Diferenciální počet funkce více proměnných

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu dané funkce $u = u(x, y)$, resp. $u = u(x, y, z)$ podle všech nezávisle proměnných

(a) $u = 3x - \sin(xy)$, $[u_x = 3 - y\cos(xy),\ u_y = -x\cos(xy)]$

(b) $u = x^{-y}$, $[u_x = -yx^{-y-1},\ u_y = -x^{-y}\ln x]$

(c) $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $[u_x = \frac{|y|}{x^2+y^2},\ u_y = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}]$

(d) $u = [\cos(xy)]^{xyz}$, $[u_x = uyz[\ln\cos(xy) - xy\operatorname{tg}(xy)],$
$u_y = uxz[\ln\cos(xy) - xy\operatorname{tg}(xy)],\ u_z = uxy\ln[\cos(xy)]]$

(e) $u = x^2\ln y,\ x = \dfrac{f}{g},\ y = 3f - g,$ výsledek ověřte výpočtem parciálních derivací funkce $u(f, g) = u(x(f, g), y(f, g))$. $[u_f = 2\frac{x}{g}\ln y + \frac{3x^2}{y},\ u_g = -2x^2\ln y - \frac{2x^2}{y}]$

Příklad 2. Vypočtěte v bodě M hodnoty parciálních derivací prvního řádu funkce u podle všech nezávislých proměnných

(a) $u = (1 + 2xy)^x,\ M = (0, 1)$, $[u_x(0,1) = 0,\ u_y(0,1) = 0]$

(b) $u = y\,\mathrm{e}^{xz},\ M = (0, 2, 4)$. $[u_x(0,2,4) = 8,\ u_y(0,2,4) = 1,\ u_z(0,2,4) = 0]$

Příklad 3. Vypočtěte uvedené parciální derivace funkce u

(a) $u = \sin(x + y^2),\ u_{xx} =?,\ u_{yx} =?$, $[u_{xx} = -\sin(x + y^2),\ u_{yx} = -2y\sin(x + y^2)]$

(b) $u = y^{\ln x},\ u_{xxx} =?,\ u_{xyy} =?$,
$[u_{xxx} = u\ln^3 y,\ u_{xyy} = [\ln x - 1][\ln x\ln y + 1]y^{\ln x - 2} + \ln x y^{\ln x - 1}]$

(c) $u = x(1 + xy^z),\ u_{xxx} =?,\ u_{yz} =?$. $[u_{xxx} = 0,\ u_{yz} = x^2y^{z-1}(1 + z\ln y)]$

Příklad 4. Derivováním vypočtěte parciální derivace daných funkcí $u = u(x, y)$, resp. $u = u(t, x)$. Zjistěte, zda funkce u je řešením dané parciální diferenciální rovnice.

(a) $u = y\ln(x^2 - y^2)$, $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{u}{y^2} = 0$, [ano]

(b) $u = y^{\frac{y}{x}}\sin\dfrac{y}{x}$, $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} - yu = 0$, [ano]

(c) $u = \sqrt{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, [ne]

(d) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, [ano]

(e) $u = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} - x\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial^2 y} - y\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} = 0$, [ano]

(f) $u = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, [ano]

(g) $u = \sin(x + at)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, [ano]

(h) $u = \cos(x + at)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, [ano]

(i) $u = \sqrt{x + at}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$ [ano]

(j) $u = (x - at)^2, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$ [ano]

(k) $u = (x + t)^3, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$ [ano]

Příklad 5. Je dána funkce $u = x^4 y - xy^4 + 6z$ a body $M = (1, 1, -1)$, $P = (3, -1, -2)$ v $\mathbb{R}^3$. Určete

(a) diferenciál $\mathrm{d}u$ v bodě M, $[\mathrm{d}u = 3h_1 - 3h_2 + 6h_3 \equiv 3\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y + 6\,\mathrm{d}z]$

(b) derivaci u v bodě M ve směru od M do P, $[\boldsymbol{s} = \frac{\vec{MP}}{|\vec{MP}|} = \left[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]^{\mathrm{T}}, \ \frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{s}} = 2]$

(c) směr a rychlost největší změny u v bodě M, $[\frac{\operatorname{grad} u(M)}{\|\operatorname{grad} u(M)\|} = \left[\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]^{\mathrm{T}};$ $\|\operatorname{grad} u(M)\| = 3\sqrt{6}]$

(d) rovnici tečné roviny k hladině procházející bodem M, $[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)})^{\mathrm{T}} \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}^{(0)}) = 0,$ $\boldsymbol{x}^{(0)} = [1, 1, -1]^{\mathrm{T}};\ 3(x - 1) - 3(y - 1) + 6(z + 1) = 0]$

(e) rovnici tečné nadroviny v $\mathbb{R}^4$ ke grafu funkce u nad bodem M. $[u - u_0 =$ $= (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)})^{\mathrm{T}} \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}^{(0)}),\ u_0 = u(\boldsymbol{x}^{(0)}) = -6 \boldsymbol{x}^{(0)} = [1, 1, -1]^{\mathrm{T}};$ $u + 6 = 3(x - 1) - 3(y - 1) + 6(x + 1)]$

Příklad 6. Je dána kulová plocha (sféra v $\mathbb{R}^3$) o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Stanovte tečnou rovinu k této kulové ploše, která je rovnoběžná s rovinou o rovnici $x + 2y - 3z + 1 = 0$. $[x + 2y - 3z - 2\sqrt{14} = 0;\ -x - 2y + 3z - 2\sqrt{14} = 0]$

Příklad 7. Je dána funkce $u = xy + yz + 1$, vektor $\boldsymbol{v} = [12, -3, -4]^T$ a body $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (3, 3, 5)$, $C = (0, -2, -1)$. Určete derivaci dané funkce v daných bodech podle vektoru $\boldsymbol{v}$.

$[\operatorname{grad} u(A) = [y_0, x_0 + z_0, y_0]^{\mathrm{T}},\ \frac{\partial u(A)}{\partial \boldsymbol{v}} = 8y_0 - 3x_0 - 3z_0,\ \frac{\partial u(B)}{\partial \boldsymbol{v}} = 0,\ \frac{\partial u(C)}{\partial \boldsymbol{v}} = -13]$

Příklad 8. Určete derivaci funkce u v bodě M podle vektoru $\boldsymbol{v}$.

(a) $u = \operatorname{arctg}(xy),\ M = (1, 1),\ \boldsymbol{v} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1, 1),$ $[u_{\boldsymbol{v}}(1, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

(b) $u = xy^2 + z^3 - xyz,\ M = (1, 1, 2),\ \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1).$ $[u_{\boldsymbol{v}}(1, 1, 2) = 5]$

Příklad 9. Je dána funkce $u = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ a body $M_1 = (-1, 2, -2)$, $M_2 = (2, 0, 1)$. Určete směr a velikost největšího růstu funkce $u = u(x, y, z)$ v bodě M_1 a největšího spádu v bodě M_2. $[\operatorname{grad} u(M_1) = \frac{1}{5}[1, 2, -2]^{\mathrm{T}},\ \|\operatorname{grad} u(M_1)\| = \frac{3}{5},$ $-\operatorname{grad} u(M_2) = \left[\frac{10}{9}, 0, \frac{5}{9}\right]^{\mathrm{T}},\ \|\operatorname{grad} u(M_2)\| = \frac{5}{3}\sqrt{5}]$

Příklad 10. Určete vektor $\boldsymbol{v}$, v jehož směru je derivace $u_{\boldsymbol{v}}$ v bodě $M = (3, 0)$ maximální; $u = \ln \frac{x+y}{x-y}$. $[\boldsymbol{v} = (0, 1)]$

Příklad 11. Je dán gradient funkce $u = u(x,y)$. Stanovte tuto funkci u.

(a) $\operatorname{grad} u = \left[\dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{1}{1+y^2}\right]^{\mathrm{T}}$, $[u(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + C]$

(b) $\operatorname{grad} u = [y, x - y^3]^{\mathrm{T}}$. $[u(x,y) = xy - \frac{y^4}{4} + C]$

Příklad 12. V bodech $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ určete hodnoty všech derivací prvního a druhého řádu funkce $u = g(x)$: $u - x\,\mathrm{e}^u + x = 0$.

$[g'(0) = 0,\ g''(0) = 0,\ g'(2) = 0,\ g''(2) = 0]$

Příklad 13. Najděte totální diferenciál funkce u :

(a) $u = \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$, $[\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2+y^2}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)]$

(b) $u = \ln \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, $[\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x-y}\left(\mathrm{d}x - \sqrt{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}y\right)]$

(c) $u = u(x,y)$, $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$. $[\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\sin 2u}(\sin 2x\,\mathrm{d}x + \sin 2y\,\mathrm{d}y)]$

Příklad 14. Pomocí totálního diferenciálu přibližně určete hodnotu $A = \sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

$[A \doteq 2{,}95]$

Příklad 15. Najděte tečnou rovinu τ, normálový vektor $\boldsymbol{n}$ a normálu n grafu funkce $z = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$ v bodě $M = (3,1,?)$.

$[\tau \equiv 3x + 4y + 2z - 14 = 0;\ \boldsymbol{n} = (3,4,2);\ n \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{2}]$

Příklad 16. Určete totální diferenciál druhého řádu $u = u(x,y)$, dané implicitně rovnici $x = u \ln \frac{u}{y}$. $[\,\mathrm{d}^2 u = \frac{u(y\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)}{y(x+u)}]$