Optimalizace v konečné dimenzi

Příklad 1. Je dána funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Stanovte $\min f(x,y)$, $\max f(x,y)$. [Stacinární bod $A = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$; Hessova matice $\boldsymbol{H}(A)$ je pozitivně definitní, $f(A) = \min f(x,y) = -\frac{4}{3}$; maximum neexistuje, neboť f je konvexní]

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce f :

(a) $f = x^3 - 3xy + y^2 + y - 7$, [lokální minimum v $(1,1)$]

(b) $f = x^3y^2(12 - x - y)$, [lokální maximum v $(6,4)$]

(c) $f = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$, [neexistují lokální extrémy]

(d) $f = (1 + x^{\frac{2}{3}})(1 + y^{\frac{2}{3}})$. [lokální minimum v $(-1, y),\ (x, 1),\ x, y \in \mathbb{R}$]

Příklad 3. Je dána funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vyšetřete extrémy této funkce. [Stacionární body $S_1 = (1,1),\ S_2 = (-1,-1),\ S_3 = (0,0)$; $f(S_1) = f(S_2) = \min f(x,y) = 2$; S_3 je sedlový bod]

Příklad 4. Je dána funkce $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vyšetřete extrémy této funkce. [$S = (0,3),\ f(S) = \min f(x,y) = -9$]

Příklad 5. Stanovte extrémy funkce $f(x,y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. [$S = (21,20),\ f(S) = \max f(x,y) = 282$]

Příklad 6. Najděte lokální a globální extrémy funkce $f = x^2 + y^2 - 6$. [globální minimum v $(0,0)$; neexistuje lokální ani globální maximum]

Příklad 7. Stanovte globální extrémy funkce $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$ v uzavřeném čtverci $\overline{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\}$.
[$S_1 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $S_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $S_3 = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$; $f(S_1) = f(S_3) = \min f(x,y) = -\frac{1}{8}$; $\boldsymbol{H}(S_2)$ indefinitní, $f(S_2) = 0$; v bodech hranice: $f(0,y) = \cos^2 y$: $A_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ bod lokálního minima $f(A_1) = 0$; $A_2 = (0,0)$, $A_3 = (\pi, 0)$, $f(A_2) = 14$, $f(A_3) = 1$; analogicky dále: $B_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $B_2 = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $B_3 = (0, \pi)$, $B_4 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $B_5 = (\pi, \pi)$. Ve vrcholech čtverce je globální maximum, v bodech S_1 a S_2 je globální minimum.]

Příklad 8. Funkce f je dána tabulkou

x_i	1	2	3	4
f_i	1	1	2	2

. Stanovte přímku $y = ax + b$ takovou, aby výraz $g(a,b) = \sum_{i=1}^{4} (f_i - ax_i - b)^2$ byl minimální. Stanovte Hessovu matici funkce g. [$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$; $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 20 & 8 \end{bmatrix}$ pozitivně definitní]

Příklad 9. V rovině $x + 3y - z - 6 = 0$ najděte bod, který je nejblíže k počátku. [$P = \left(\frac{6}{11}, \frac{18}{11}, -\frac{6}{11}\right)$, $v = -\frac{12}{11}$, $d = \frac{6\sqrt{11}}{11}$]

Příklad 10. Na parabole $4x - y^2 = 0$ stanovte bod $P = (x,y)$, který je nejblíže bodu $M = (1,1)$. [$P \doteq (0{,}466; 1{,}365)$, $v \doteq 0{,}262$]

Příklad 11. Stanovte minimum funkce $f(x,y) = 2x - y$ na množině

$$\mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 \le 0,\ -x \le 0,\ -y \le 0\}.$$

Užijte metodu geometrického znázornění množiny $\mathcal{V}$ a hladin funkce f; metodu Lagrangeovy funkce. $[L = L(x, y, u_1, u_2, u_3) : x = 0,\ y = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 0]$

Příklad 12. Je dána funkce $f(x, y) = -xy$ a množina $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 2 = 0\}$. Stanovte extrémy f na $\mathcal{V}$. $[f(1, 1) = \min f(x, y) = -1]$

Příklad 13. Určete extrémy funkce $f(x, y) = x - 2y - 3$ na množině

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}.$$

$[\max f(x, y) = 2,\ \min f(x, y) = -2]$

Příklad 14. Určete minimum a maximum funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

$[\max f = 1 + \sqrt{2}, \min f = -\frac{1}{2}]$

Příklad 15. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, vázané na množinu

$$\mathcal{M} \equiv \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4.$$

[lokální minimum v $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, lokální maximum v $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$]

Příklad 16. Stanovte minimum funkce $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$ na množině

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq 0,\ -y \leq 0,\ x^2 + y - 1 \leq 0\}.$$

$[f(1, 0) = \min_{\mathcal{V}} f(x, y) = 1]$

Příklad 17. Mezi všemi trojúhelníky, jejichž obvod je l, najděte ten, jehož obsah je největší.

Návod. Použijte Heronova vzorce pro obsah S trojúhelníku:

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \qquad \text{kde} \quad l = 2s = a + b + c.$$

[jediným řešením je rovnostranný trojúhelník]

Příklad 18. Mezi všemi kvádry vepsanými do kulové plochy s poloměrem r najděte ten, jehož objem je maximální. [krychle]

Příklad 19. Mezi všemi kvádry vepsanými do elipsoidu s poloosami délek a, b, c najděte ten, který má maximální objem. Určete tento objem. $[V_{\max} = \frac{8}{3\sqrt{3}} abc]$