Integrální počet funkce více proměnných

Příklad 1. Změňte pořadí integrování ve dvojnásobných integrálech a znázorněte oblast integrování:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[\int\limits_0^2 \Big(\int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y + \int\limits_2^4 \Big(\int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y]$

(b) $\displaystyle\int_{-6}^2 \left(\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[\int\limits_{-1}^0 \Big(\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y + \int\limits_0^8 \Big(\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)]$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$ $\quad[\int\limits_{-1}^1 \Big(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x]$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$

$[\int\limits_{-1}^1 \Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x]$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$ $\quad[\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x]$

(f) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[\int\limits_0^2 \Big(\int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y]$

(g) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_1^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_2^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$ $\quad[\int\limits_1^2 \Big(\int\limits_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x]$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$ $\quad[\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 \Big(\int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x]$

Příklad 2. Vypočtěte integrály

(a) $\displaystyle\int_2^4 \left(\int_x^{2x} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[90]$

(b) $\displaystyle I = \iint_{\mathcal{Q}} x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde $\mathcal{Q} = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle,$ $\quad[I = \ln 2]$

(c) $\displaystyle I = \iint_{\mathcal{D}} x^7y^6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde $\mathcal{D}$ je oblast ohraničená přímkami $y = x,\ y = \pi,\ x = 0,$ $\quad[I = 0]$

(d) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{y^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \Omega : x = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ y = 2,$ $\quad[\frac{31}{20}\pi]$

(e) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x-2y+3)^2},\ \Omega : x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1,$ $\quad[\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}]$

(f) $\displaystyle\iint_{\Omega} \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \Omega : y = x,\ x = 0,\ y = \pi,$ $\quad[0]$

(g) $\displaystyle\iint_\Omega (3-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \Omega : x^2+y^2=4,$ $[12\pi]$

(h) $\displaystyle\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \Omega : y^2=4+x,\ x+3y=0,$ $[\frac{125}{6}]$

(i) $\displaystyle\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde Ω je zadána nerovnostmi $0\le x\le 1,\ x\le y\le\sqrt{x}$ nebo $0\le y\le 1,\ y^2\le x\le y$ $[\frac{1}{24}]$

(j) $\displaystyle\iint_\Omega \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \pi^2<x^2+y^2<4\pi^2\},$ $[-6\pi^2]$

(k) $\displaystyle I=\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde $\mathcal{D}$ je čtvrtina kruhu $x^2+y^2\le 1$ (v prvním kvadrantu) $[I=\frac{\pi}{6}(8-3\sqrt{3})]$

(l) $\displaystyle I=\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde $\mathcal{D}$ je čtvrtina kruhu $x^2+y^2\le 1$ (v prvním kvadrantu) $[I=\frac{\pi}{8}(\pi+2)]$

(m) $\displaystyle I=\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \mathcal{D} : x=2,\ y=x,\ xy=1.$ $[I=\frac{9}{4}]$

Příklad 3. Vypočtěte míru (obsah) oblastí určených částmi daných křivek

(a) $\displaystyle y=x,\ y=\frac{x}{2},\ y=x^2,\ y=\frac{x^2}{2},$ $[\frac{7}{16}]$

(b) $y=2^x,\ y=2^{-2x},\ y=4,$ $[12-\frac{9}{\ln 4}]$

(c) $y^2=4ax+4a^2,\ x+y=2a\ (a>0),$ $[\frac{64}{3}a^2]$

(d) $(x^2+y^2)^2=xy.$ $[\frac{1}{2}]$

Příklad 4. Vypočtěte trojnásobné integrály a znázorněte oblast integrování

(a) $\displaystyle\int_0^2\left(\int_0^{2x}\left(\int_0^{x^2} z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $[\frac{32}{3}]$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos x}\left(\int_0^{a} y^2 z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $[\frac{8}{9}a^2]$

(c) $\displaystyle\int_0^2 x\left(\int_0^{3} y^2\left(\int_0^{4} z^3\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $[1\,152]$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{x} z^4\sin^3 y\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $[\frac{\pi^6}{45}]$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2}\left(\int_0^{3\sqrt{1-x^2}} z^2\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $[\frac{2}{9}\pi(3-\pi^2)]$

(f) $\displaystyle\int_0^{a}\left(\int_0^{x}\left(\int_0^{xy} x^3y^3z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$ $[\frac{a^{11}}{110}]$

Příklad 5. Zaměňte pořadí integrace

(a) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[\int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{a-y} \left(\int\limits_0^{a-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$
$= \int\limits_0^a \left(\int_0^{a-z} \left(\int\limits_0^{a-y-z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \ldots]$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $\quad[\int\limits_{\frac12}^1 \left(\int\limits_{\frac1y}^2 \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y +$
$+ \int\limits_1^2 \left(\int\limits_1^{\frac2y} \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \ldots]$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 \left(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$ $\quad[\int\limits_0^1 \left(\int\limits_y^1 \left(\int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \ldots]$

Příklad 6. Vypočtěte trojné integrály

(a) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^3},$ kde oblast $\mathcal{V}$ je ohraničená rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,$ $x+y+z=1,$ $\quad[\frac12\left(\ln 2 - \frac58\right)]$

(b) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde oblast $\mathcal{V}$ je ohraničená souřadnicovými rovinami a rovinami $x+y+z=b,\ x=a,\ y=a\ (a:b=6:7),$ $\quad[\frac{1}{24}(2a^4-4a^3b+4ab^3-b^4),\ a=\frac67 b]$

(c) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} x^2yz^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \mathcal{V}: z=xy,\ y=x,\ y=1,\ z=0,$ $\quad[\frac{1}{364}]$

(d) $\displaystyle\iiint_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$
$\Omega: x^2+y^2+z^2=1,\ x=0,\ y=0\ ,z=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,$ $\quad[\frac{1}{48}]$

(e) $\displaystyle\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde Ω je oblast v 1. oktantu omezená paraboloidem $z=x^2+y^2$ a rovinou $z=2.$ $\quad[\frac{8\sqrt2}{15}]$

Příklad 7. Převodem do cylindrických souřadnic vypočtěte integrály

(a) $\displaystyle\iiint_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \Omega: x+y+z=3,\ x^2+y^2=1,\ z=0,$ $\quad[0]$

(b) $\displaystyle\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \Omega: x^2+y^2=z^2,\ x=y,\ z=1,\ x\le y,\ z\ge 0,$ $\quad[\frac{\pi}{12}]$

(c) $\displaystyle\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \Omega: 0\le x\le 2,\ 0\le y\le\sqrt{2x-x^2},\ 0\le z\le a,$ $\quad[\frac89 a^2]$

(d) $\displaystyle\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$ kde Ω je „horní“ polovina koule $x^2+y^2+z^2\le r^2$.$[\frac{4}{15}\pi r^5]$

Příklad 8. Převodem do sférických souřadnic vypočtěte integrály

(a) $\displaystyle\iiint_\Omega xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,
$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,$ $[\frac{1}{48}]$

(b) $\displaystyle\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,
$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$ $[\frac{\pi}{10}]$

Příklad 9. Pomocí substituce řešte trojnásobné integrály

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$ $[4\pi]$

(b) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$ $[\frac{\pi}{48}]$

Návod. Substituce $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$.

Příklad 10. Pomocí dvojnásobného integrálu vypočtěte objemy těles ohraničenými plochami (načrtněte si příslušný obrázek)

(a) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y = 1,\ z = 1 + x + y,$ $[\frac{5}{6}]$

(b) $y = 1,\ z = 0,\ y = x^2,\ z = x^2 + y^2,$ $[\frac{88}{105}]$

(c) $x^2 + y^2 = z,\ z = x + y,$ $[\frac{\pi}{8}]$

(d) $25x^2 + 9y^2 = 450z,\ 25x^2 + 9y^2 = 225z^2,$ $[20\pi]$

(e) $z = xy,\ x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ y^2 = x,\ y^2 = 2x,$ $[\frac{3}{4}]$

(f) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\ x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 \leq z^2.$ $[\pi]$

Návod. Použijte cylindrických i sférických souřadnic.

Příklad 11. Pomocí trojnásobného integrálu vypočtěte objemy těles ohraničenými plochami

(a) $z = 4 - y^2,\ z = y^2 + 2,$ $[\frac{8}{3}]$

(b) $z = x^2 + y^2,\ z = x^2 + 2y^2,\ y = z,\ y = 2x,\ x = 1,$ $[\frac{7}{12}]$

(c) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x,$ $[\frac{\pi a^3}{3}]$

Návod. Použijte sférických souřadnic.

(d) $\displaystyle\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right)^6 = xyz,$ $[\frac{5}{2}]$

(e) $(x + y + z)^4 = xyz,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$ $[\frac{1}{544\,400}]$