27. Z definice určete derivaci f' funkce $f(x) = \sqrt[4]{x}$ v bodě $x_0 > 0$.

Příklad 28. Vypočtěte derivaci funkce

$$\ln(x^2 + x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

a výsledný výraz upravte do co nejjednoduššího tvaru.

Příklad 29. Vypočtěte derivaci funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x) = g \left(\sqrt{\frac{1 + \sin x}{2}} \right),$$

kde g je inverzní funkce k funkci $h: \langle \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$:

$$h(t) = \sin t.$$

Příklad 30. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{ax}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 0.$$

Vyšetřování průběhu funkce

V následujících příkladech 31–35 vyšetřete průběh dané funkce a načrtněte její graf.

Příklad 31. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Příklad 32. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Návod. Vyšetřete průběh funkce nejprve pro n sudé, pak pro n liché.

Příklad 33. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$h(x) = \log_x e.$$

Příklad 34. $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$l(x) = \arcsin \frac{1 + x}{1 - 2x}.$$

Příklad 35. $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$p(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right|.$$

Poznámka. O vyšetřování průběhu funkce pojednává kapitola 8.3 skript

Drábek, P., Míka, S., *Matematická analýza I*, ZČU, Plzeň,
zvláště pak str. 153–154.

Integrace funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

V níže uvedených příkladech 36–40 vypočtete integrál a výsledek ověřte derivováním.

Příklad 36.

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{3x^3 - 5x^2 + 2x - 8} dx.$$

Příklad 37.

$$\int \frac{dx}{\sin(x+1) + \cos(x+1) + 1}.$$

Příklad 38.

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx.$$

Příklad 39.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Příklad 40.

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$