

Seminář z diferenciálního počtu

Příklad 1. Pro všechna přirozená čísla n platí

$$5|n - 3 \quad \implies \quad 5 \nmid n^3 - 4.$$

Uvedenou implikaci dokažte třemi způsoby: přímo, nepřímo a sporem.

Příklad 2. Vzhledem k definici množiny všech racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

dokažte, že pro libovolné reálné číslo $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \in \mathbb{Q}$ právě tehdy, když a má konečný nebo periodický desetinný rozvoj.

Příklad 3. Na základě definice uspořádání na množině reálných čísel dokažte platnost tvrzení

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \quad \neg(a < b \wedge b < a).$$

Návod: Dokažte, že pro žádnou dvojici a, b reálných čísel a dvojici indexů $k, l \in \mathbb{Z}_0^+$ nemůže platit $\overline{a_k} < \underline{b_k}$ a zároveň $\overline{b_l} < \underline{a_l}$.

Příklad 4. Podle definice absolutní hodnoty dokažte platnost tvrzení

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Příklad 5. Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ máme následující definici konvergence

$$\{a_n\}_{n=1}^\infty \text{ je konvergentní} \iff (\exists a \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) |a_n - a| < \varepsilon.$$

V definici zaměňte druhý, třetí a čtvrtý kvantifikátor (dostanete 7 možností) a určete, jakou vlastnost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ bude takový výrok charakterizovat (zdůvodněte!).

Příklad 6. Mějme dva libovolné polynomy p, q ,

$$\begin{aligned} p(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0, \\ q(n) &= b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_0, \end{aligned}$$

kde $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ jsou stupně polynomů p, q . Předpokládáme pouze, že $a_k, b_l > 0$. V závislosti na stupních a koeficientech polynomů určete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{p(n)}{q(n)}}.$$

Své tvrzení dokažte.

Příklad 7. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\ \cosh^2 x + \sinh^2 x &= \cosh 2x, \\ 2 \sinh x \cosh x &= \sinh 2x.\end{aligned}$$

Příklad 8. Dokažte, že pokud existuje nenulová $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$ nebo $x_0 = -\infty$, pak f a g jsou stejného řádu v bodě x_0 , tj.

$$f = O(g) \quad \text{a} \quad g = O(f) \quad \text{pro } x \rightarrow x_0.$$

Příklad 9. Mějme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť existuje $f'(x)$ pro všechna $x \in D(f)$. Dokažte, že

- je-li f sudá funkce, pak f' je lichá funkce,
- je-li f lichá funkce, pak f' je sudá funkce.

Poznámka. Sudost a lichost ověřte podle definice!

Příklad 10. Mějme funkce $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť existují $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Dále buď $g(x_0) \neq 0$. Dokažte, že pak existuje derivace funkce $\frac{f}{g}$ v bodě x_0 a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Návod. Použijte definici derivace funkce v bodě.

Příklad 11. Dokažte, že existuje-li $\int_a^b f(x) dx$ (tj. $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$), pak f má následující vlastnost:

$$\forall y_0 : (f(a) - y_0)(f(b) - y_0) \leq 0 \quad \implies \quad \exists x_0 \in \langle a, b \rangle : f(x_0) = y_0,$$

tj. na intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá funkce f všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Návod. Použijte Lagrangeovu větu o střední hodnotě.