FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

www.KMA.zcu.cz SINCE 1954

Zajímavosti o n-úhelnících

Michal Bizzarri

Email: bizzarri@ntis.zcu.cz

Katedra matematiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

Seminář (nejen) pro řešitele MO

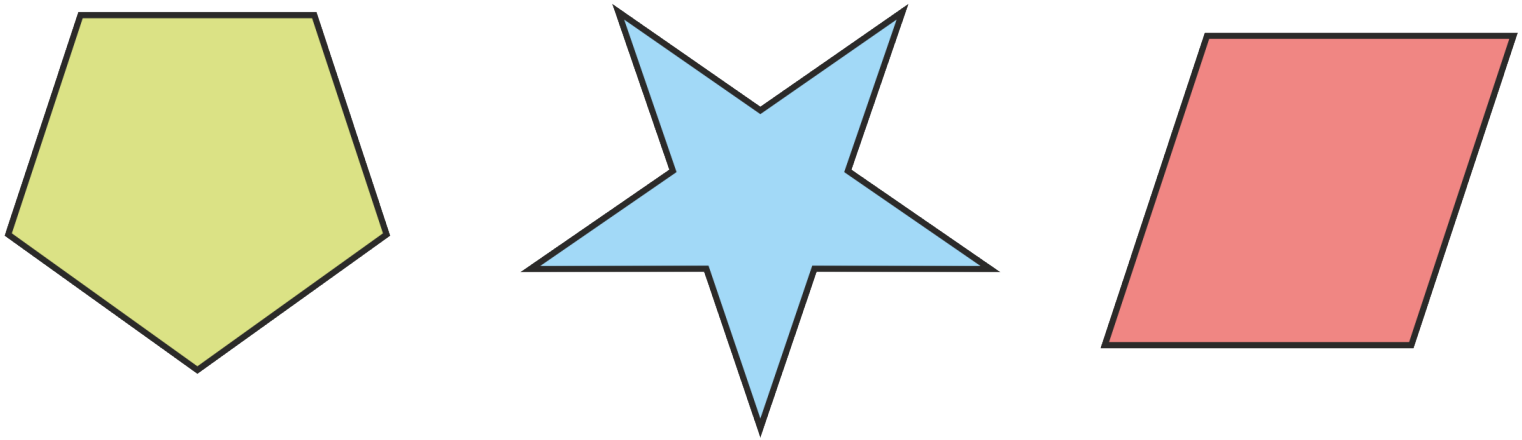
Areál FAV ZČU, Technická 8, Plzeň

14. 12. 2018

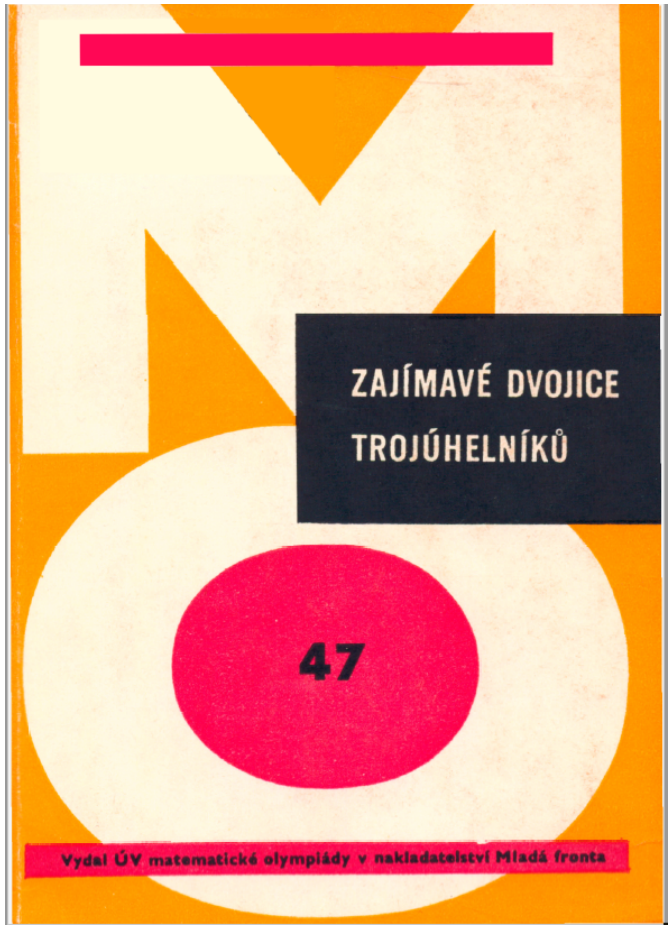
Mnohoúhelníky

Mnohoúhelník (Wikipedia)

Mnohoúhelník je část roviny omezená uzavřenou lomenou čárou takovou, že žádné tři následující koncové body jejích úseček neleží v jedné přímce.



Trojúhelníky

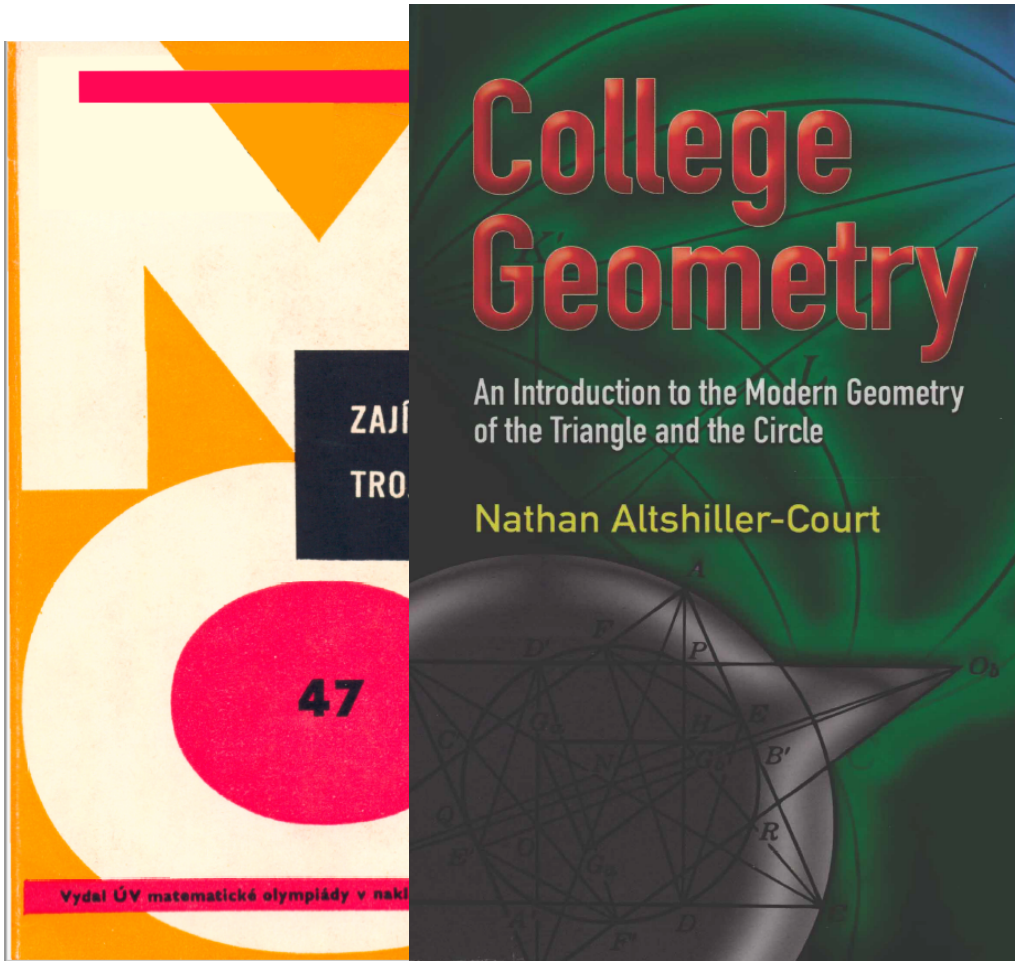


Arnošt Niederle

Zajímavé dvojice trojúhelníků

277 stran

Trojúhelníky

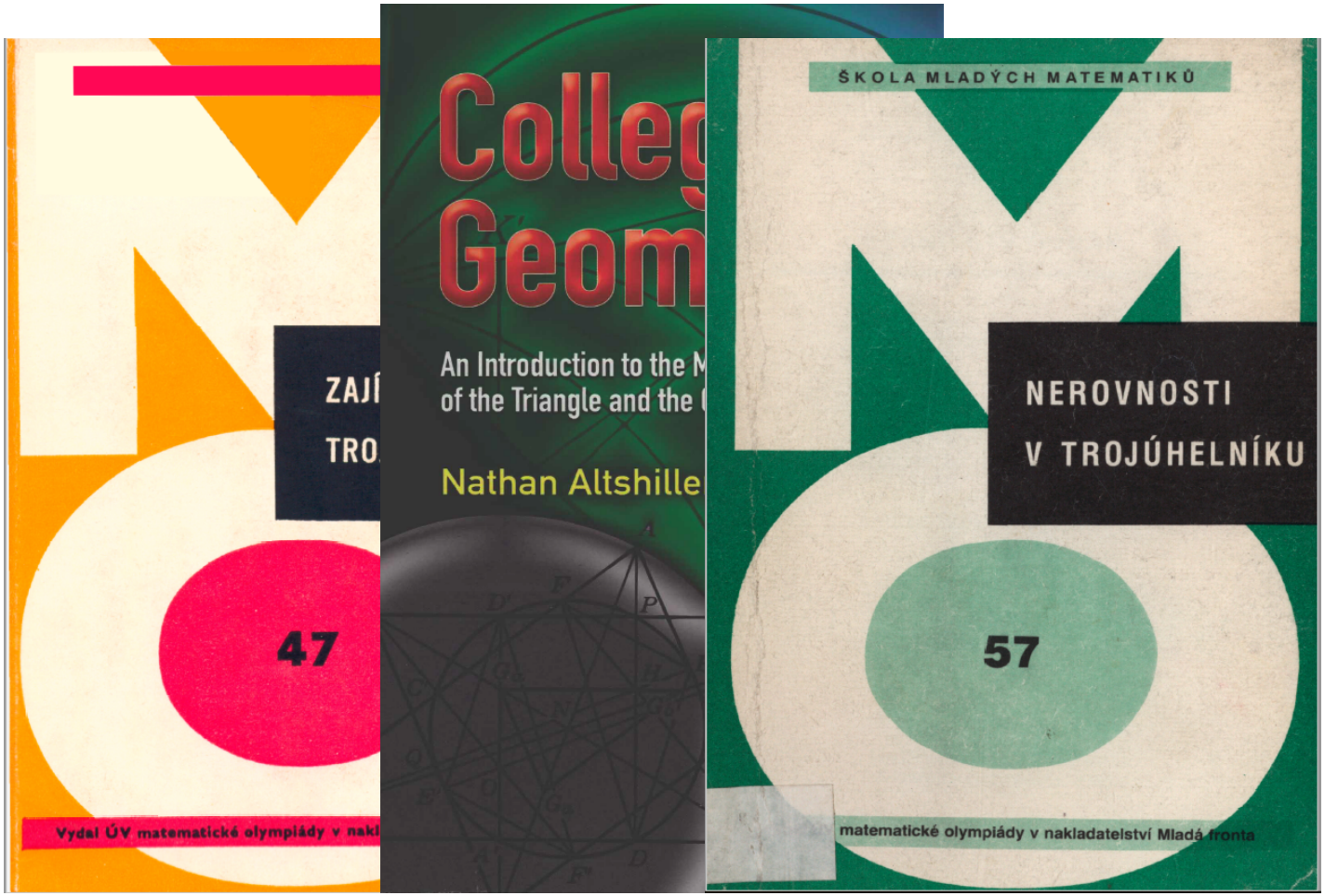


Nathan Altshiller-Court

An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle

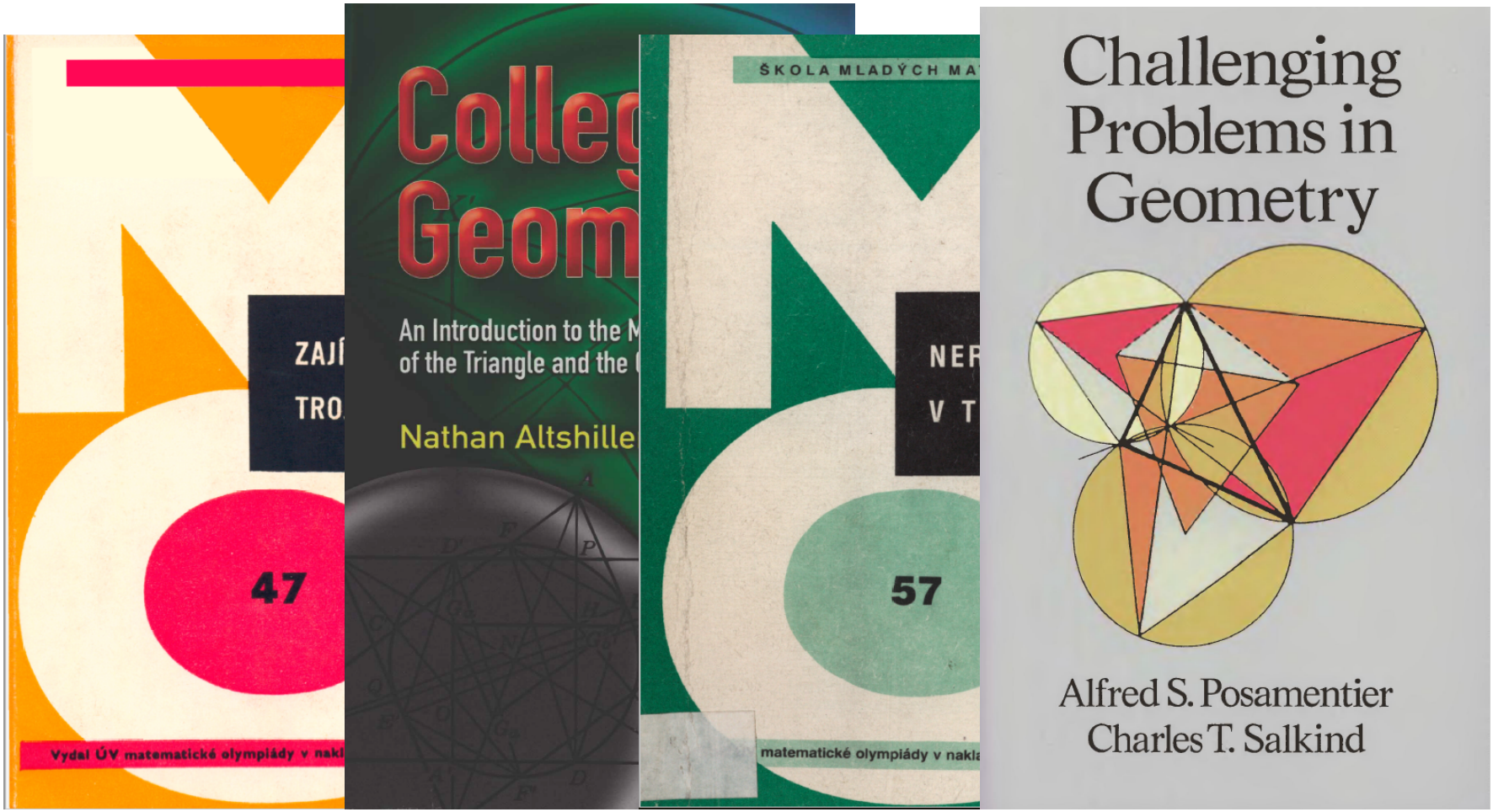
334 stran

Trojúhelníky



Stanislav Horák
Nerovnosti v trojúhelníku
133 stran

Trojúhelníky



A. S. Posamentier, Ch. T. Salkind
Challenging Problems in Geometry
256 stran

$$n = 3$$

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

www.KMA.zcu.cz SINCE 1954

Zajímavosti o trojúhelnících

Michal Bizzarri

Email: bizzarri@ntis.zcu.cz

Katedra matematiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

Seminář (nejen) pro řešitele MO

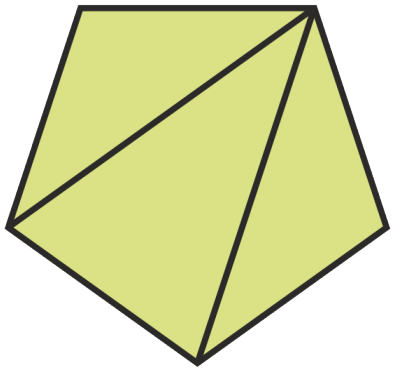
Areál FAV ZČU, Technická 8, Plzeň

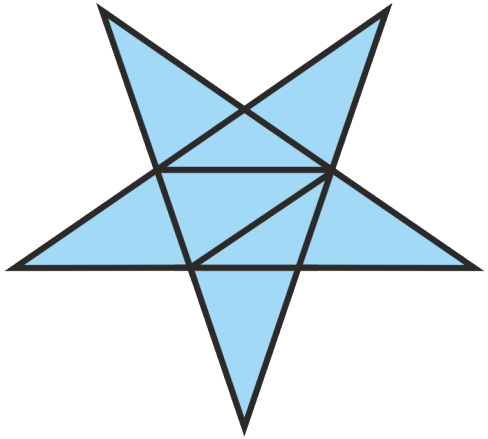
14. 12. 2018

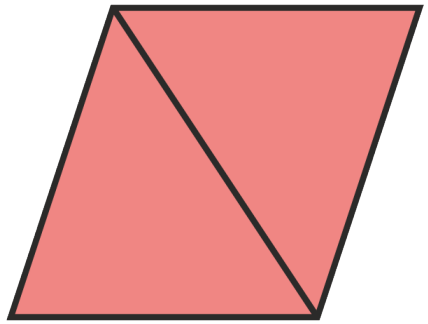
Mnohoúhelníky

Věta (Rozklad mnohoúhelníku na trojúhelníky)

Každý mnohoúhelník s n vrcholy lze rozdělit na $n - 2$ trojúhelníků.







Outline

1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

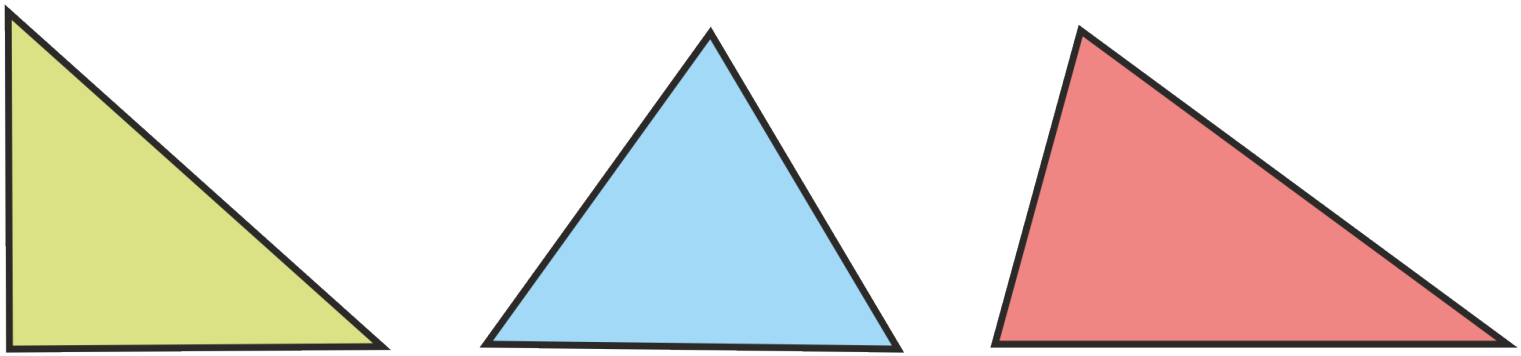
Outline

1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

Trojúhelník

Trojúhelník (Wikipedia)

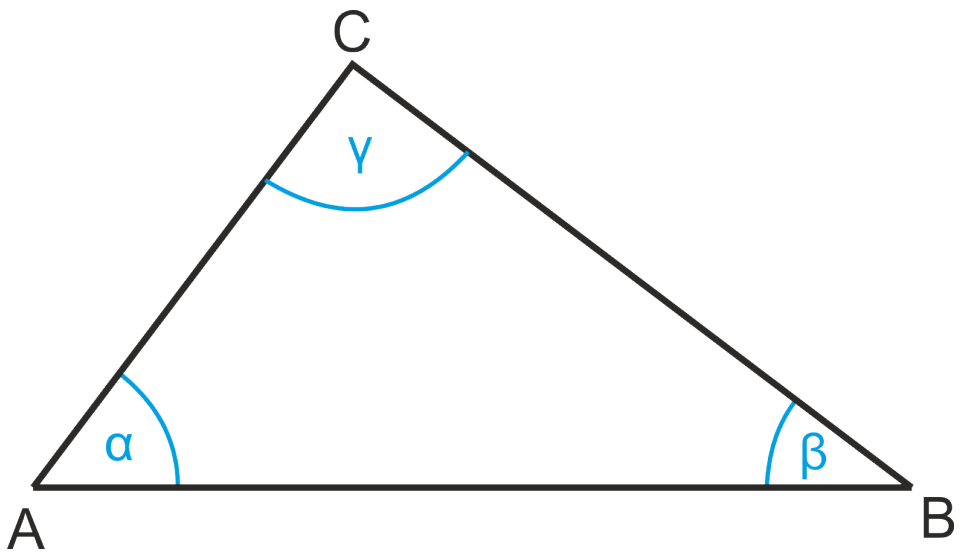
Trojúhelník je geometrický útvar určený třemi body, neležícími v jedné přímce



Trojúhelník

Věta (součet úhlů)

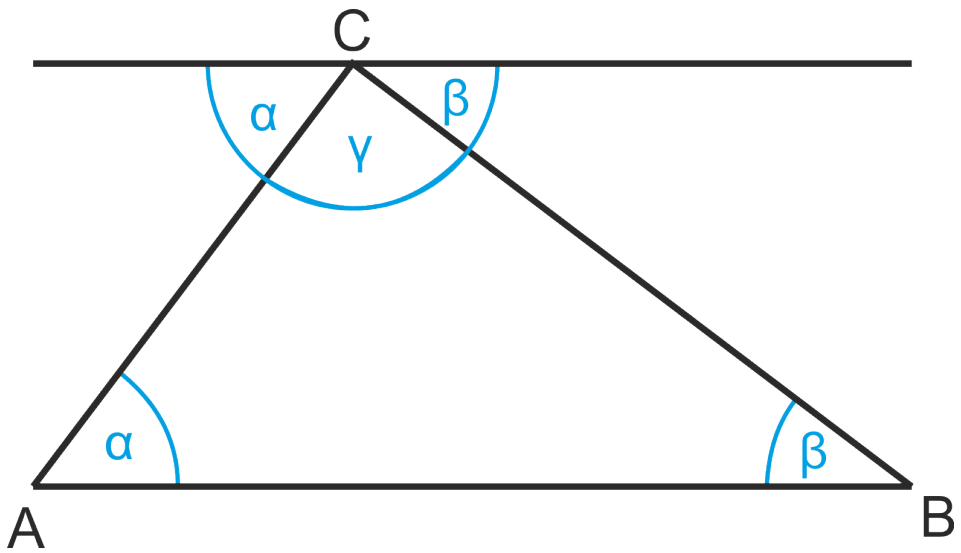
Součet úhlů v trojúhelníku je roven $\pi(180°)$.



Trojúhelník

Věta (součet úhlů)

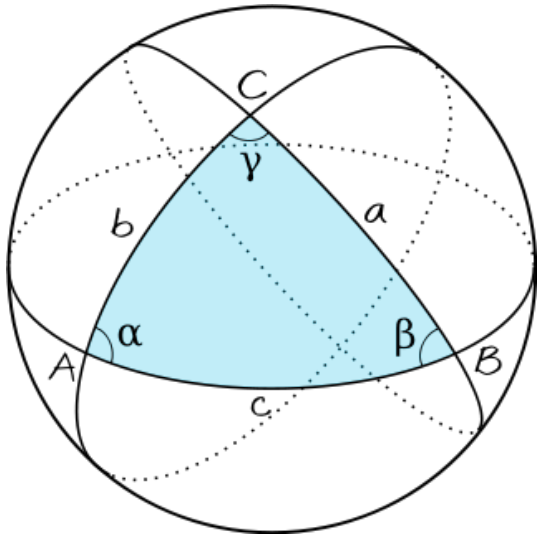
Součet úhlů v trojúhelníku je roven $\pi(180°)$.



Trojúhelník na sféře

Trojúhelník na sféře

Trojúhelník na sféře (sférický trojúhelník) je část povrchu sféry vymezená třemi hlavními kružnicemi.

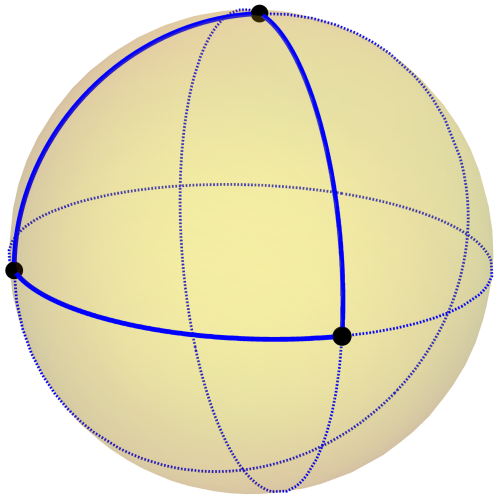


- Pro úhly platí: $\pi(180°) < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi(540°)$
- Pro strany platí: $a + b + c < 2\pi R$
- Exces: $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- Plocha: $S_{\triangle} = R^2\varepsilon$

Trojúhelník na sféře

Trojúhelník na sféře

Trojúhelník na sféře (sférický trojúhelník) je část povrchu sféry vymezená třemi hlavními kružnicemi.

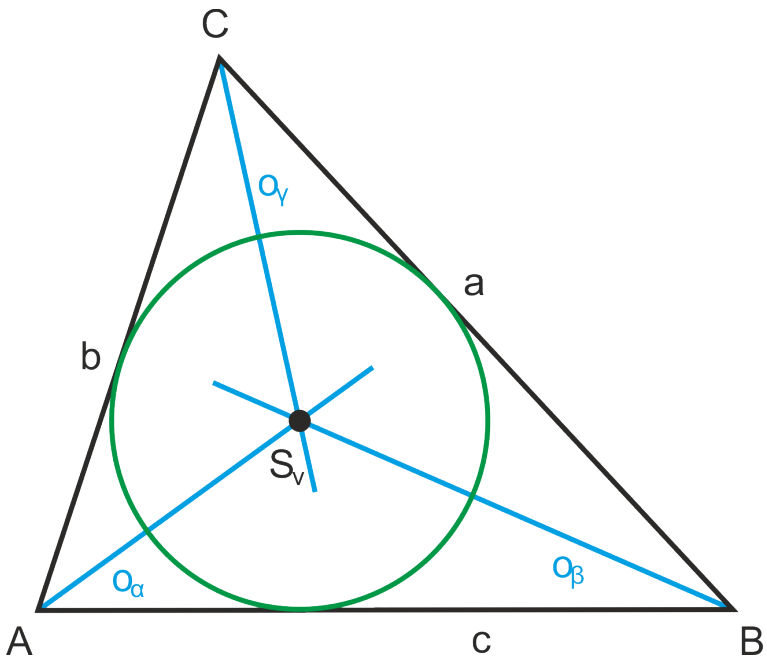


- Pro úhly platí: $\pi(180°) < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi(540°)$
- Pro strany platí: $a + b + c < 2\pi R$
- Exces: $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- Plocha: $S_{\triangle} = R^2\varepsilon$

Kružnice vepsaná trojúhelníku

Střed kružnice vepsané trojúhelníku

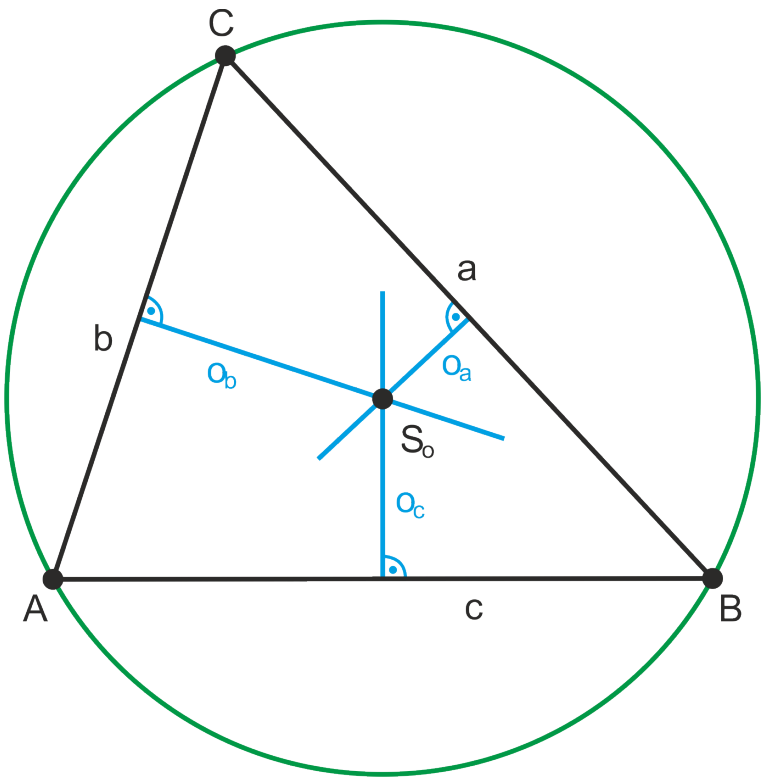
Kružnice vepsaná trojúhelníku má střed v průsečíku os vrcholových úhlů trojúhelníku.



Kružnice opsaná trojúhelníku

Střed kružnice opsané trojúhelníku

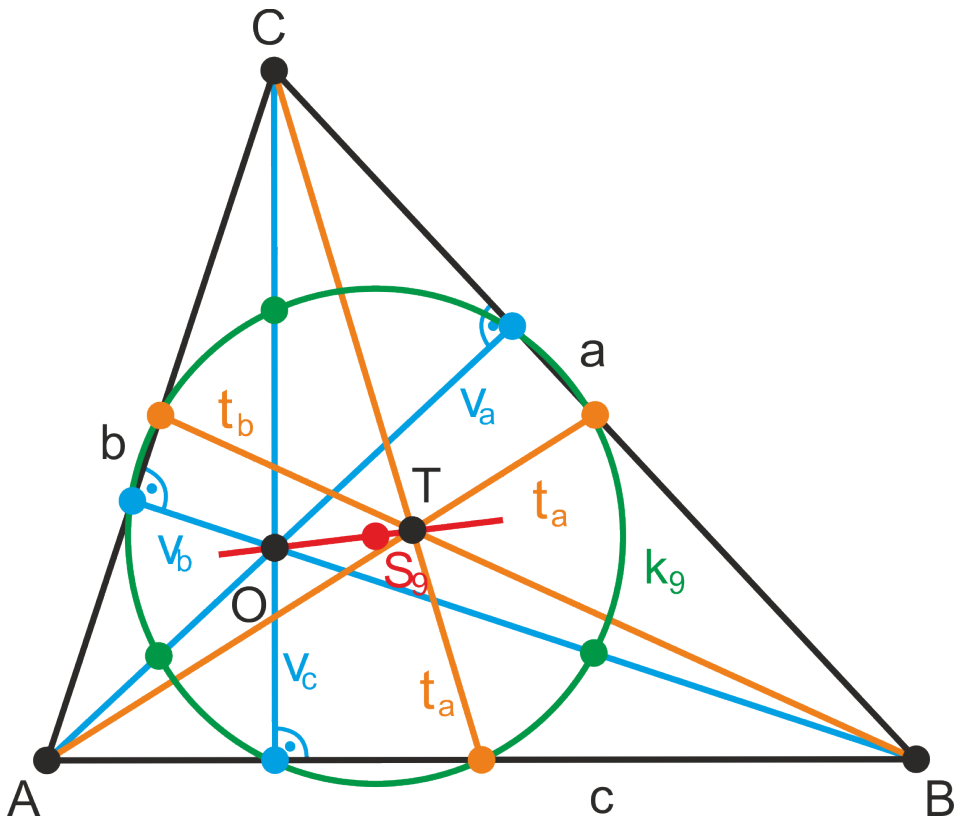
Střed kružnice opsané trojúhelníku je průsečík os stran trojúhelníku.



Kružnice devíti bodů

Kružnice devíti bodů je kružnice, na níž leží jeho následující body:

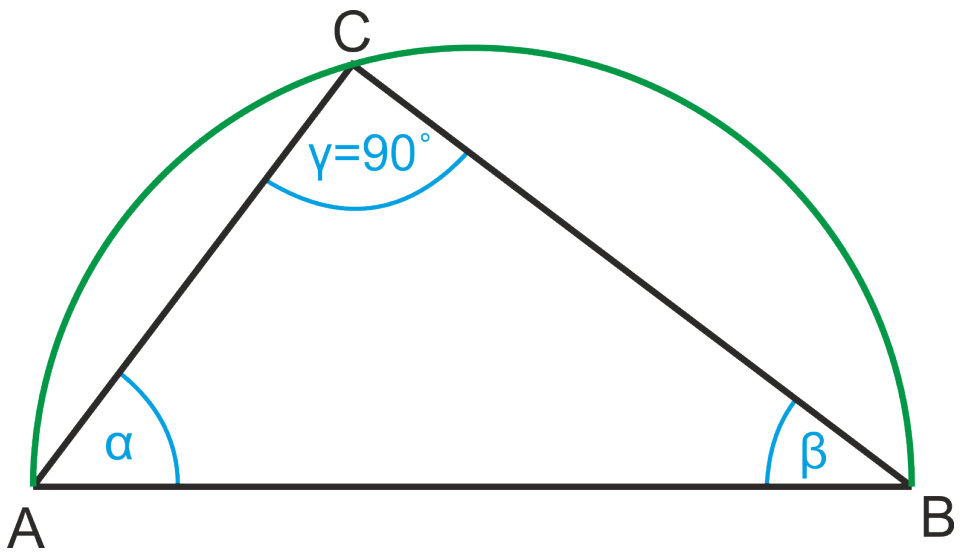
- středy stran
- paty výšek
- středy spojnic vrcholů s ortocentrem



Thaletova věta

Thaletova věta

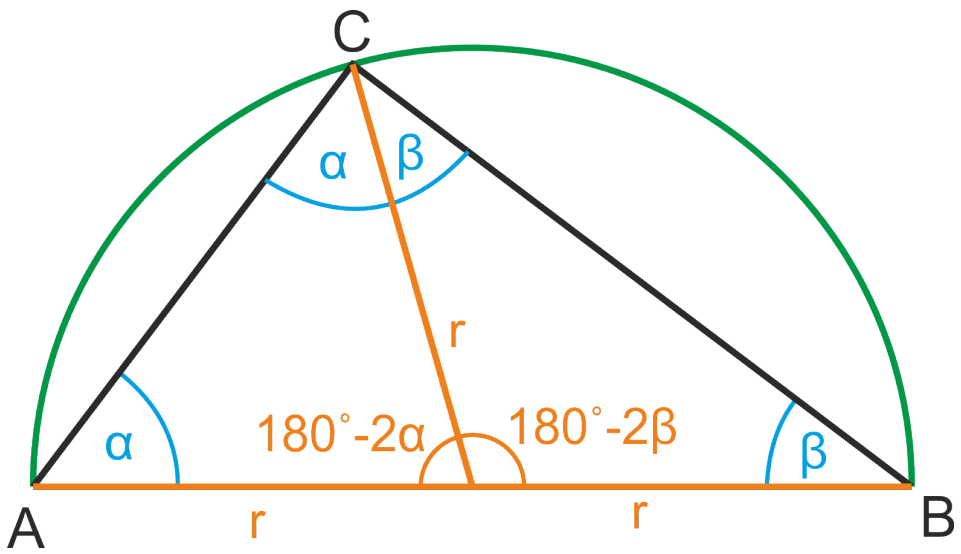
Všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé.



Thaletova věta

Thaletova věta

Všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé.



Outline

1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

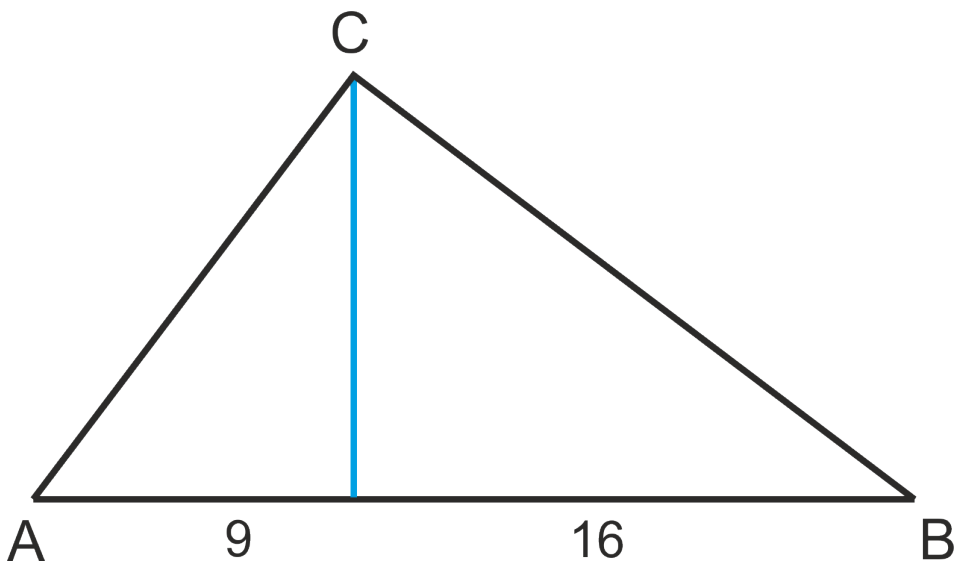
Massachusettský technologický institut

- soukromá výzkumná univerzita ve městě Cambridge amerického státu Massachusetts
- MIT byla založena Williamem Bartonem Rogersem v roce 1861
- Komplex MIT má pět škol a jednu vysokou školu s 32 akademickými odděleními, se silným důrazem na teoretický, aplikovaný, mezidisciplinární vědecký a technologický výzkum
- Absolventi MIT jsou středem zájmu pro svoji technickou bystrost: 76 laureátů Nobelovy ceny)
- Během druhé světové války vědci z MIT vyvíjeli obranné technologie, které se později staly integrálními součástmi počítačů, radarů a gyroskopické navigace (využívané v námořnictví, letectví a kosmonautice)

Otázka z přijímacích zkoušek na MIT (1869)

Otázka z přijímacích zkoušek na MIT

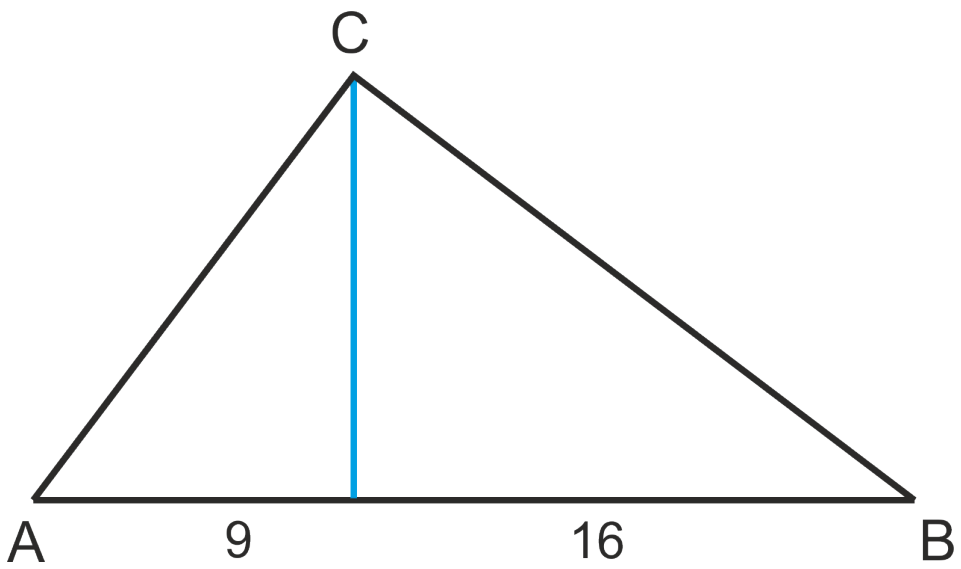
Kolmice x vedená z vrcholu s pravým úhlem rozděluje přeponu na dvě části o velikostech 9 a 16. Jaké velikosti mají odvěsny a, b a kolmice x daného trojúhelníku?



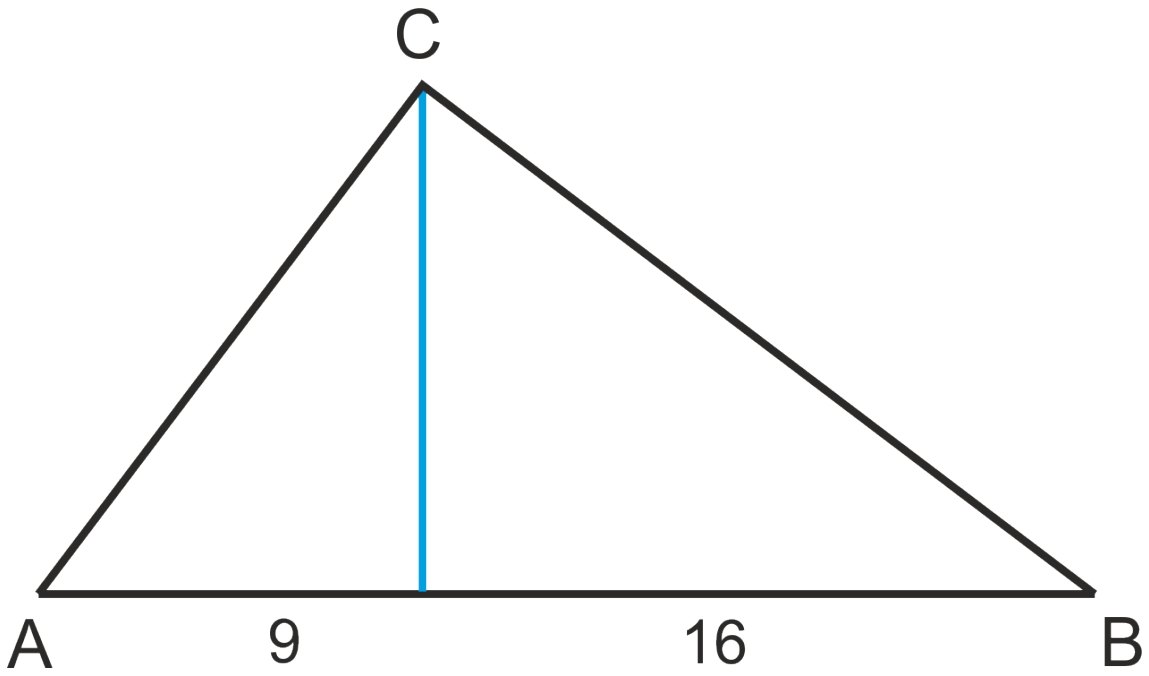
Otázka z přijímacích zkoušek na MIT (1869)

Otázka z přijímacích zkoušek na MIT

Kolmice x vedená z vrcholu s pravým úhlem rozděluje přeponu na dvě části o velikostech 9 a 16. Jaké velikosti mají odvěsny a, b a kolmice x daného trojúhelníku? Bez použití Eukleidových vět/Pythagorovy věty

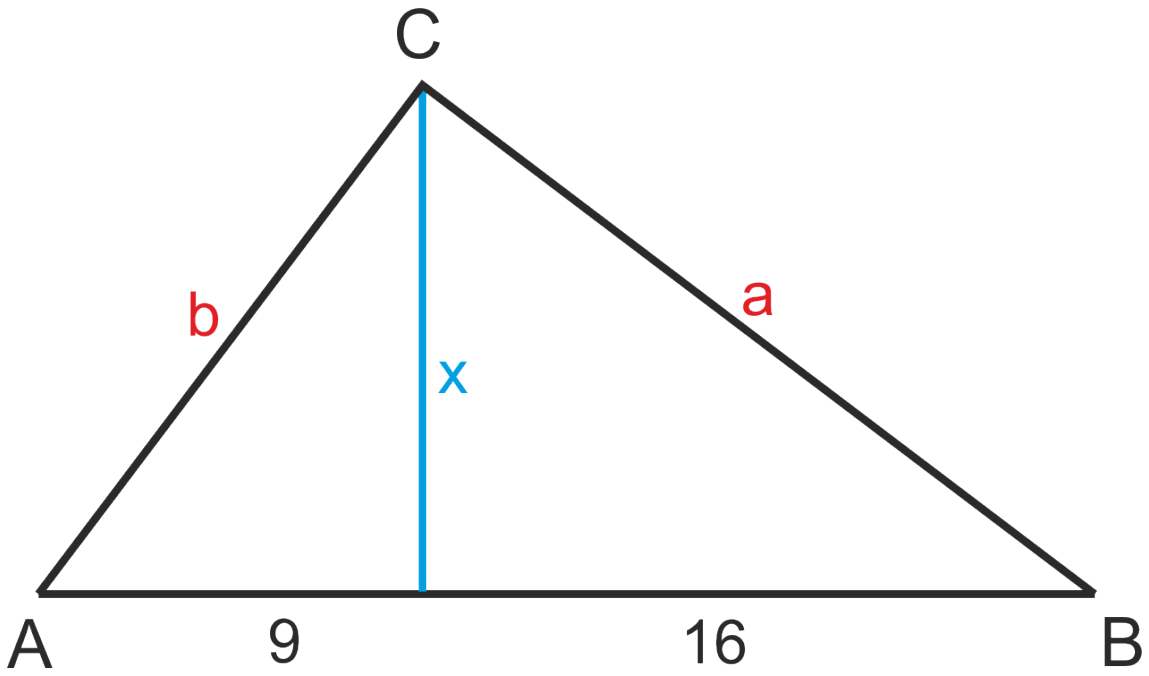


MIT problém – řešení:



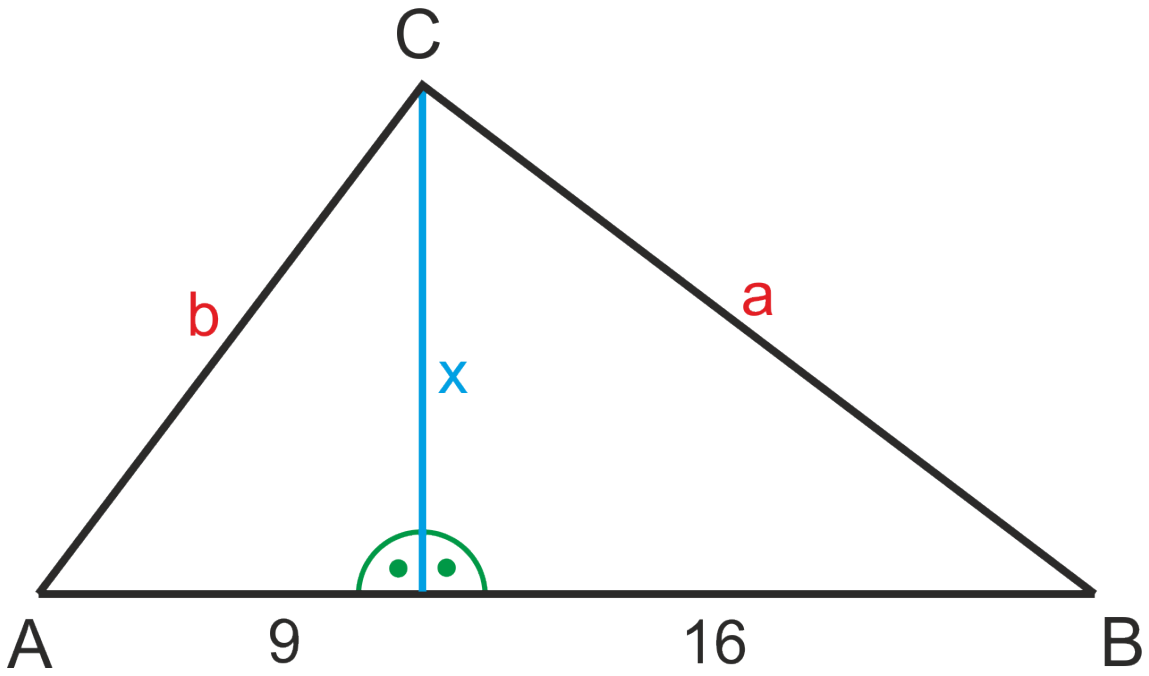
- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



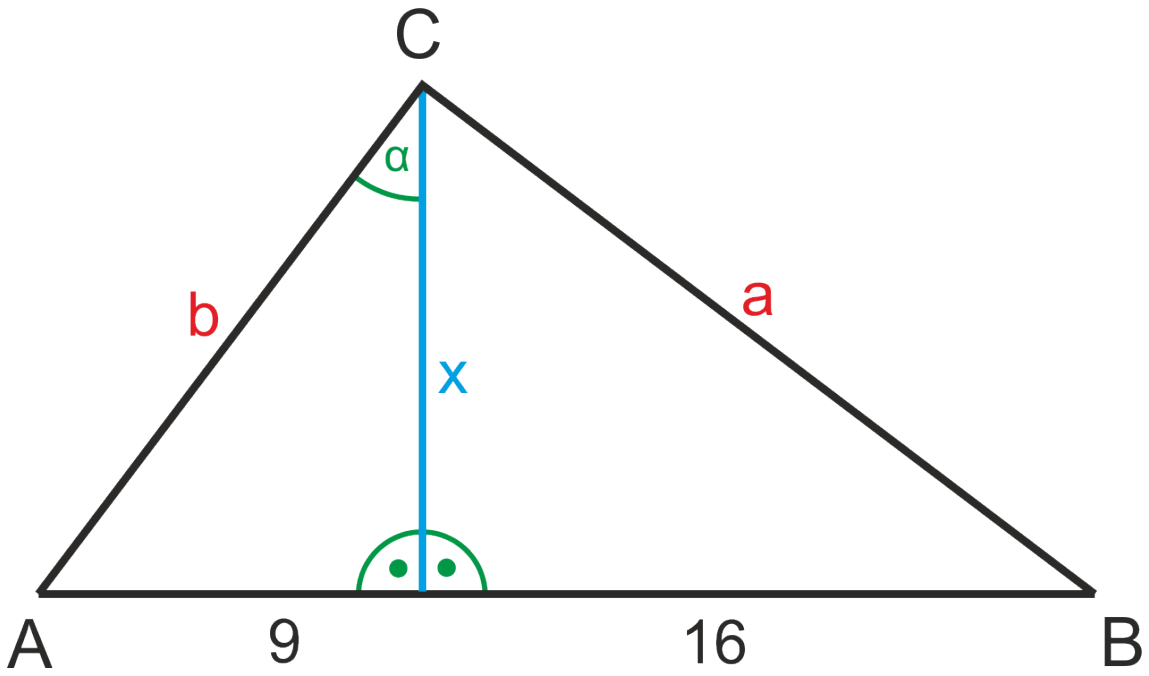
- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



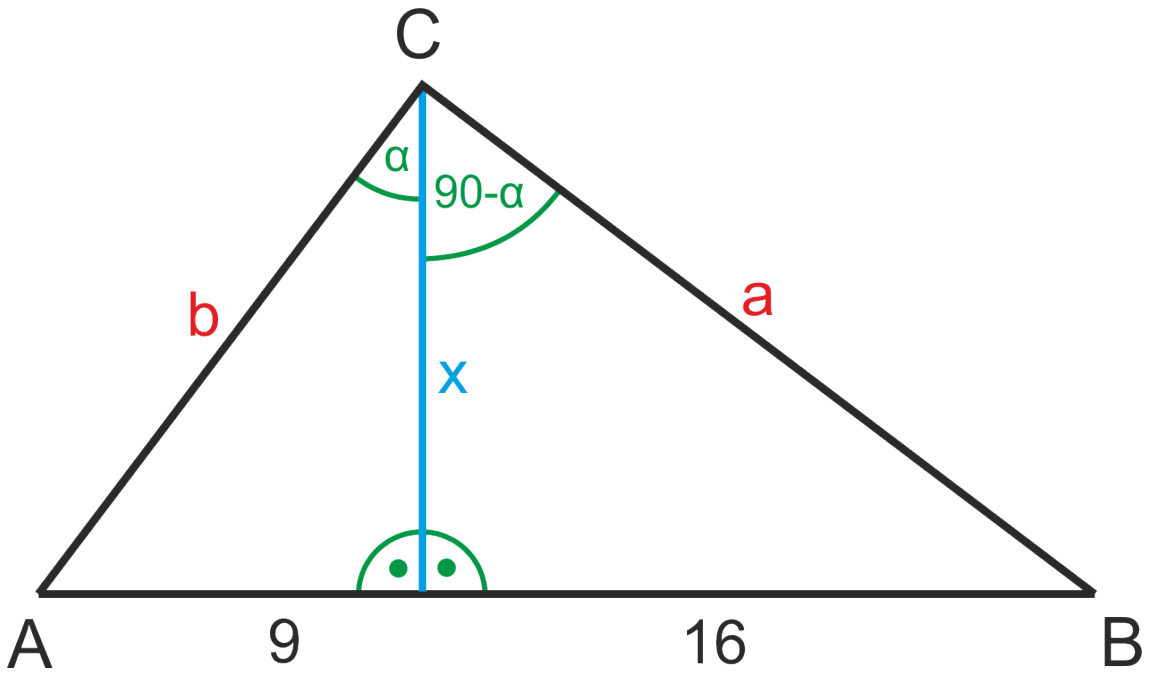
- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



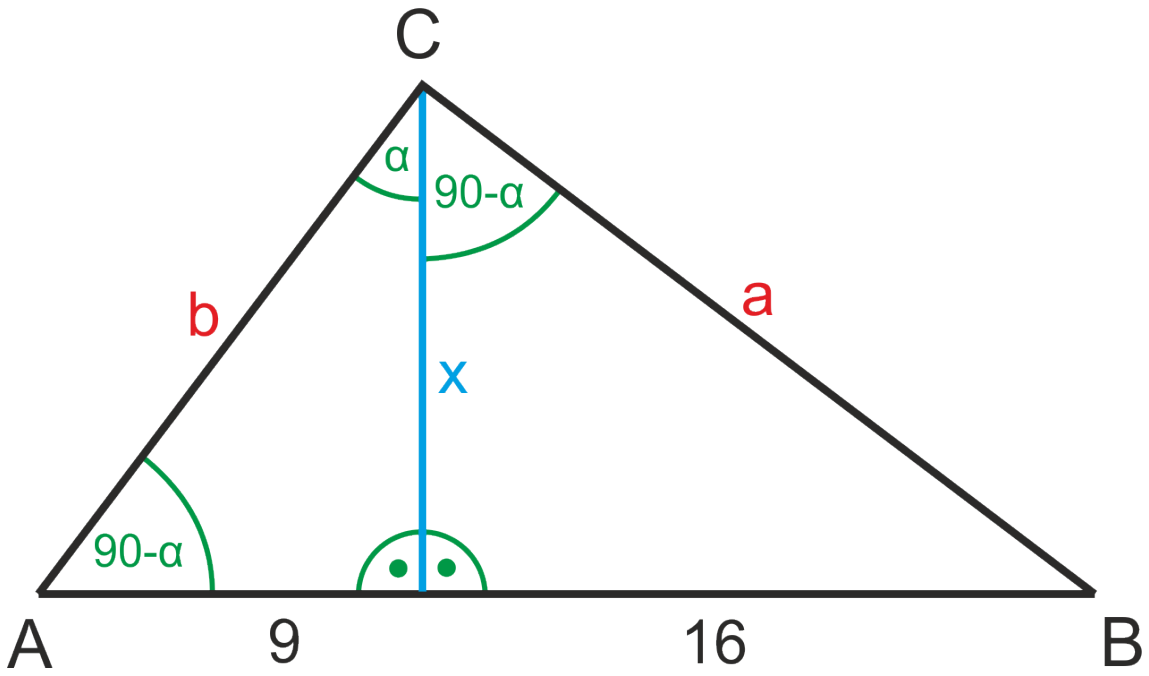
- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



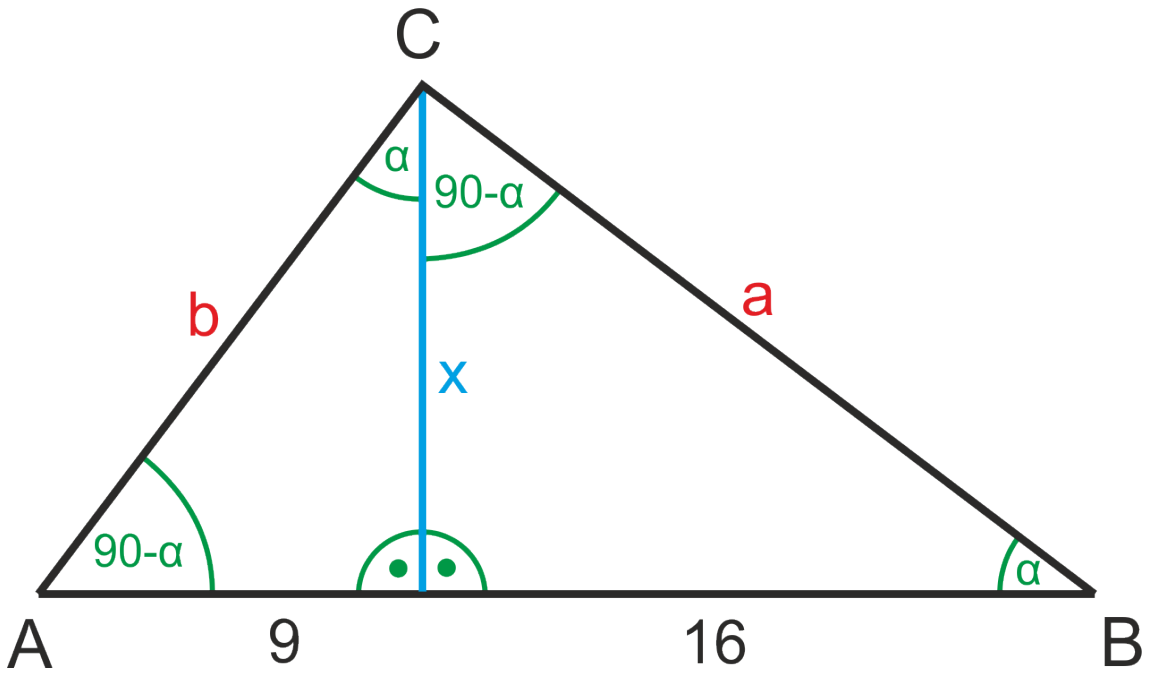
- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



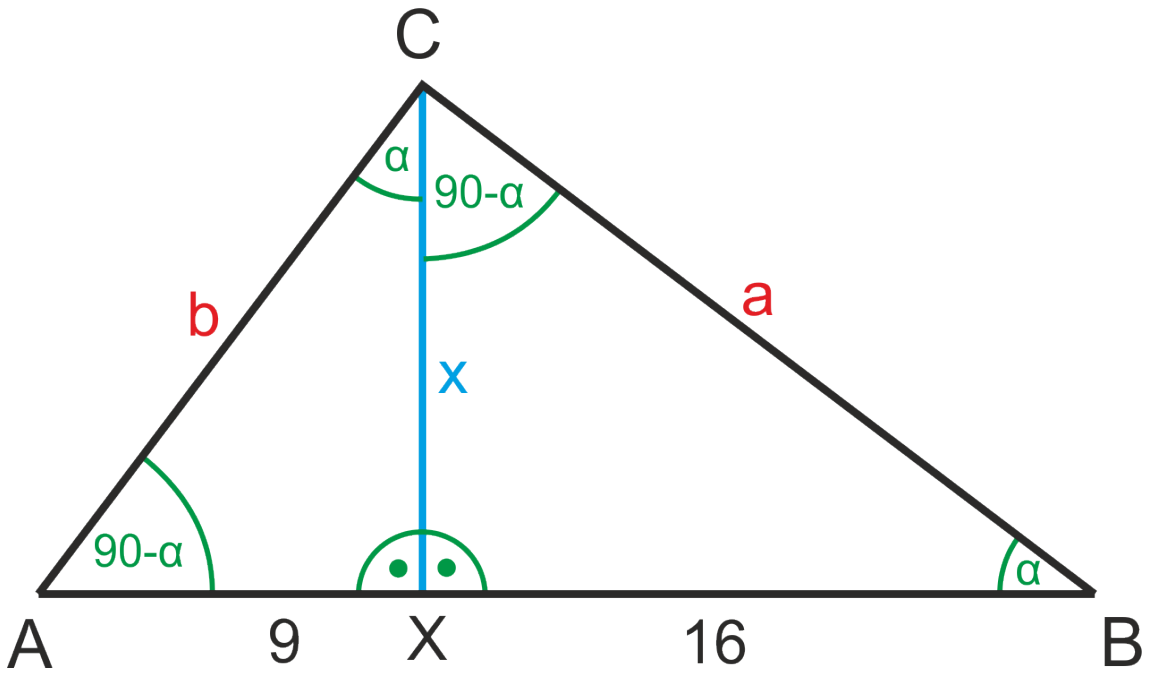
- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



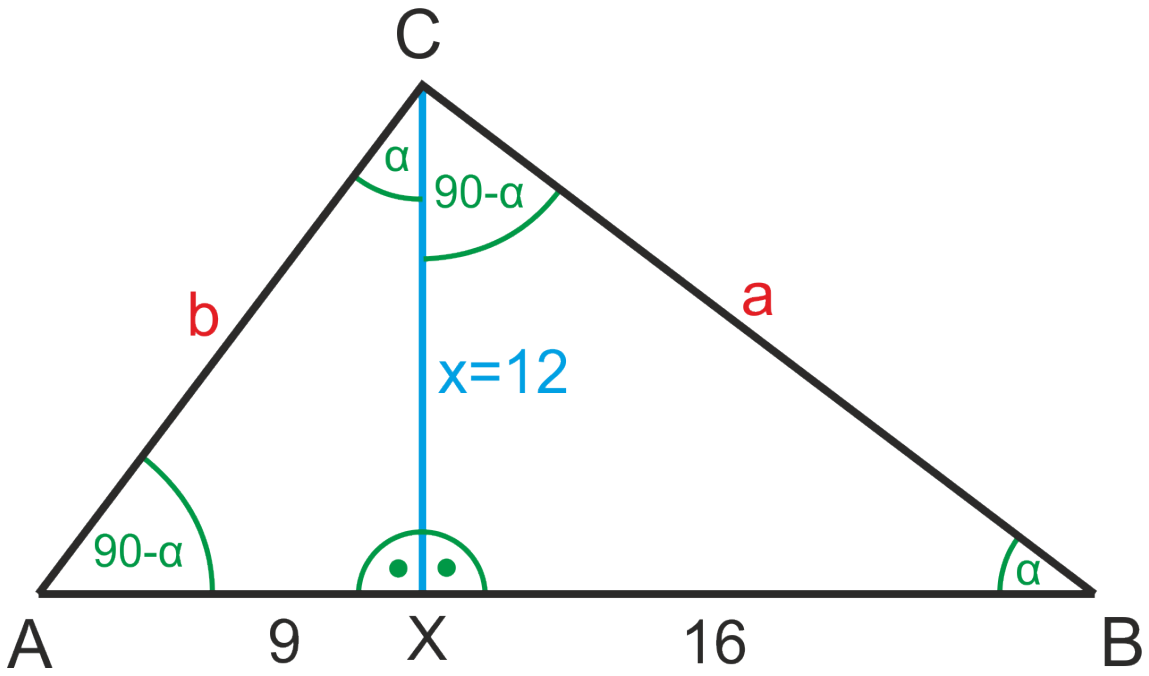
- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



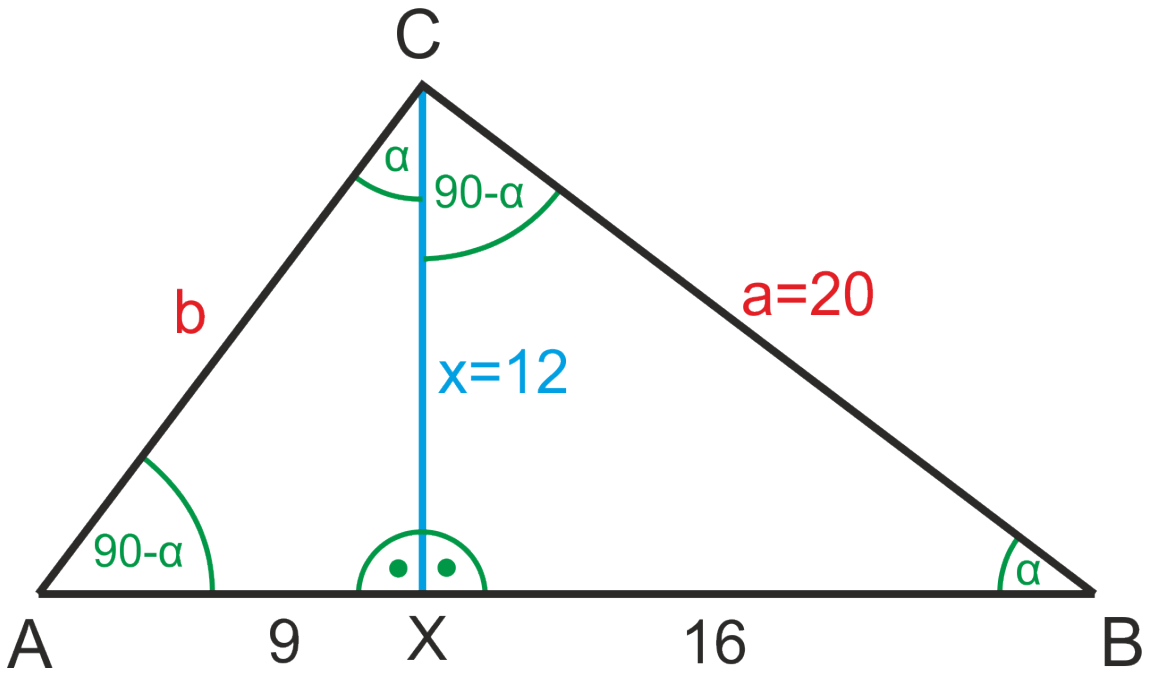
- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



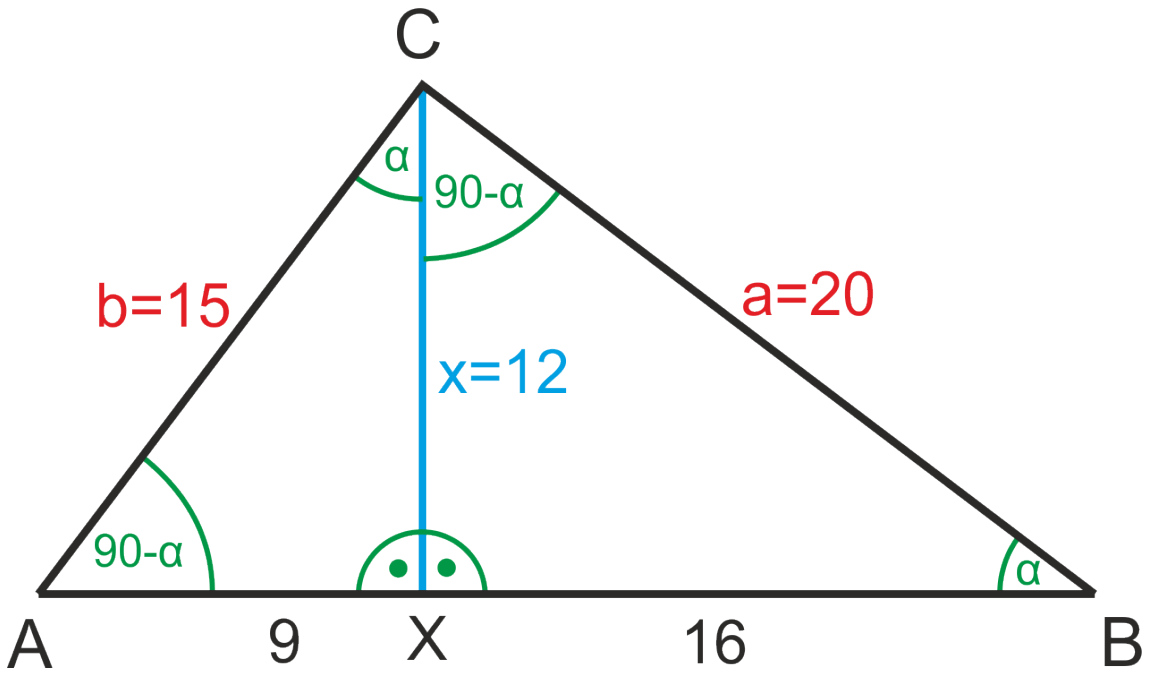
- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

MIT problém – řešení:



- $\triangle AXC \simeq \triangle CXB \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$
- $\triangle ABC \simeq \triangle CBX \Rightarrow \frac{25}{a} = \frac{a}{16} \Rightarrow a = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$
- $\triangle ABC \simeq \triangle ACX \Rightarrow \frac{25}{b} = \frac{b}{9} \Rightarrow b = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$

Outline

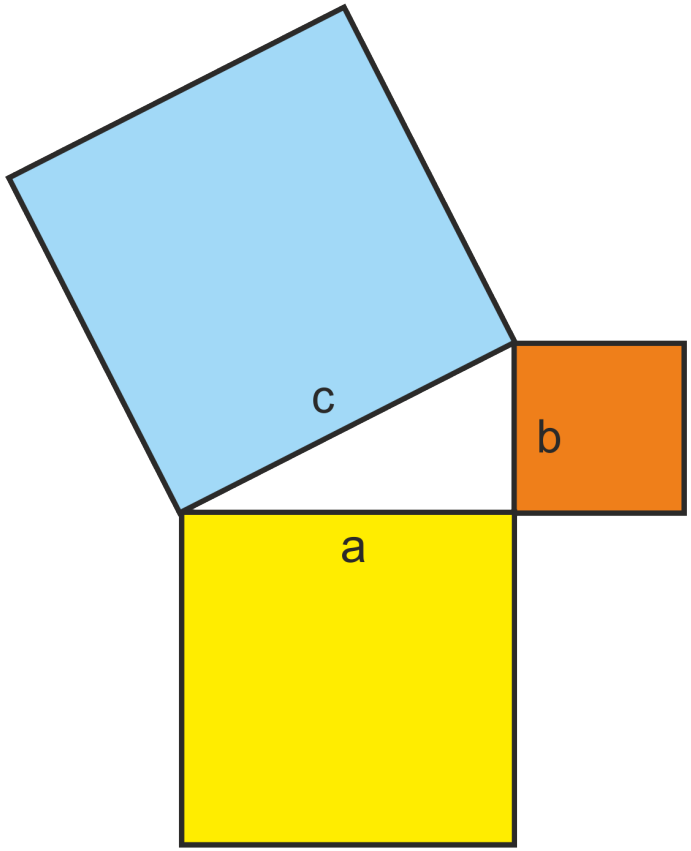
1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

Pythagorova věta

Pythagorova věta

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou c libovolného pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma jeho odvěsnami a, b:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

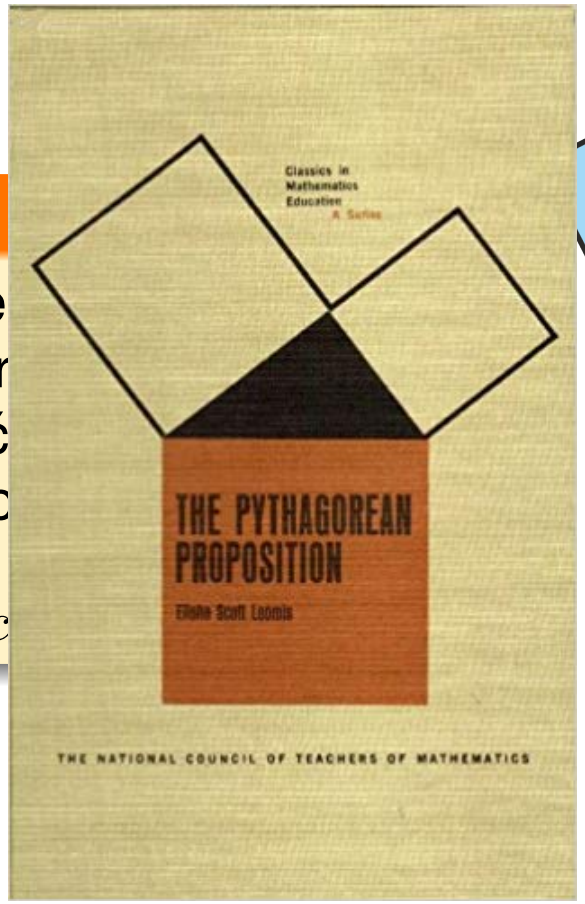


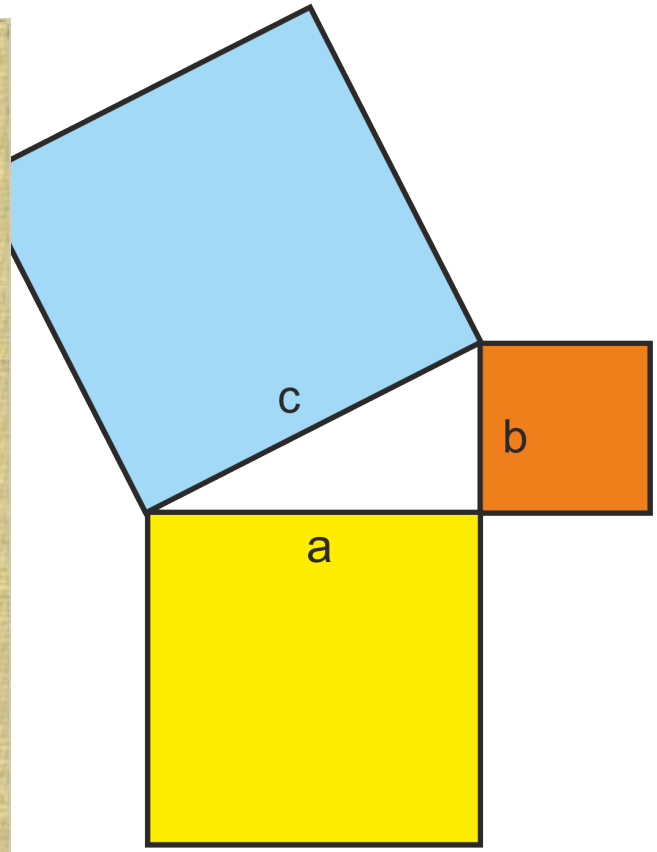
Pythagorova věta

Pythagorova věta

Obsah čtverce sestrojené
přeponou c libovolného pr
trojúhelníku je roven souč
čtverců nad oběma jeho c

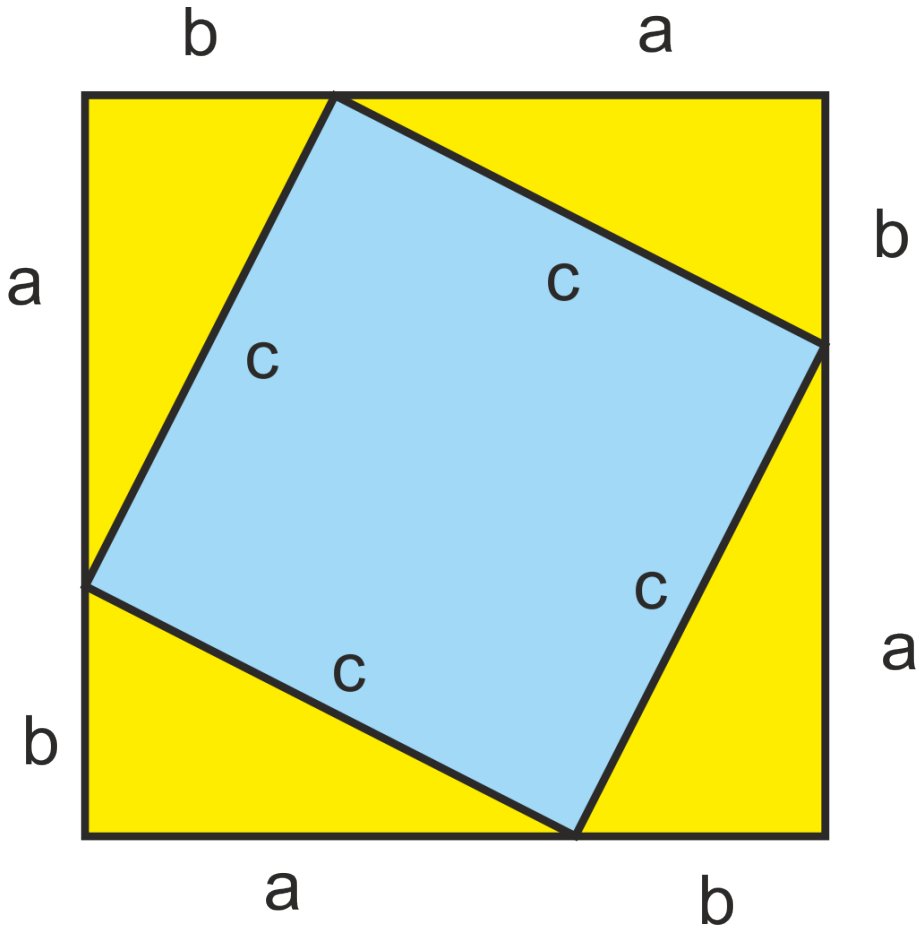
$$a^2 + b^2 = c$$





Elisha S. Loomis
The Pythagorean Proposition
367 důkazů Pythagorovo věty

Pythagorova věta – důkaz:

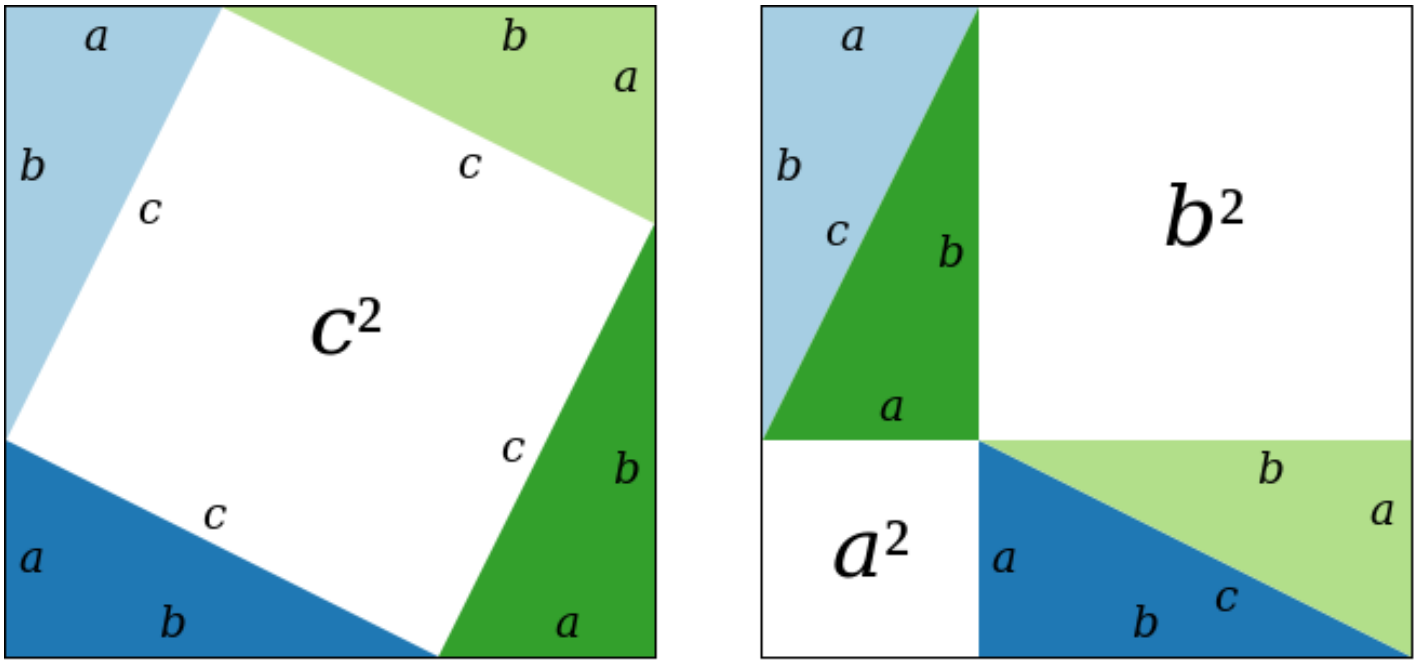


$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

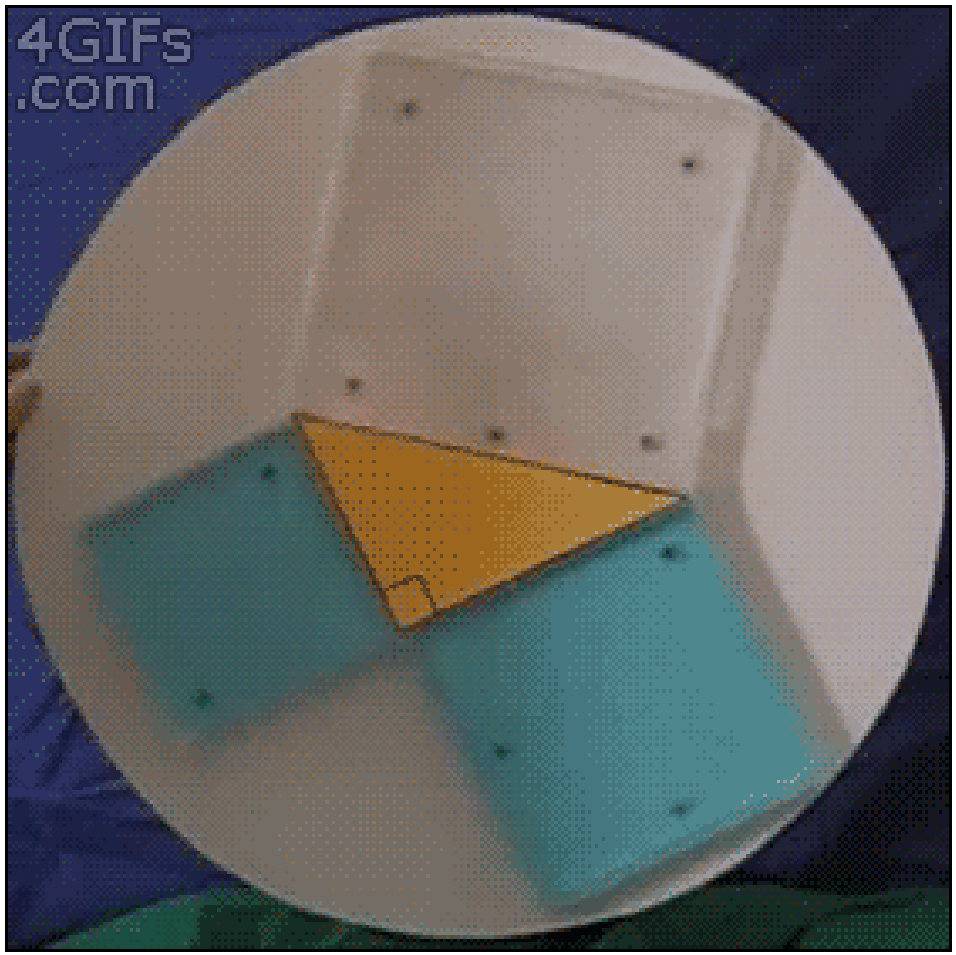
■

Pythagorova věta – důkaz:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Pythagorova věta – důkaz:



Pythagoras ze Samu

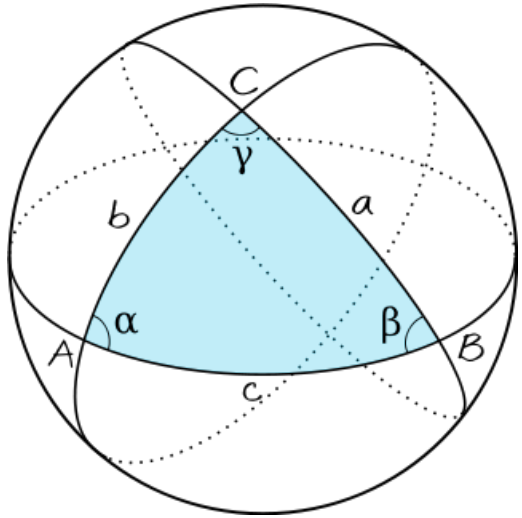
- okolo 570 př. n. l. — 510 př. n. l.
- legendární řecký filosof, matematik, astronom i kněz
- otec čísel
- byla podle něj pojmenována Pythagorova věta, jenž ji v 6. století př. n. l. objevil pro Evropu, resp. starověkou Indii.
- pravděpodobně však byla známa i v jiných starověkých civilizacích dávno předtím (v Babylonii, v Číně, v Egyptě).
- založil velmi významnou školu a výklady i legendy jeho následovníků překryly jeho původní myšlenky

Pythagorova věta na sféře

Pythagorova věta na sféře

Pro libovolný trojúhelník na sféře o poloměru R s pravým úhlem γ a stranami a, b, c platí:

$$\cos\left(\frac{c}{R}\right) = \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right).$$



- Taylorova řada v 0:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4),$$

pro $x \to 0$.

- Potom

$$\begin{aligned} 1 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{c}{R}\right)^2 + O\left(\tfrac{1}{R^4}\right) &= \left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a}{R}\right)^2 + O\left(\tfrac{1}{R^4}\right)\right]\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b}{R}\right)^2 + O\left(\tfrac{1}{R^4}\right)\right]; \\ \left(\tfrac{c}{R}\right)^2 &= \left(\tfrac{a}{R}\right)^2 + \left(\tfrac{b}{R}\right)^2 + O\left(\tfrac{1}{R^4}\right); \\ c^2 &= a^2 + b^2 + O\left(\tfrac{1}{R^2}\right), \end{aligned}$$

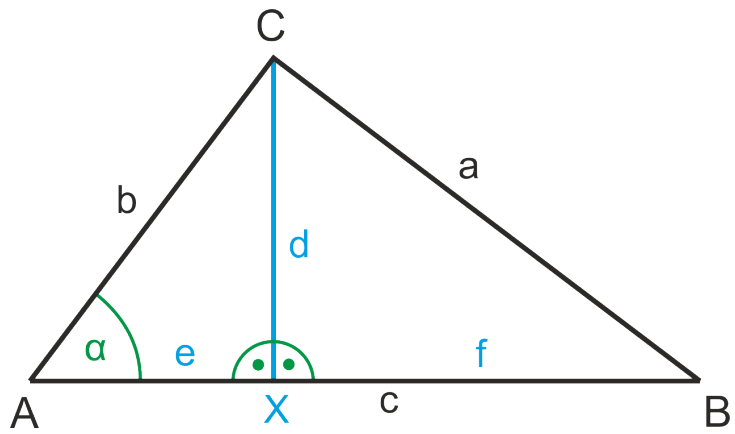
pro $R \to \infty$.

Kosinová věta

Kosinová věta

Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$



Důkaz:

- $a^2 = f^2 + d^2$
- $e = b\cos\alpha \Rightarrow f = c - b\cos\alpha$ a $d = b\sin\alpha$;
- Dosadíme a upravíme:

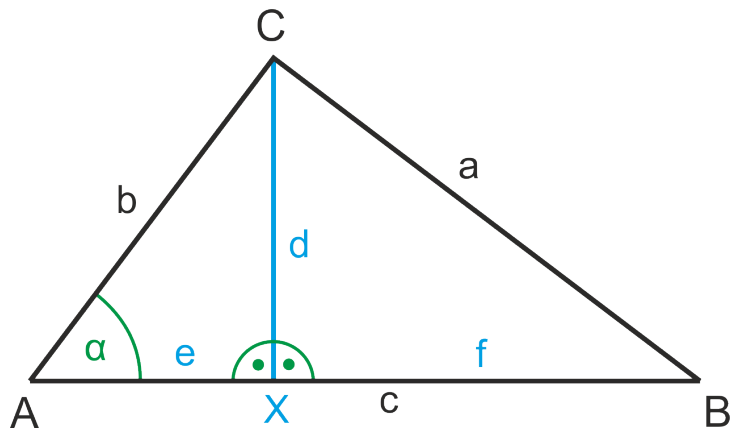
$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2; \\ a^2 &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha); \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Kosinová věta

Kosinová věta

Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$



Důkaz:

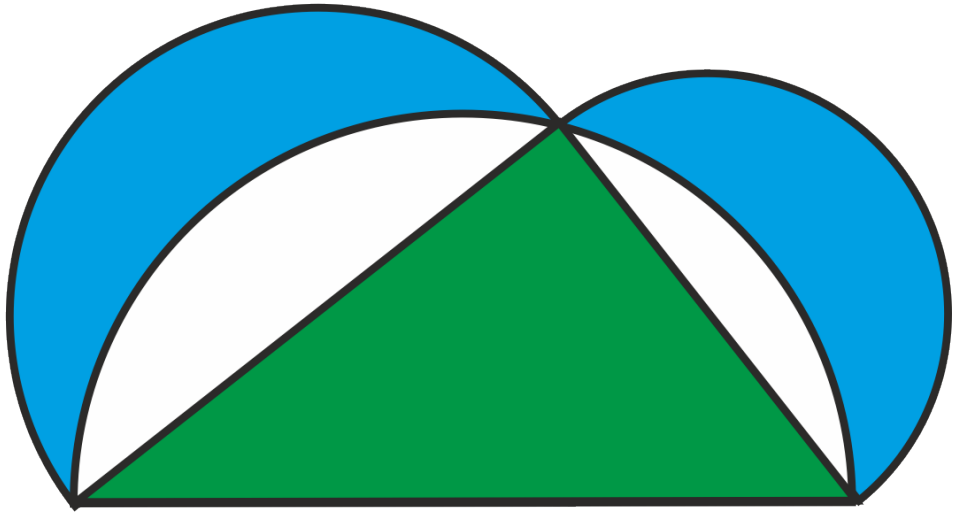
- $a^2 = f^2 + d^2$
- $e = b\cos\alpha \Rightarrow f = c - b\cos\alpha$ a $d = b\sin\alpha$;
- Dosadíme a upravíme:

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2; \\ a^2 &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha); \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

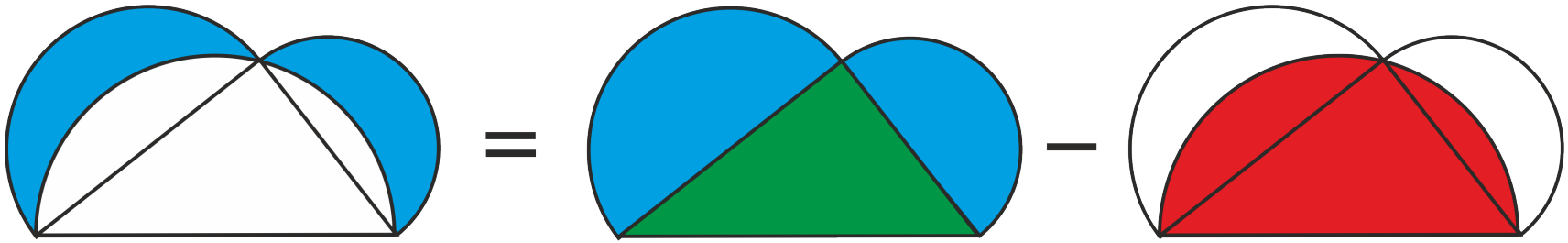
Úloha na Pythagorovu větu – Hippokratovy měsíčky

Úloha 1

Vyjádřete obsah měsíčků vzhledem k obsahu trojúhelníku. Středy kružnic (určující měsíčky) jsou ve středech stran trojúhelníku.



Hippokratovy měsíčky – řešení:

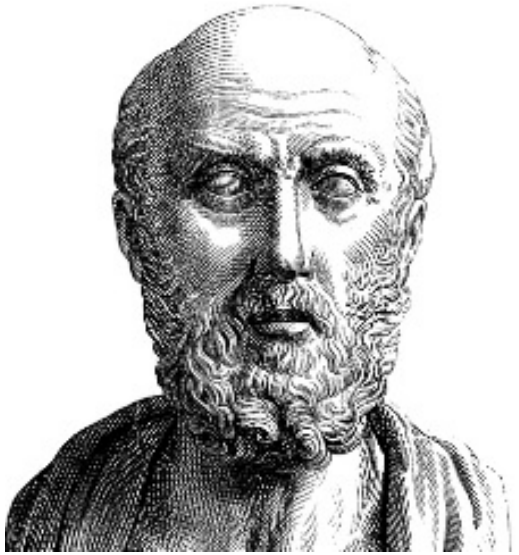


- chceme spočítat obsah S Hippokratovo měsíčků
- $S_{\bigcirc} = \pi r^2$
- Obsah modrých půlkruhů: $S_1 = \pi a^2/8, \quad S_2 = \pi b^2/8$
- Obsah červeného půlkruhu: $S_3 = \pi c^2/8$

$$S = S_1 + S_2 + S_{\triangle} - S_3 = S_{\triangle} + \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) = S_{\triangle}.$$

Hippokrates z Chiu

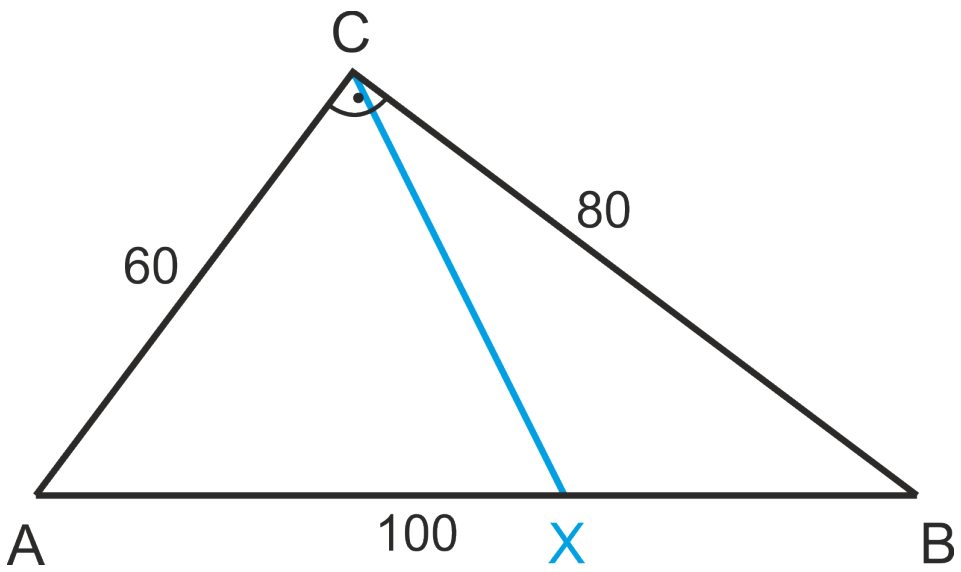
- starořecký geometr a matematik z 5. století př. n. l.
- Podle tradice byl Hippokrates obchodník, jehož zboží ukradli piráti, a tak šel do Athén, aby se domohl spravedlnosti. To se mu příliš nezdařilo, ale začal v Athénách navštěvovat přednášky o matematice a posléze geometrii.
- v geometrii je považován za klíčového předchůdce Eukleidova
- stejně jako později Eukleidés, shrnul Hippokratés soudobé geometrické poznatky v knize Základy (Stoicheia)



Úloha na Pythagorovu větu

Úloha 2

Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou 60, 80 a 100. Určete délku úsečky sestrojenou z vrcholu s pravým úhlem k přeponě, která rozděluje trojúhelník na dva se stejnými obvody.



Úloha na Pythagorovu větu – řešení:

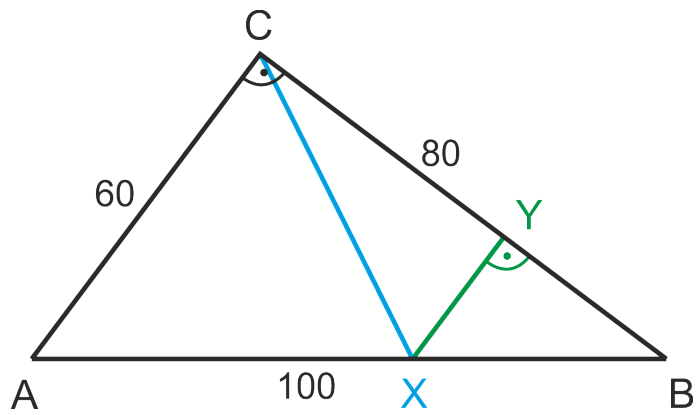
- $|AB| = 100$, $|AC| = 60$, $|BC| = 80$.

$$\left.\begin{array}{rcl} |AC| + |AX| & = & |BC| + |BX| \\ |AX| + |BX| & = & |AB| \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |AX| = 60 \\ |BX| = |AB| - |AX| = 40 \end{array}\right.$$

- Bod Y je průsečík kolmice z X k BC. Z $\triangle BAC \simeq \triangle BXY$ plyne

$$\frac{|BX|}{|AB|} = \frac{|BY|}{|BC|} \Rightarrow |BY| = 32$$

a $|CY| = |CB| - |BY| = 48$



- Z Pythagorovy věty

$$|XY| = \sqrt{|XB|^2 - |YB|^2} = 24.$$

- A ještě jednou použijeme Pythagorovu větu

$$|CX| = \sqrt{|XY|^2 + |CY|^2} = 24\sqrt{5}.$$

Outline

1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

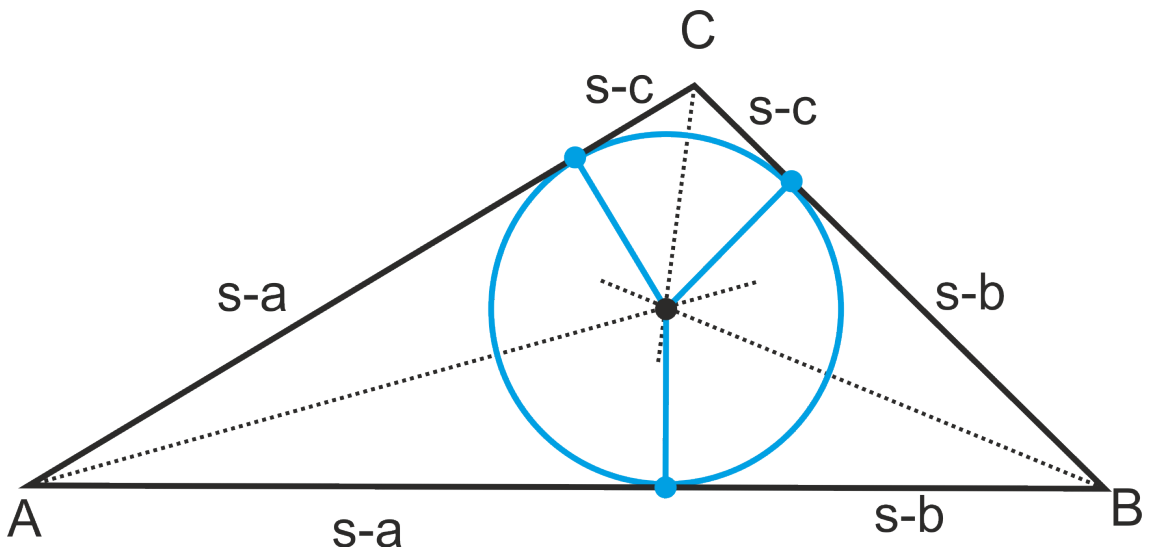
Hérónova věta (60)

Hérónova věta

Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníka, platí pro jeho obsah

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = \frac{a+b+c}{2}$ je poloviční obvod trojúhelníka.

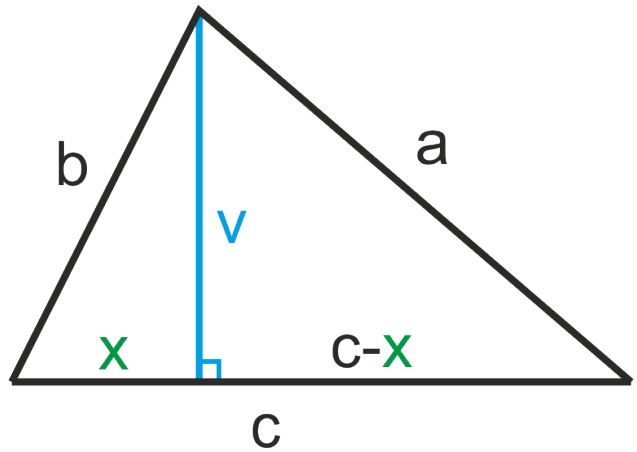


Hérónova věta – algebraický důkaz

- Z Pythagorovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} b^2 &= v^2 + x^2; \\ a^2 &= v^2 + (c-x)^2. \end{aligned}$$

- Odečteme rovnice, vyjádříme x, dosadíme do první rovnice a vyjádříme v



$$\begin{aligned} v &= \sqrt{b^2 - \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)^2}; \\ v &= \sqrt{\frac{(b+c-a)(b+c+a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}} \end{aligned}$$

- Nyní použijeme vztah $S = cv/2$ a $s = (a+b+c)/2$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{c^2}{4}\frac{2(s-a)2s2(s-c)2(s-b)}{4c^2}}; \\ S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

Hérón Alexandrijský

- 10 - 75
- starověkým matematik a vynálezce
- zabýval se praktickými úlohami z matematiky, mechaniky a dalších oblastí fyziky
- působil v proslulém Múseiu v Alexandrii
- pokoušel se sestrojit perpetuum mobile
- dnes znám především jako autor Heronova vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku
- sestrojil takzvanou Heronovu baňku, když se jako první pokusil použít sílu páry
- parní stroj nesl název ”Aeolipile”neboli ”míč boha větrů Aióla

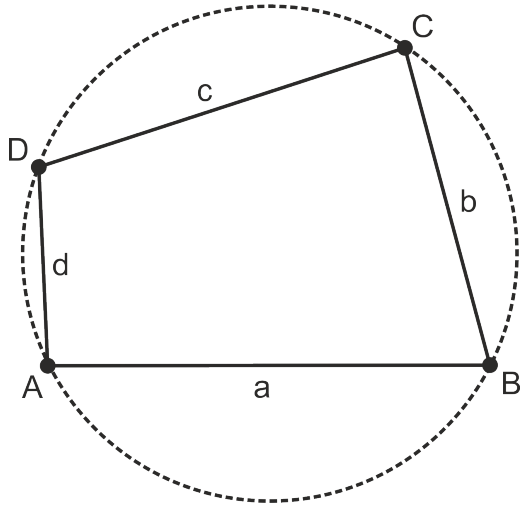
Brahmaguptova věta

Brahmaguptova věta

Jsou-li a, b, c, d délky stran tětivového čtyřúhelníku, platí pro jeho obsah

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

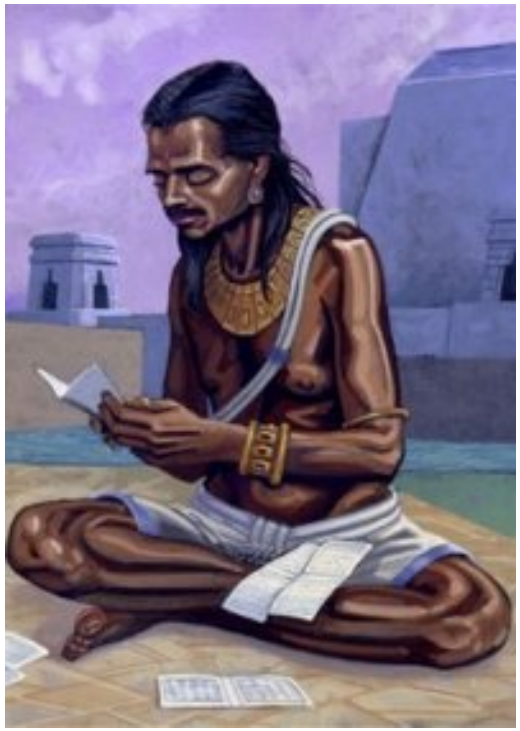
kde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ je poloviční obvod čtyřúhelníku.



- Pokud $A = D$, zkolabuje čtyřúhelník do trojúhelníku. Potom $d = 0$ a Brahmaguptův vzorec se stane vzorcem Hérónovým.

Brahmagupta

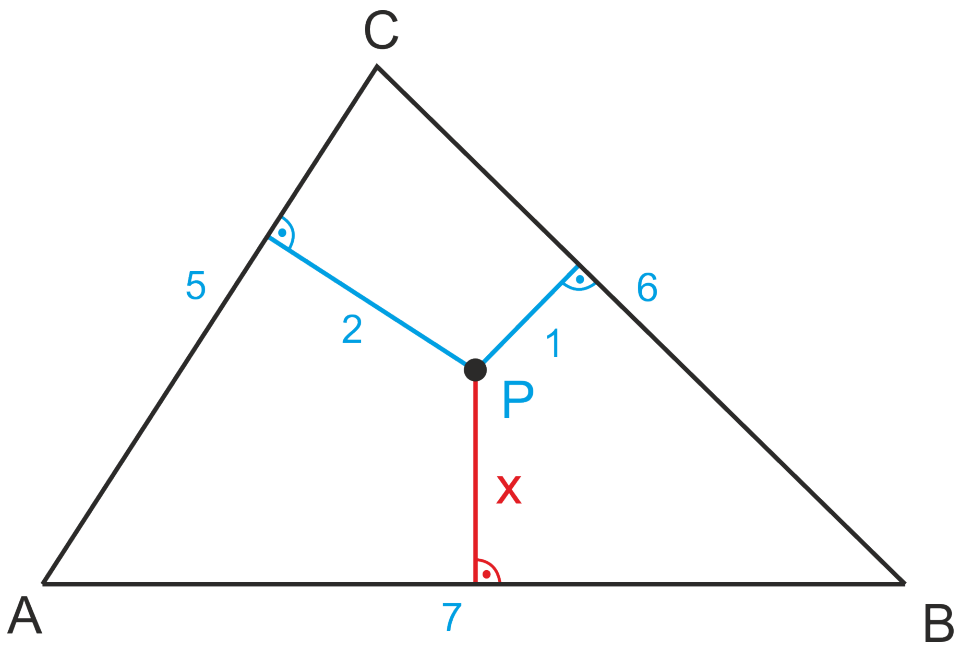
- 598 – 668
- indický matematik a astronom
- jako první zavedl nulu jako plnoprávnou číslici a stanovil pravidla pro počítání se zápornými čísly
- uvedl vzorce pro řešení kvadratické rovnice
- popsal různé konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků a formuloval větu pro výpočet plochy tětivových čtyřúhelníků z délek jejich stran.
- pro číslo π uvedl jako přesnou odmocninu z deseti (3,16).
- dokázal že Měsíc je k Zemi blíž než Slunce, protože jinak by jeho přivrácená strana musela být vždycky osvětlená.



Úloha na Hérónovu větu

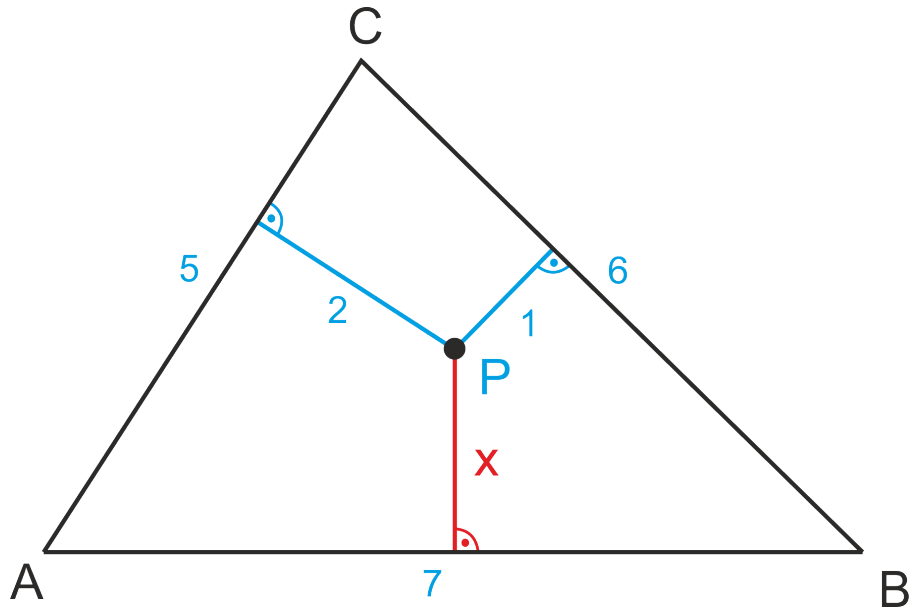
Úloha 1

V trojúhelníku se velikostmi stran 5, 6 a 7 leží pod P, který má od stran s délkami 5 a 6 vzdálenosti 2 a 1. Jak je vzdálen od strany 7?



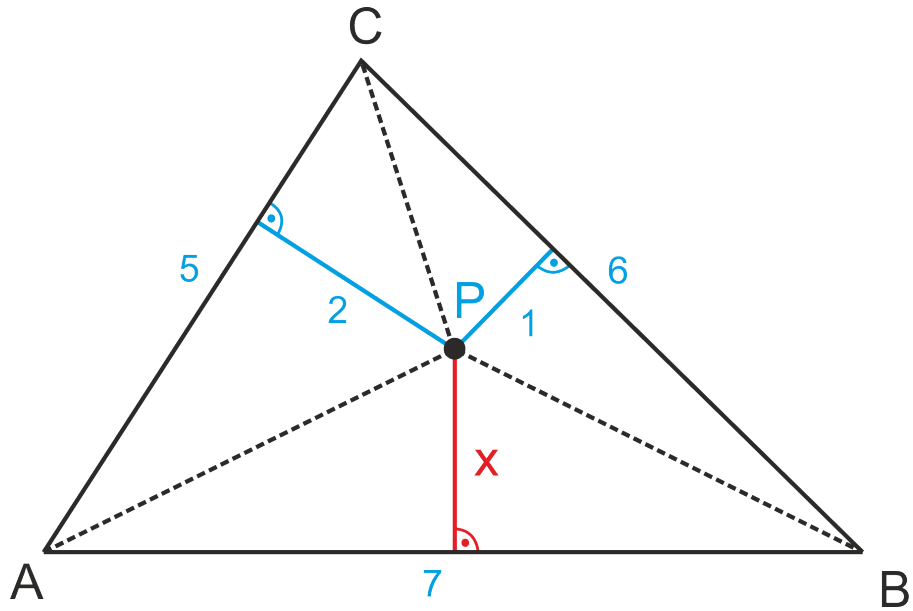
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC}$
- $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$
- $S_{\triangle APB} = 7/2x$
- $S_{\triangle APC} = 5$
- $S_{\triangle BPC} = 3$
- $x = 4/7(-4 + 3\sqrt{6})$



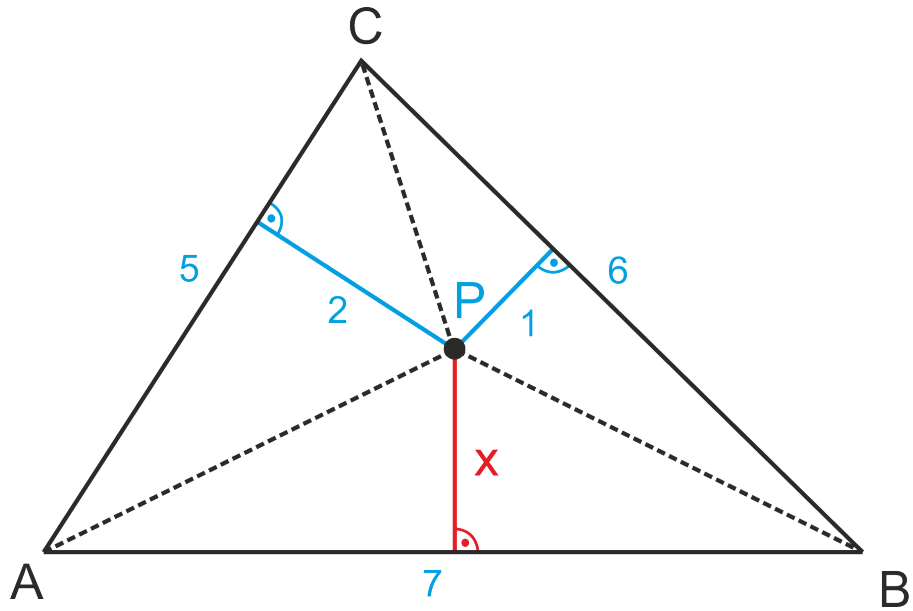
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC}$
- $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$
- $S_{\triangle APB} = 7/2x$
- $S_{\triangle APC} = 5$
- $S_{\triangle BPC} = 3$
- $x = 4/7(-4 + 3\sqrt{6})$



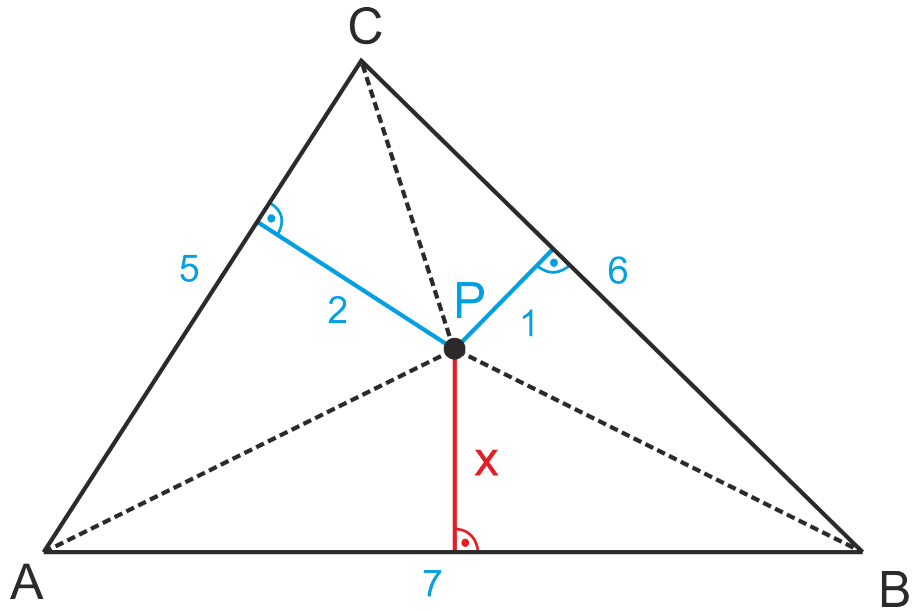
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC}$
- $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$
- $S_{\triangle APB} = 7/2x$
- $S_{\triangle APC} = 5$
- $S_{\triangle BPC} = 3$
- $x = 4/7(-4 + 3\sqrt{6})$



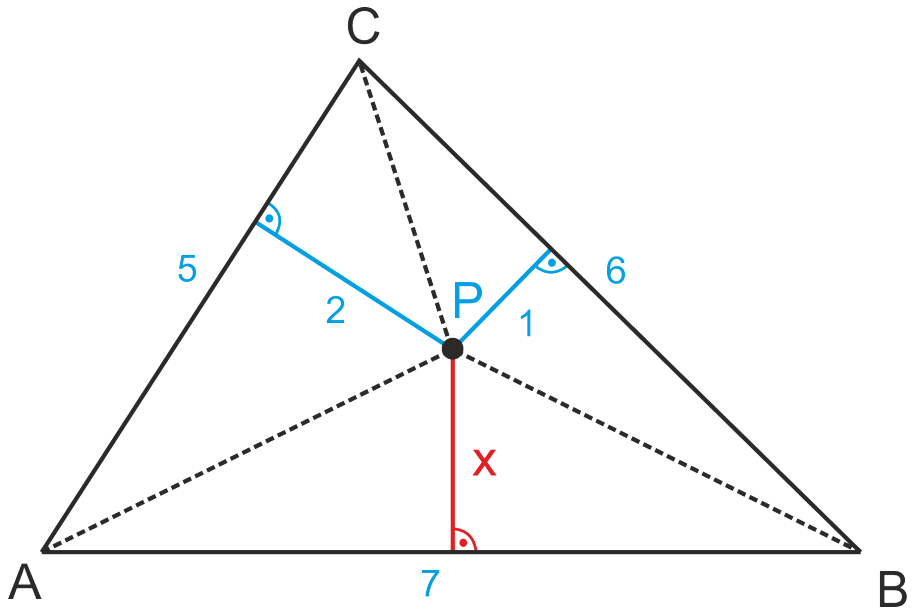
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC}$
- $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$
- $S_{\triangle APB} = 7/2x$
- $S_{\triangle APC} = 5$
- $S_{\triangle BPC} = 3$
- $x = 4/7(-4 + 3\sqrt{6})$



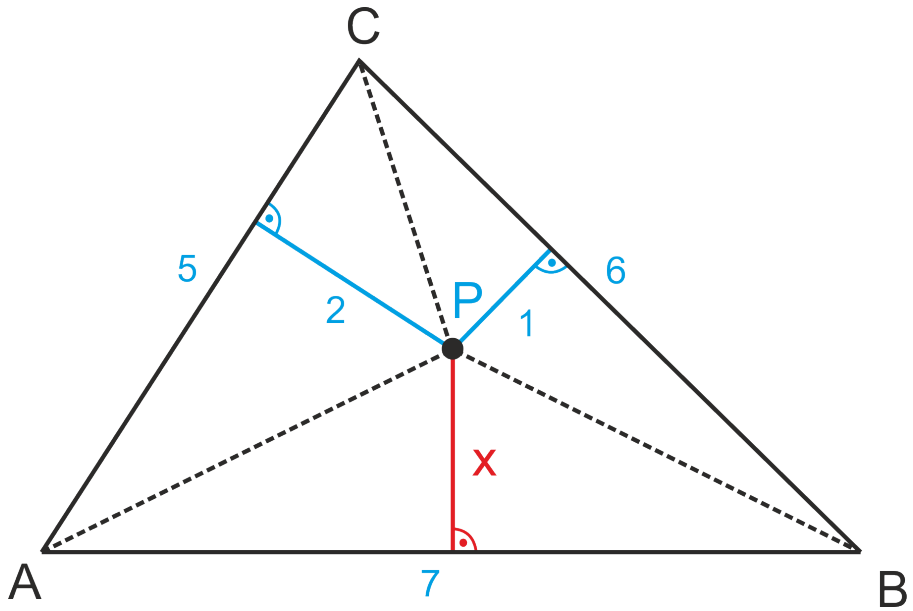
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC}$
- $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$
- $S_{\triangle APB} = 7/2x$
- $S_{\triangle APC} = 5$
- $S_{\triangle BPC} = 3$
- $x = 4/7(-4 + 3\sqrt{6})$



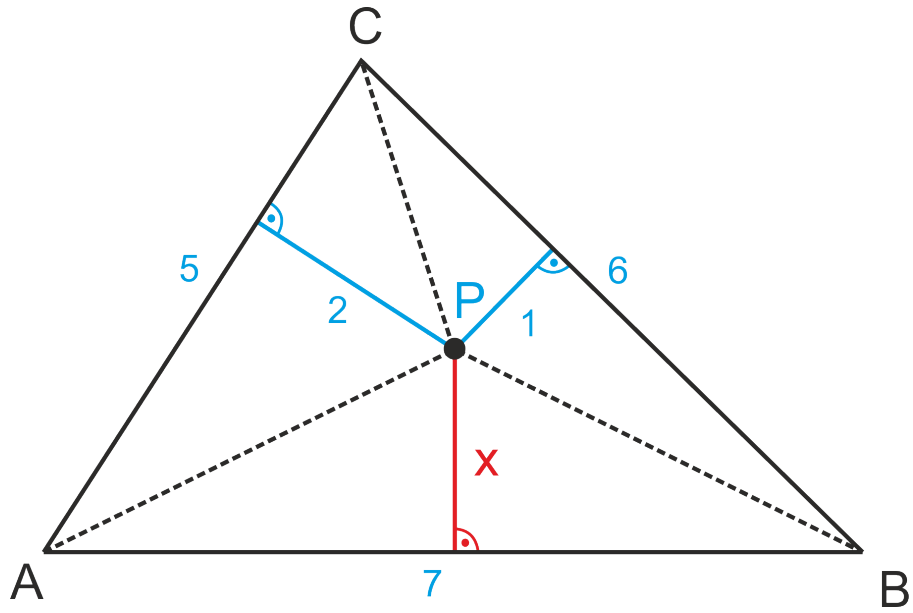
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC}$
- $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$
- $S_{\triangle APB} = 7/2x$
- $S_{\triangle APC} = 5$
- $S_{\triangle BPC} = 3$
- $x = 4/7(-4 + 3\sqrt{6})$



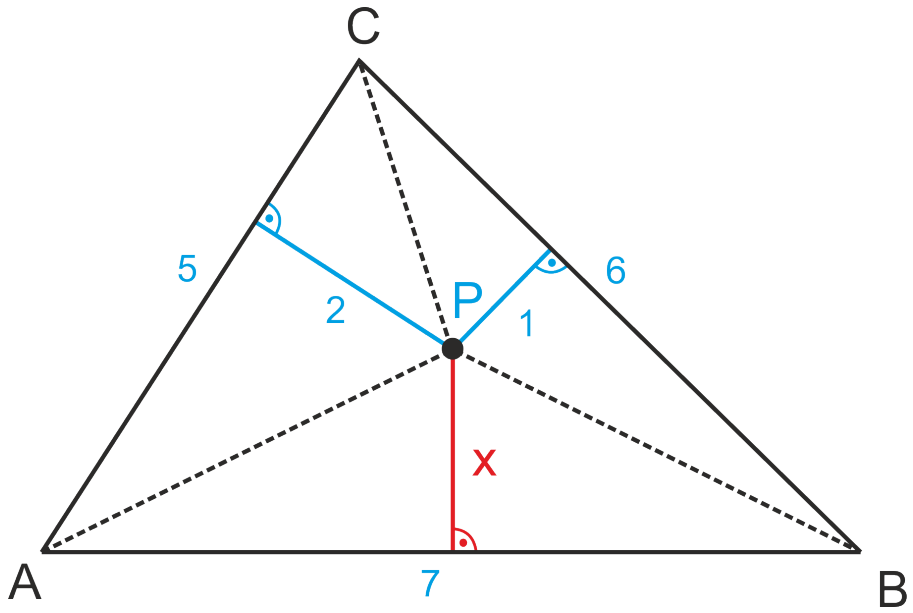
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC}$
- $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$
- $S_{\triangle APB} = 7/2x$
- $S_{\triangle APC} = 5$
- $S_{\triangle BPC} = 3$
- $x = 4/7(-4 + 3\sqrt{6})$



Úloha na Hérónovu větu – řešení

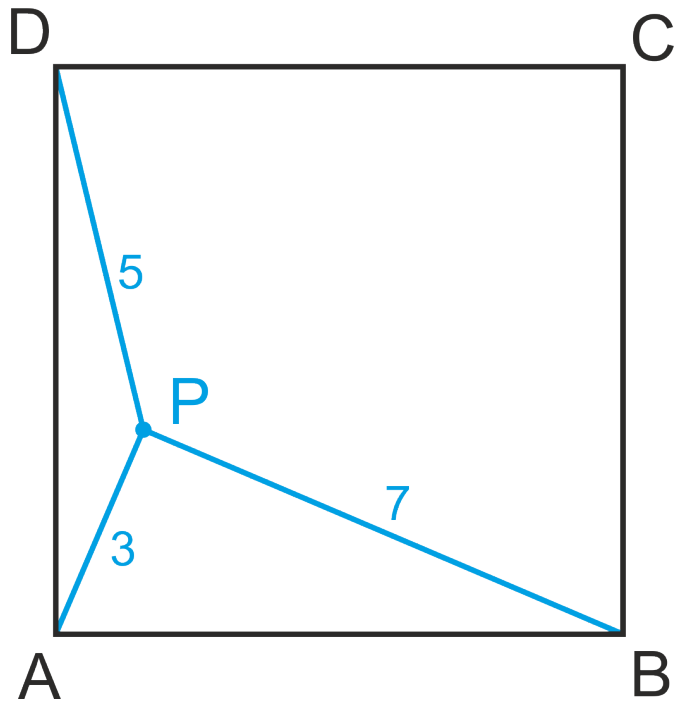
- $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC}$
- $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$
- $S_{\triangle APB} = 7/2x$
- $S_{\triangle APC} = 5$
- $S_{\triangle BPC} = 3$
- $x = 4/7(-4 + 3\sqrt{6})$



Úloha na Hérónovu větu

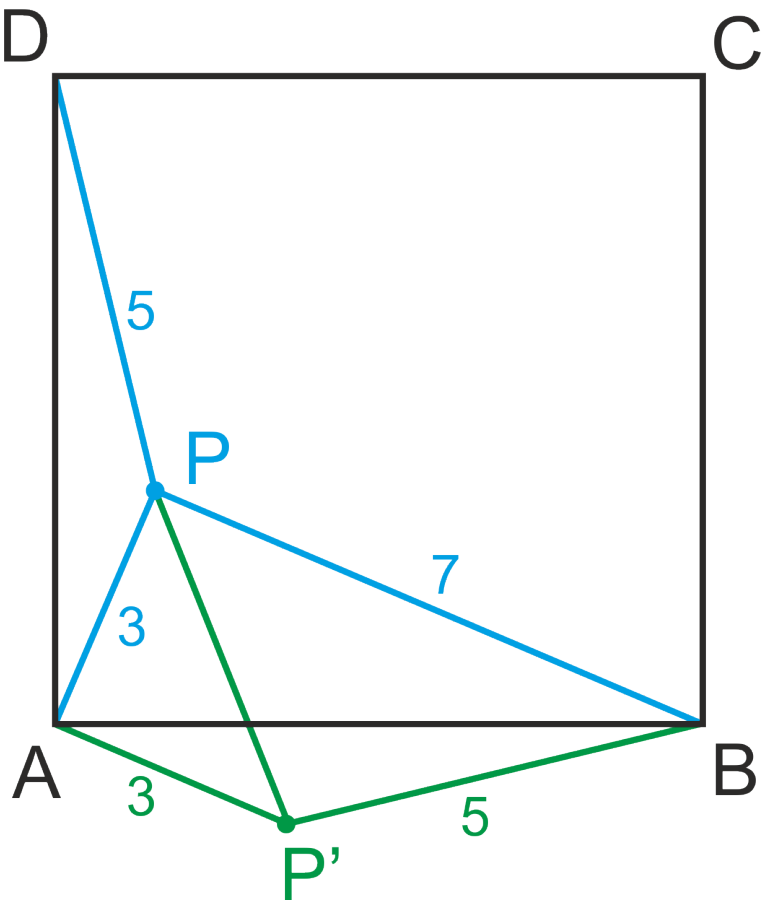
Úloha 2

Spočítejte obsah čtverce $ABCD$ obsahující pod P tak, že $|AP| = 3$, $|BP| = 7$ a $|DP| = 5$.



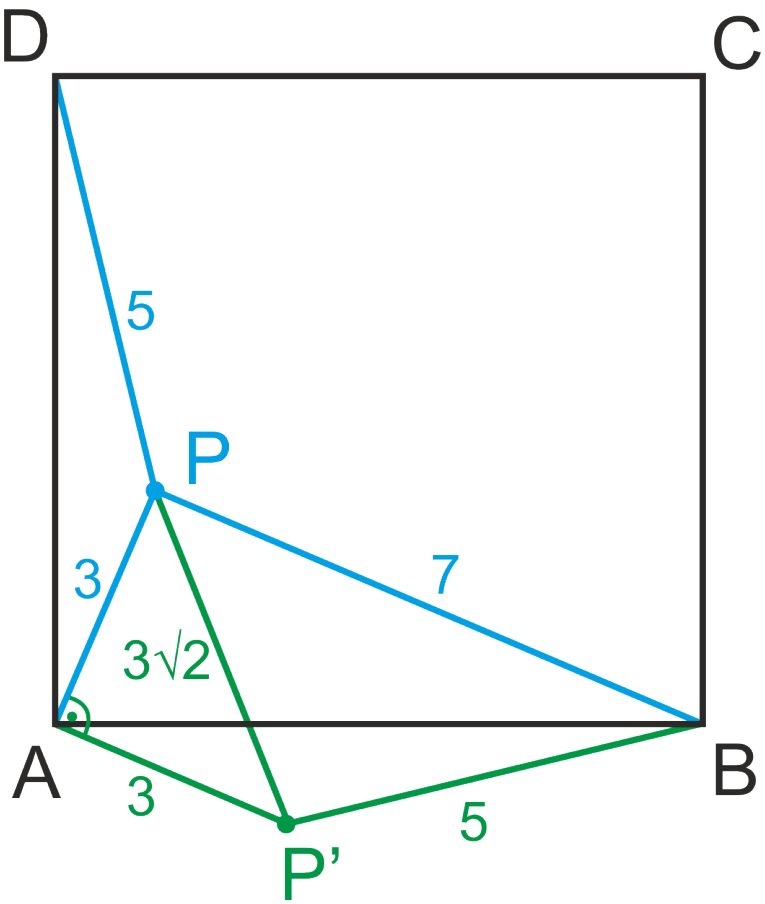
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- Otočíme $\triangle ADP$ okolo A o $\pi/2$ (bod P')
- $\triangle ADP \simeq \triangle APD$
- Pythagrova věta $\Rightarrow |PP'| = 3\sqrt{2}$
- Heronova věta $\Rightarrow S_{\triangle PP'B} = 21/2$
- Zároveň platí: $S_{\triangle PP'B} = 7 \cdot 3\sqrt{2}/2 \cdot \sin\alpha.$
- $\sin\alpha = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \pi/4$
- $\angle APP' = \pi/4$
- $\angle APB = \pi/2$
- $S_{ABCD} = 58$



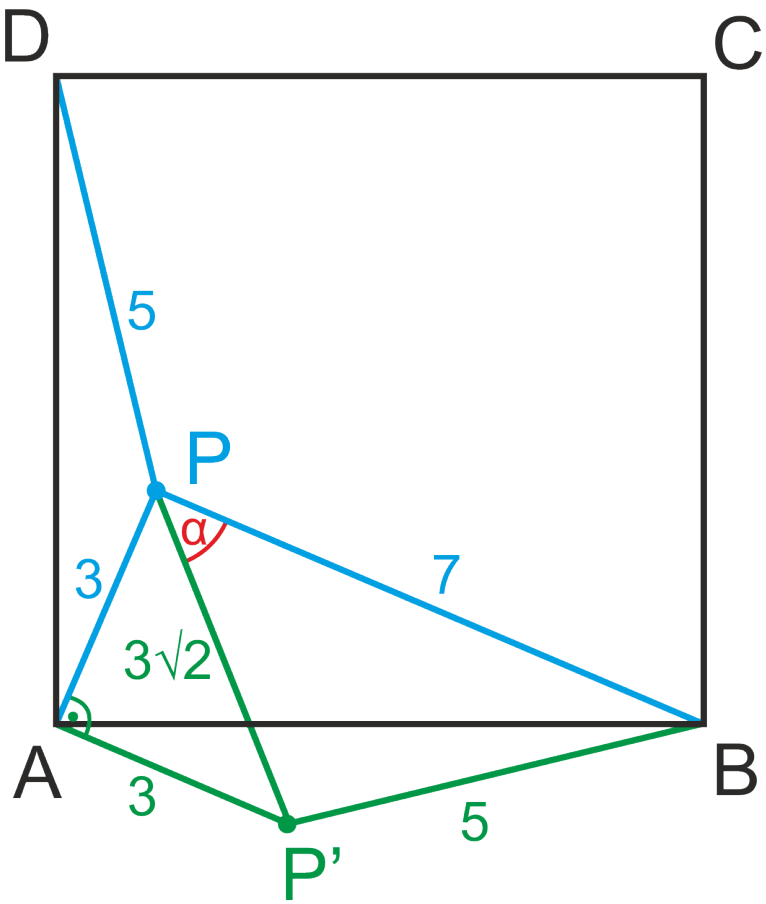
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- Otočíme $\triangle ADP$ okolo A o $\pi/2$ (bod P')
- $\triangle ADP \simeq \triangle APD$
- Pythagrova věta $\Rightarrow |PP'| = 3\sqrt{2}$
- Heronova věta $\Rightarrow S_{\triangle PP'B} = 21/2$
- Zároveň platí: $S_{\triangle PP'B} = 7 \cdot 3\sqrt{2}/2 \cdot \sin\alpha.$
- $\sin\alpha = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \pi/4$
- $\angle APP' = \pi/4$
- $\angle APB = \pi/2$
- $S_{ABCD} = 58$



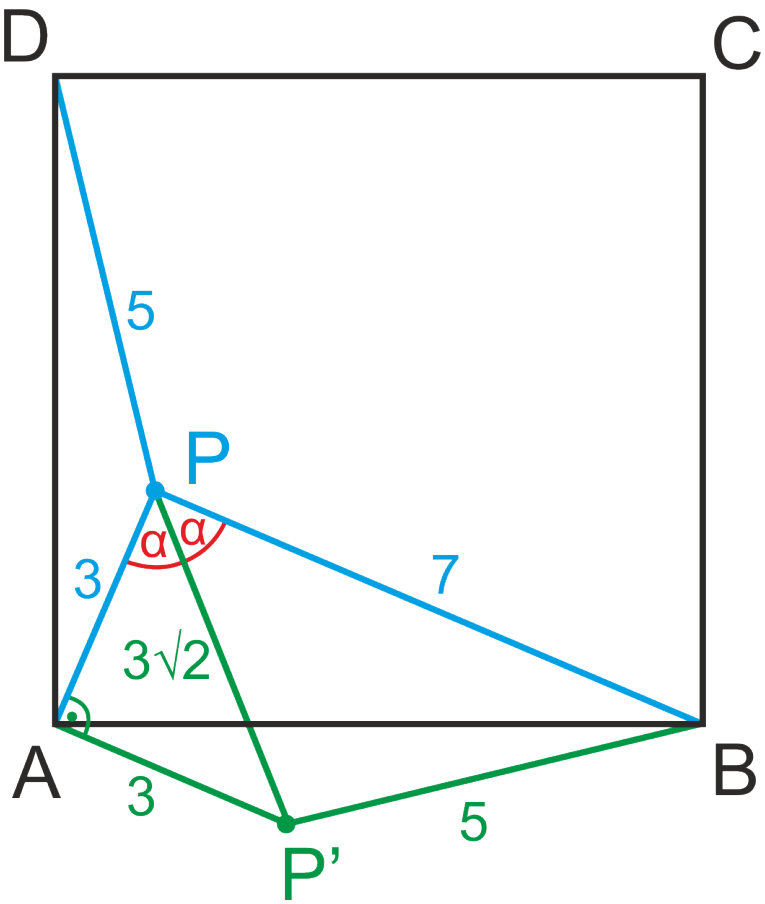
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- Otočíme $\triangle ADP$ okolo A o $\pi/2$ (bod P')
- $\triangle ADP \simeq \triangle APD$
- Pythagrova věta $\Rightarrow |PP'| = 3\sqrt{2}$
- Heronova věta $\Rightarrow S_{\triangle PP'B} = 21/2$
- Zároveň platí: $S_{\triangle PP'B} = 7 \cdot 3\sqrt{2}/2 \cdot \sin\alpha.$
- $\sin\alpha = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \pi/4$
- $\angle APP' = \pi/4$
- $\angle APB = \pi/2$
- $S_{ABCD} = 58$



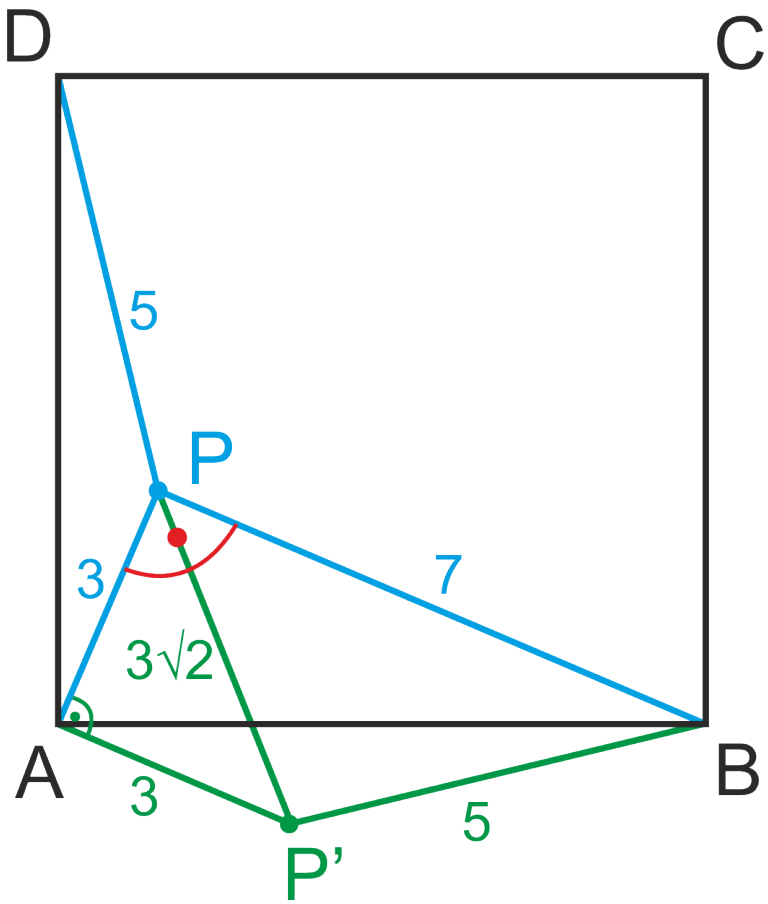
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- Otočíme $\triangle ADP$ okolo A o $\pi/2$ (bod P')
- $\triangle ADP \simeq \triangle APD$
- Pythagrova věta $\Rightarrow |PP'| = 3\sqrt{2}$
- Heronova věta $\Rightarrow S_{\triangle PP'B} = 21/2$
- Zároveň platí: $S_{\triangle PP'B} = 7 \cdot 3\sqrt{2}/2 \cdot \sin\alpha$.
- $\sin\alpha = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \pi/4$
- $\angle APP' = \pi/4$
- $\angle APB = \pi/2$
- $S_{ABCD} = 58$



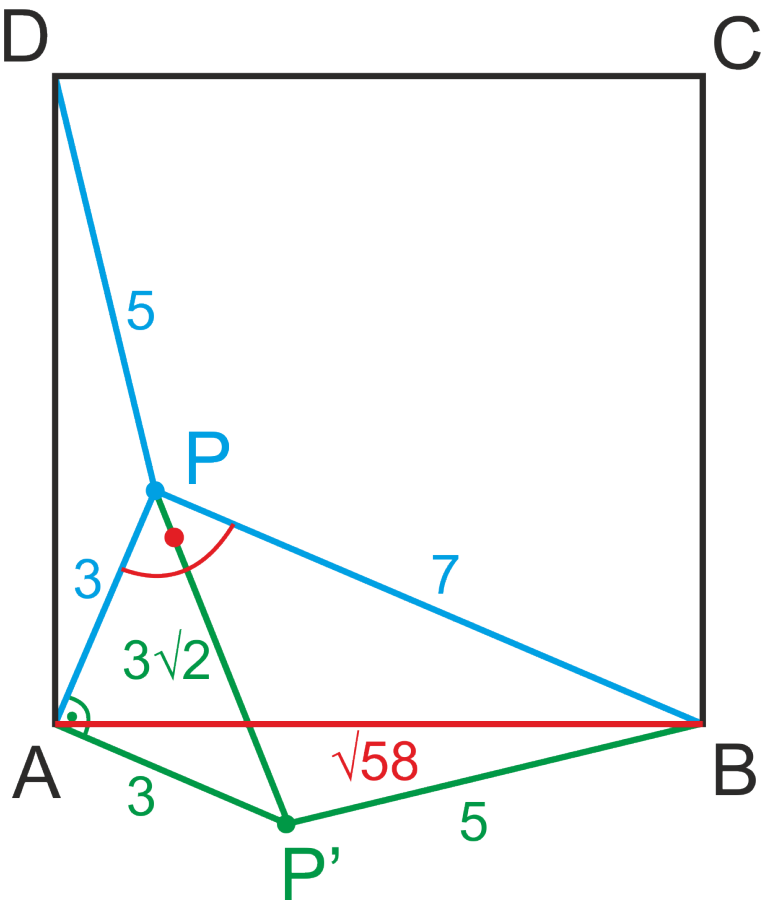
Úloha na Hérónovu větu – řešení

- Otočíme $\triangle ADP$ okolo A o $\pi/2$ (bod P')
- $\triangle ADP \simeq \triangle APD$
- Pythagrova věta $\Rightarrow |PP'| = 3\sqrt{2}$
- Heronova věta $\Rightarrow S_{\triangle PP'B} = 21/2$
- Zároveň platí: $S_{\triangle PP'B} = 7 \cdot 3\sqrt{2}/2 \cdot \sin\alpha$.
- $\sin\alpha = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \pi/4$
- $\angle APP' = \pi/4$
- $\angle APB = \pi/2$
- $S_{ABCD} = 58$



Úloha na Hérónovu větu – řešení

- Otočíme $\triangle ADP$ okolo A o $\pi/2$ (bod P')
- $\triangle ADP \simeq \triangle APD$
- Pythagrova věta $\Rightarrow |PP'| = 3\sqrt{2}$
- Heronova věta $\Rightarrow S_{\triangle PP'B} = 21/2$
- Zároveň platí: $S_{\triangle PP'B} = 7 \cdot 3\sqrt{2}/2 \cdot \sin\alpha.$
- $\sin\alpha = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \pi/4$
- $\angle APP' = \pi/4$
- $\angle APB = \pi/2$
- $S_{ABCD} = 58$



Outline

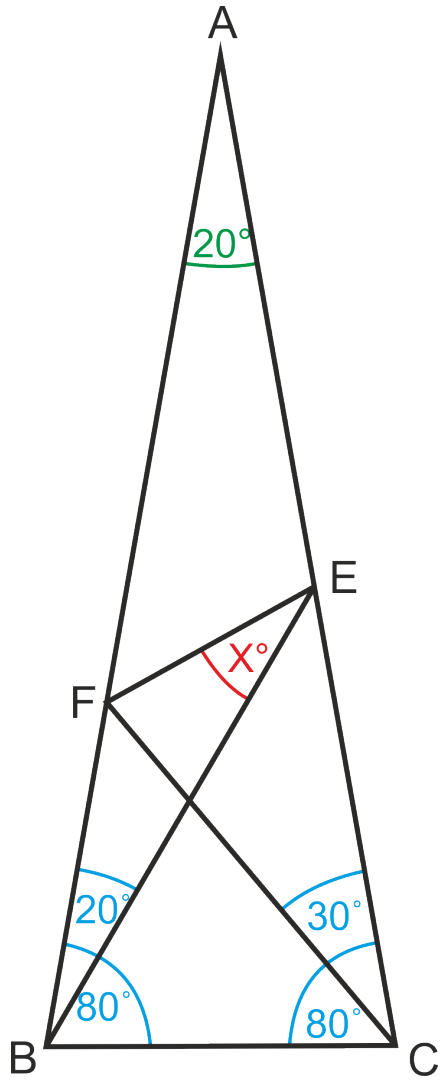
1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

Langleyho problém (1922)

Langleyho problém

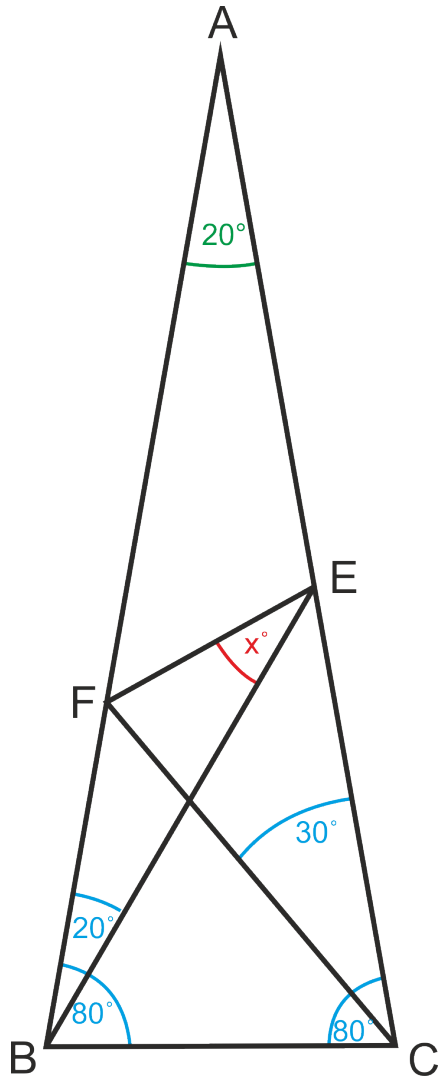
ABC je rovnoramenný trojúhelník.

- $\angle ABC = \angle ACB = 80°$
- bod E leží na AC tak, že $\angle ABE = 20°$
- bod F leží na AB tak, že $\angle ACF = 30°$
- Určete $\angle BEF$



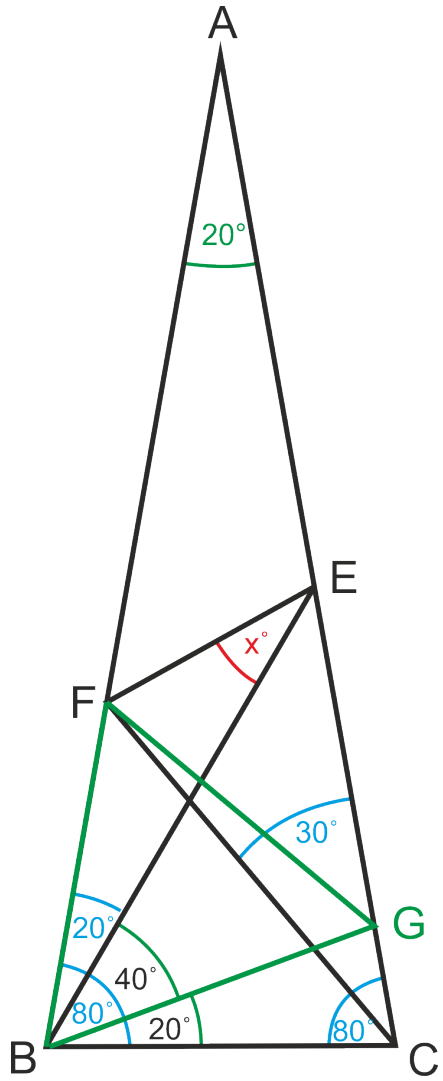
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



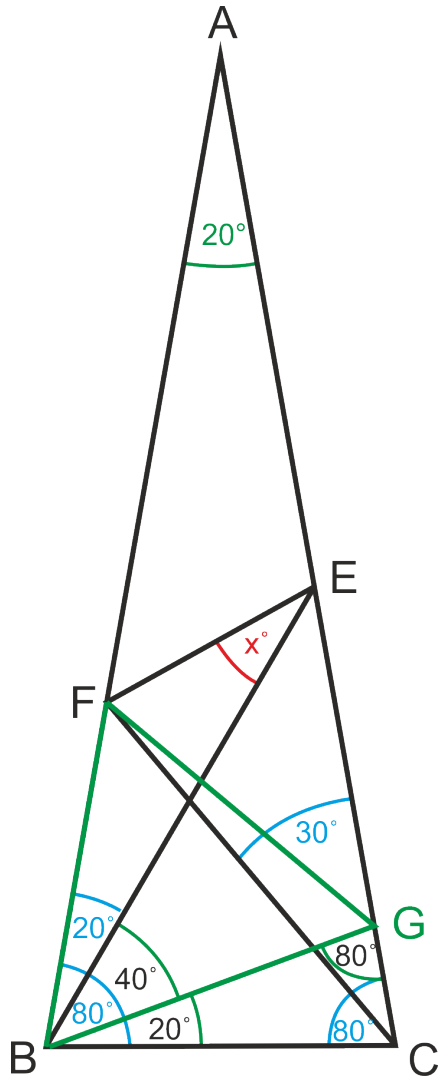
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



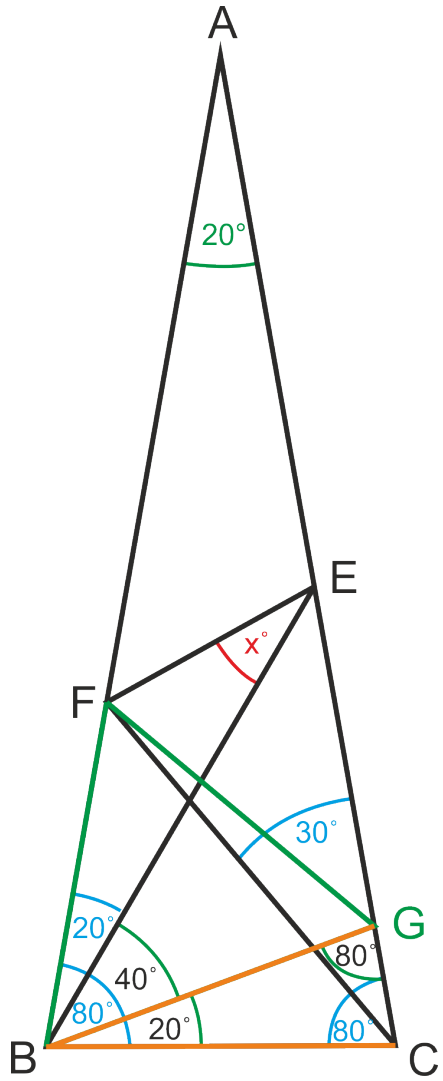
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



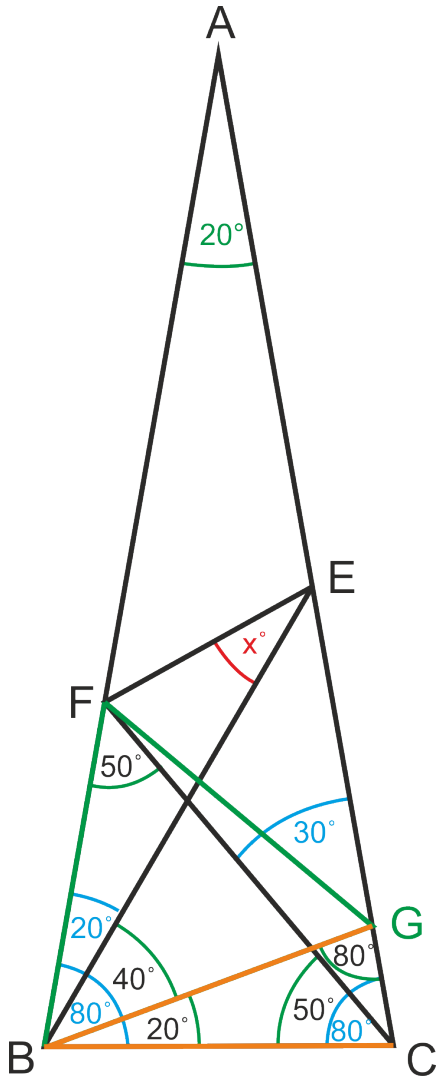
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



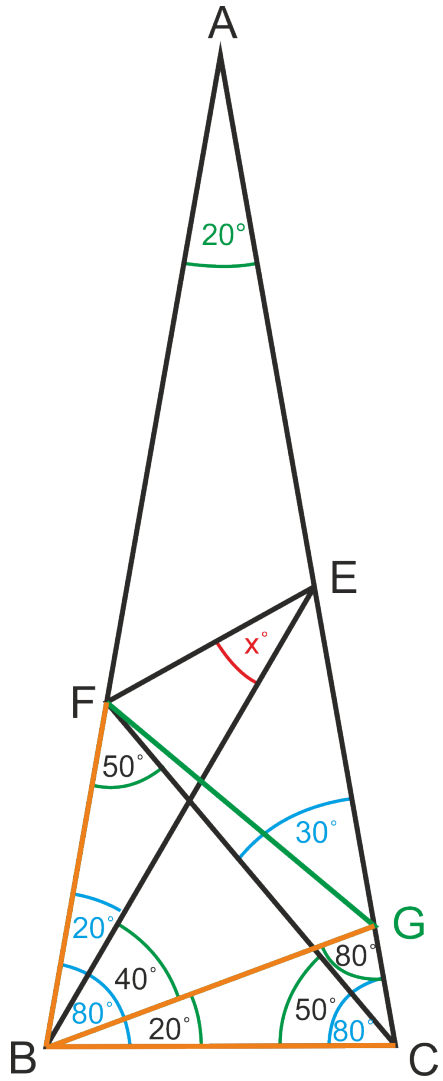
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



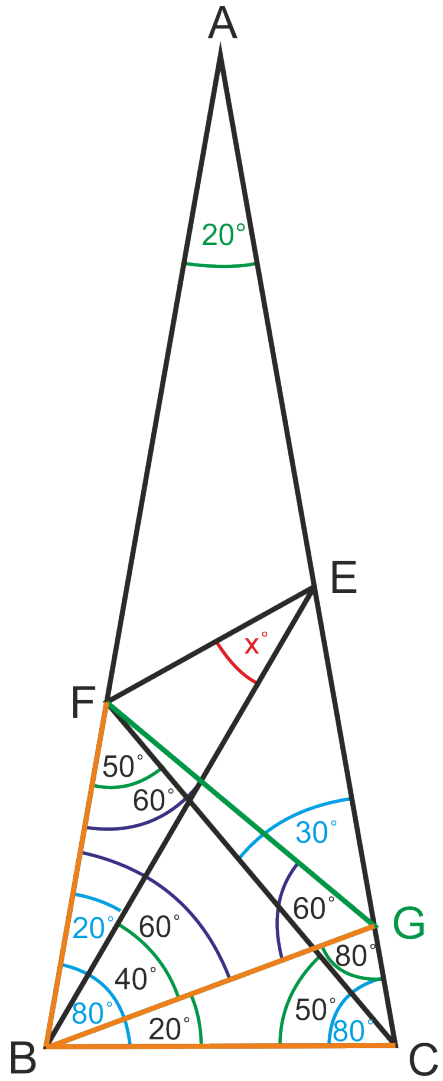
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



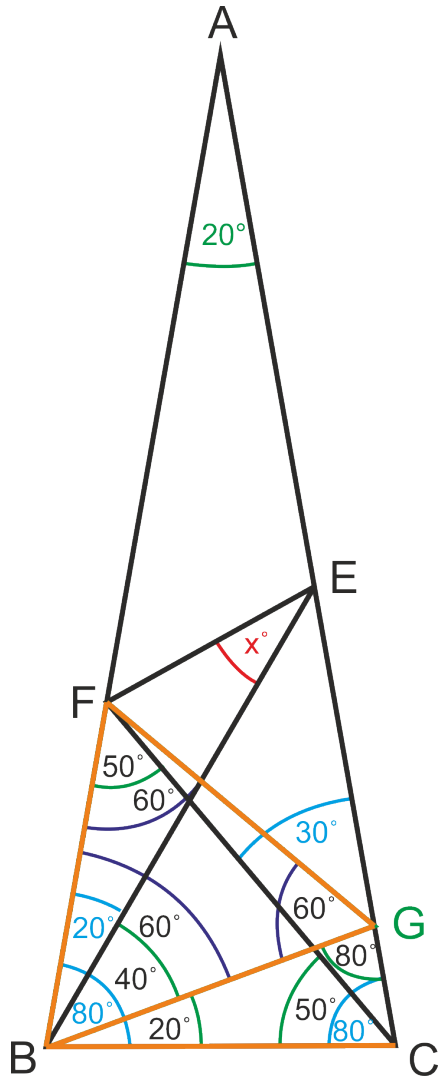
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



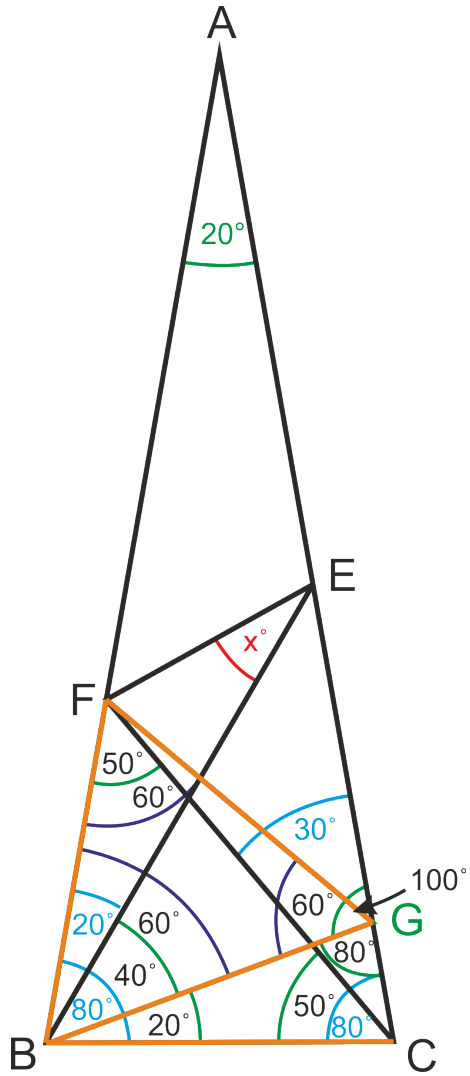
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



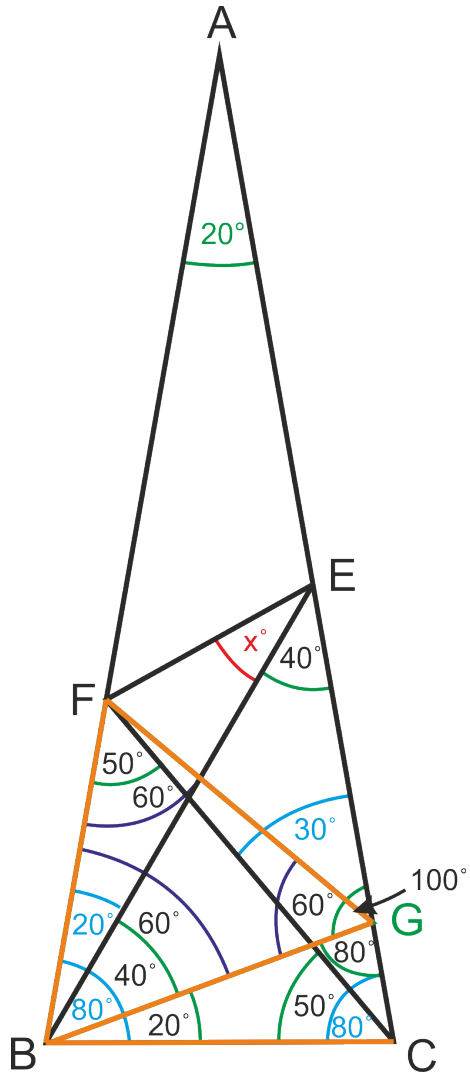
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



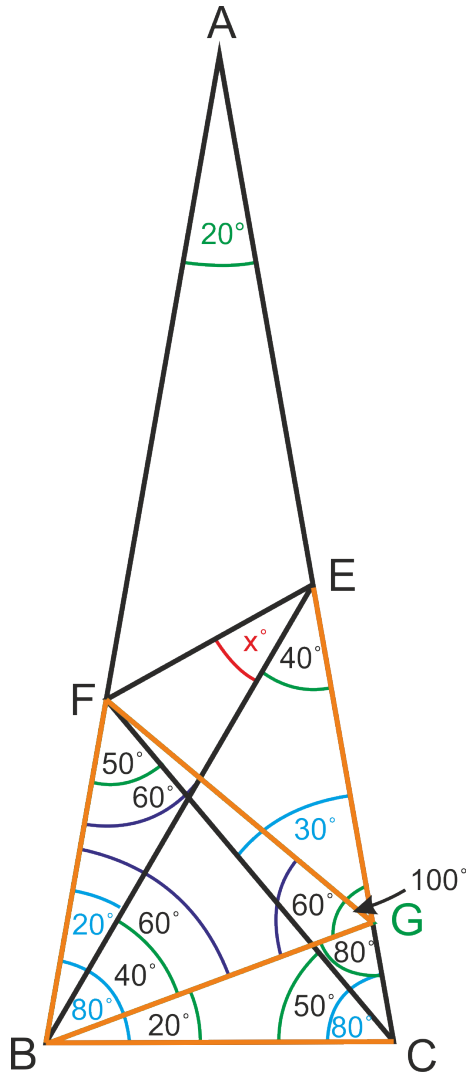
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



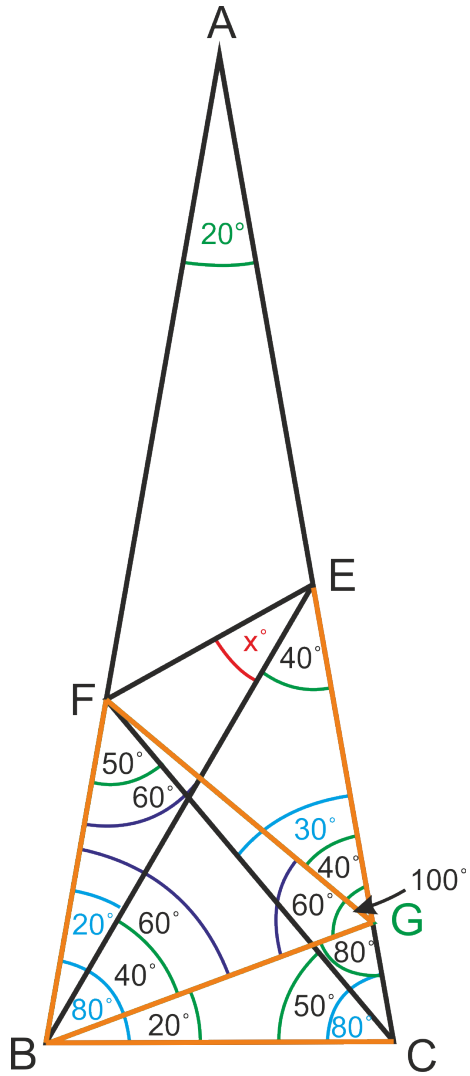
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



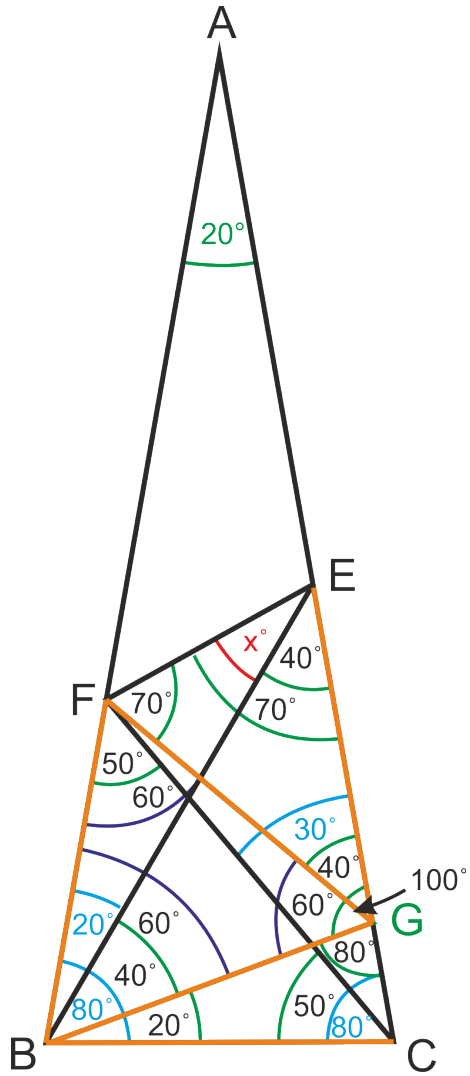
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



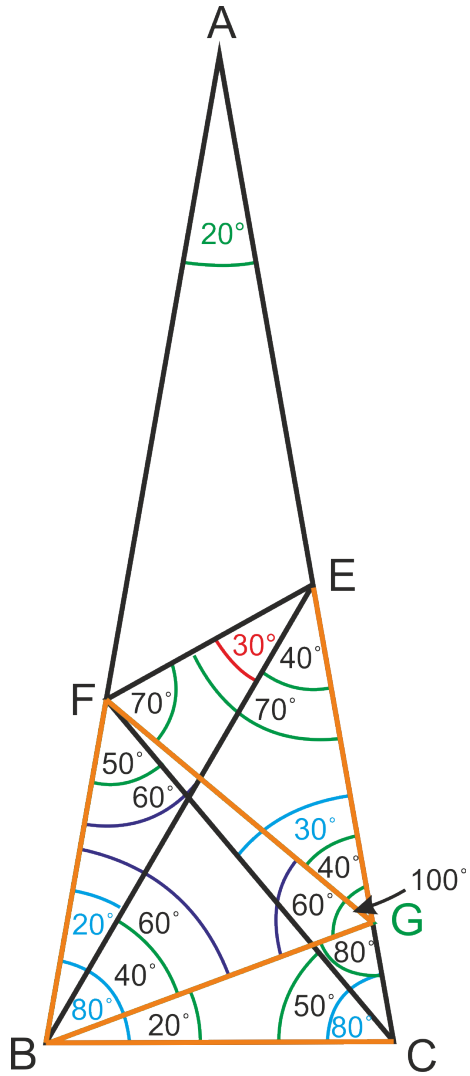
Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



Langleyho problém – řešení

- sestrojíme bod G leží na AC tak, že $\angle CBG = 20°$
- $\angle BGC = \angle FBC = 80°$
- $|BC| = |BG|$
- $\angle BCF = \angle BFC = 50°$
- $|BC| = |BF|$
- $\angle BGF = \angle GFB = \angle FBG = 60°$
- $|BG| = |BF| = |FG|$
- $\angle BGE = 100°$
- $\angle BEG = 40°$
- $|BG| = |EG|$
- $\angle FGE = 40°$
- $\angle GFE = \angle GEF = 70°$
- $\angle BEF = 30°$



Outline

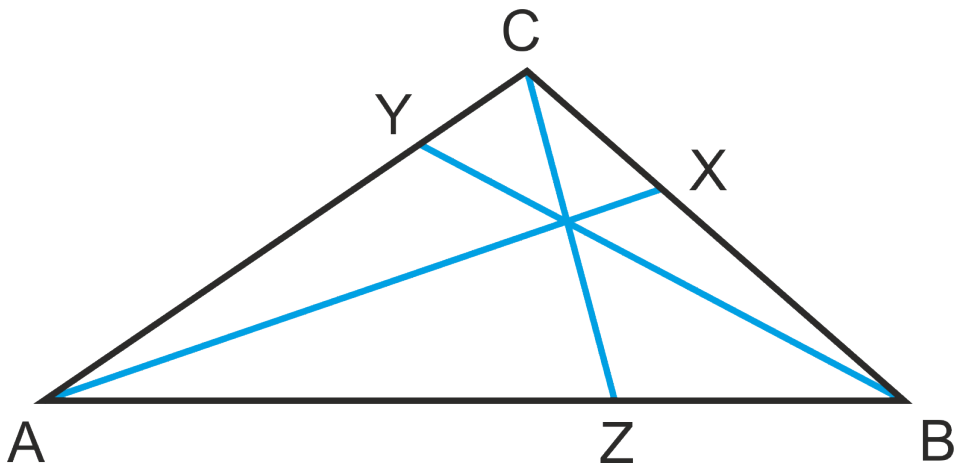
1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

Cevova věta (1678)

Cevova věta

Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Přímky AX, BY a CZ procházejí jedním bodem, právě když platí

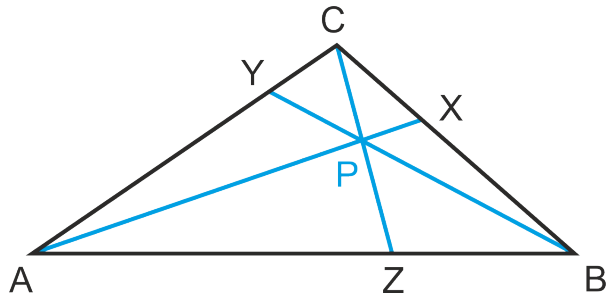
$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$



Cevova věta – důkaz ($\Rightarrow$):

- Poměry úseček, které figurují v Cevově větě, převedeme na poměry obsahů trojúhelníků, které mají tyto úsečky jako základny a přitom mají stejné výšky

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{AZC}}{S_{BZC}} = \frac{S_{AZP}}{S_{BZP}} = \frac{S_{AZC}-S_{AZP}}{S_{BZC}-S_{BZP}} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}};$$
$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{BXA}}{S_{CXA}} = \frac{S_{BXP}}{S_{CXP}} = \frac{S_{BXA}-S_{BXP}}{S_{CXA}-S_{CXP}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}};$$
$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{CYB}}{S_{AYB}} = \frac{S_{CYP}}{S_{AYP}} = \frac{S_{CYB}-S_{CYP}}{S_{AYB}-S_{AYP}} = \frac{S_{CPB}}{S_{APB}}.$$



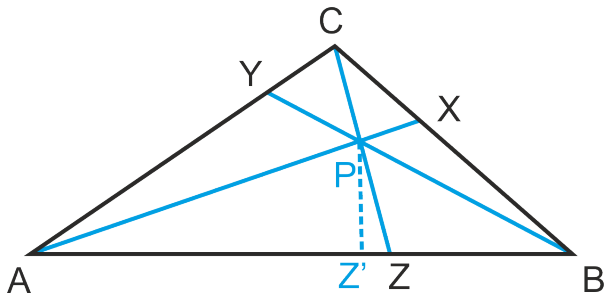
- Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|}\cdot\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}}\cdot\frac{S_{BPA}}{S_{CPA}}\cdot\frac{S_{CPB}}{S_{APB}} = 1.$$

Cevova věta – důkaz ($\Leftarrow$):

- Bod P je průsečíkem úseček AX a BY, označíme Z' průsečík CP s AB. Potom AX, BY a CZ' se protínají v jednom bodě a z předpokladu věty

$$\frac{|AZ'|}{|Z'B|}\cdot\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{|AZ|}{|ZB|}\cdot\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}=1$$



- Neboli

$$\frac{|AZ'|}{|Z'B|}=\frac{|AZ|}{|ZB|}.$$

- Z toho dostaneme: $Z=Z'$.

■

Giovanni Ceva

- 1647 – 1734
- italský matematik
- profesor na Universitě v Pise
- v roce 1678, publikoval nyní slavnou větu zvanou Cevova věta
- tato věta byla však již známá arabskému matematikovi Yusuf Al-Mu'taman ibn Hűd již v 11 století

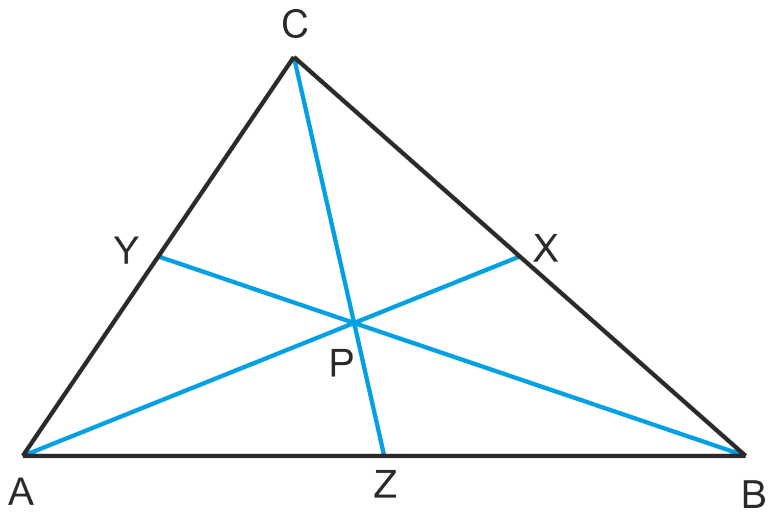
Giovanni Ceva

Yusuf Al-Mu'taman ibn Hűd

Důsledky Cevovy věty

Důsledek 1

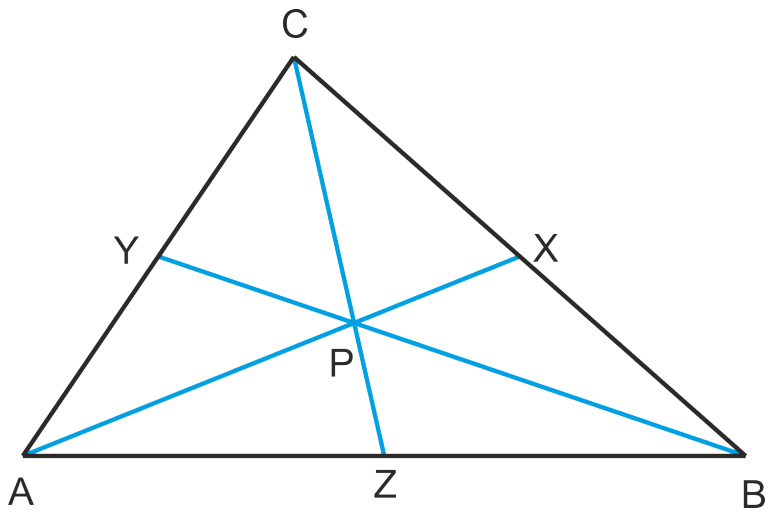
Těžnice v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.



Důsledky Cevovy věty

Důsledek 1

Těžnice v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.



Důkaz:

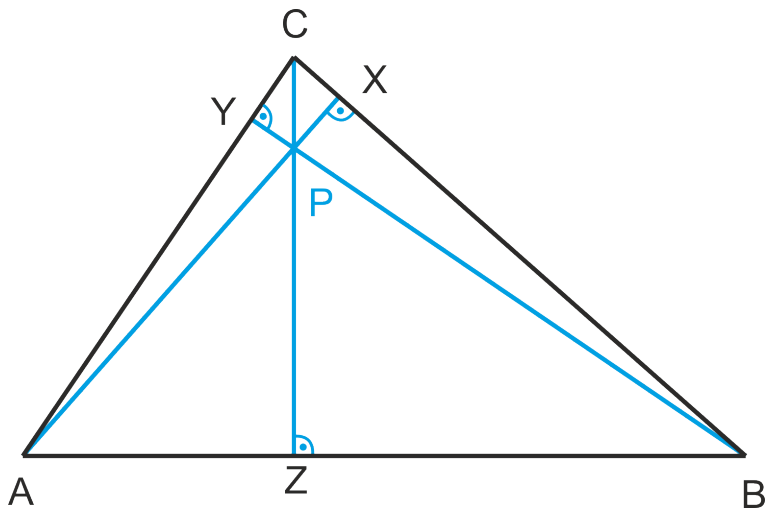
$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

■

Důsledky Cevovy věty

Důsledek 2

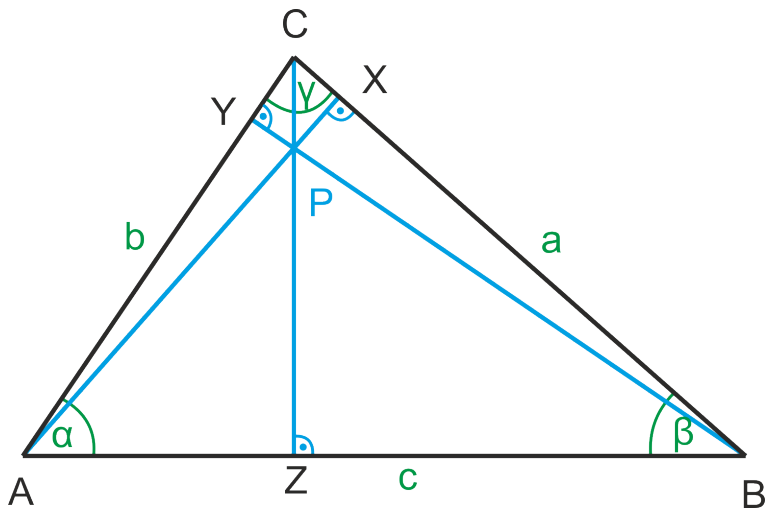
Výšky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.



Důsledky Cevovy věty

Důsledek 2

Výšky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.



Důkaz:

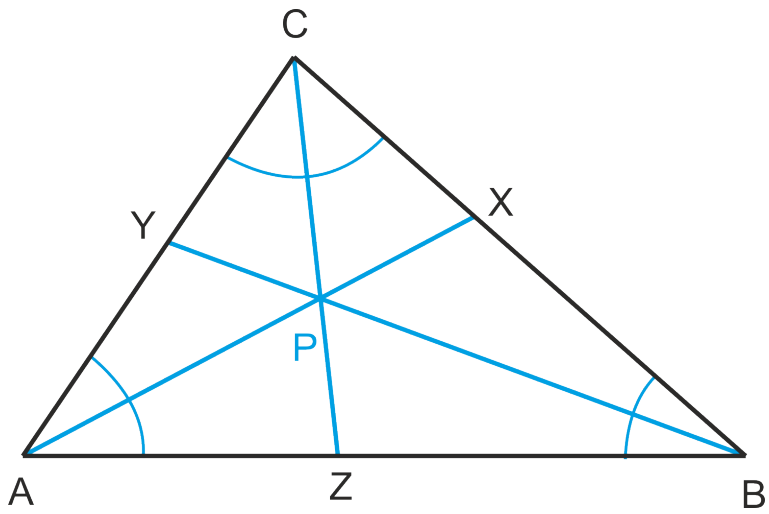
$$\frac{|AZ|}{|ZB|}\cdot\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}\cdot\frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma}\cdot\frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha}=1.$$

■

Důsledky Cevovy věty

Důsledek 3

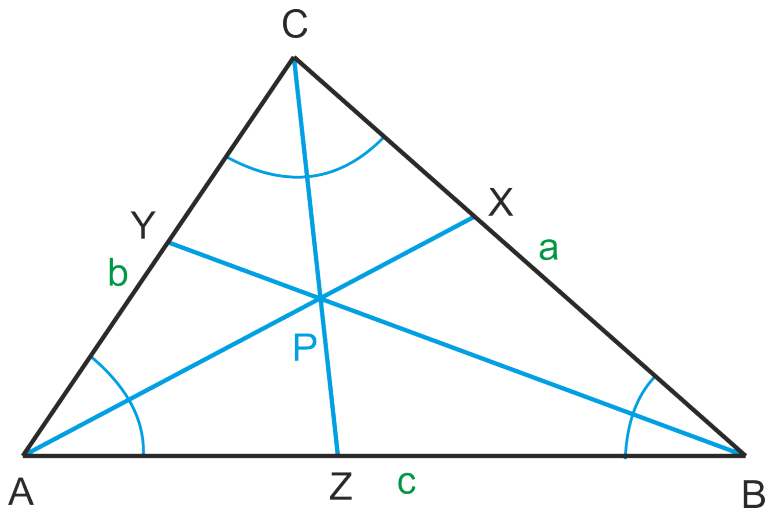
Osy vnitřních úhlů se trojúhelníku se protínají v jednom bodě.



Důsledky Cevovy věty

Důsledek 3

Osy vnitřních úhlů se trojúhelníku se protínají v jednom bodě.



Důkaz:

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1.$$

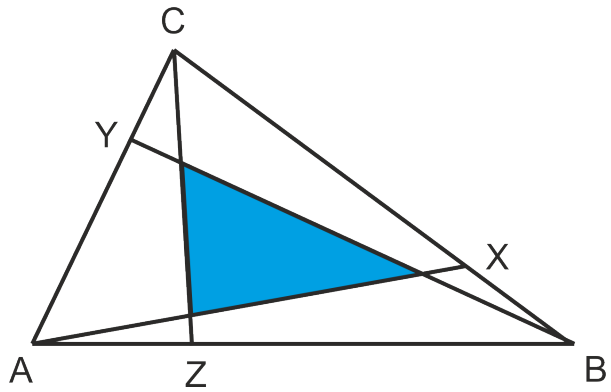
■

Routhova věta (1896)

Routhova věta

Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC a AB. Označme $x = \frac{|BX|}{|XC|}$, $y = \frac{|CY|}{|YA|}$ a $z = \frac{|AZ|}{|ZB|}$. Potom obsah trojúhelníka vymezeného přímkami AX, BY a CZ je roven

$$\frac{(xyz-1)^2}{(xy+y+1)(yz+z+1)(zx+x+1)}.$$



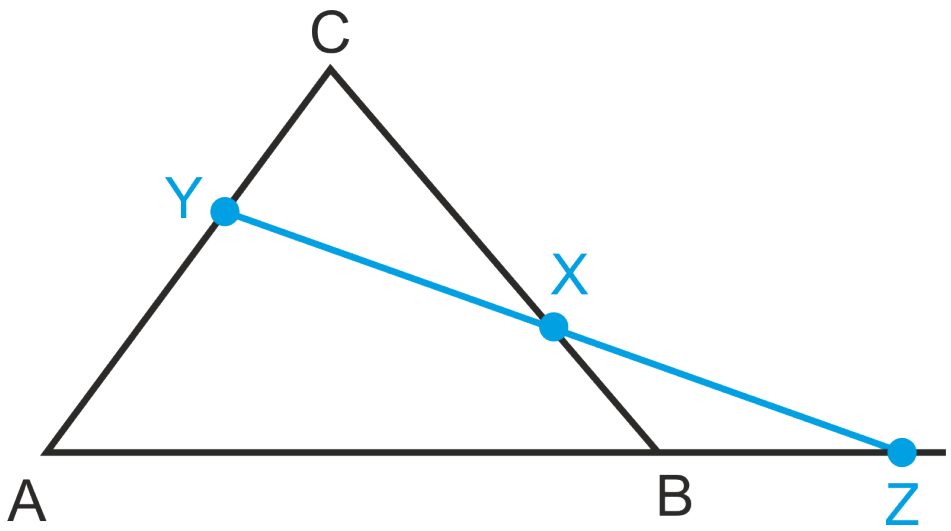
- Trojúhelník vymezený přímkami AX, BY a CZ má nulový obsah právě tehdy, když $xyz = 1$, což je Cevova věta.
- Pro $x = y = z = 2$ dostáváme trojúhelník o obsahu $1/7$ trojúhelníku ABC.

Menelaova věta

Menelaova věta

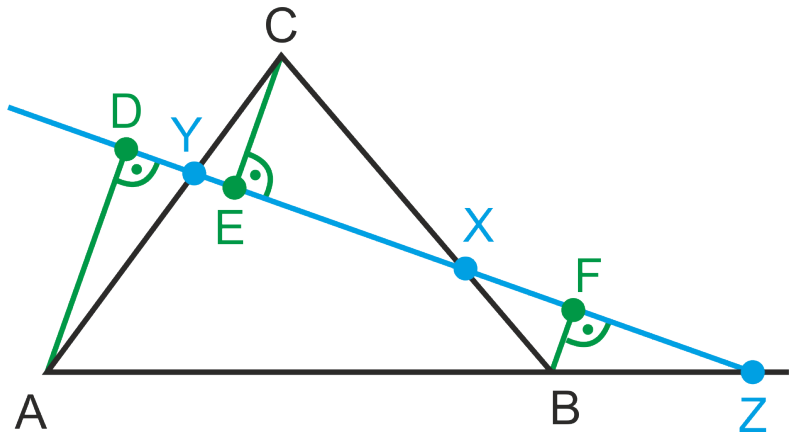
Je dán trojúhelník ABC. Body X, Y a Z jsou po řadě body na přímkách BC, AC a AB (jeden z nich je vně $\triangle ABC$). Body X, Y a Z leží na přímce právě, když platí

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$



Menelaova věta – důkaz ($\Rightarrow$):

- Spustíme kolmice z bodů A,B,C k XY
- $\triangle AZD \simeq \triangle BZF \Rightarrow \dfrac{|AZ|}{|BZ|} = \dfrac{|AD|}{|BF|}$
- $\triangle CXE \simeq \triangle BXF \Rightarrow \dfrac{|BX|}{|CX|} = \dfrac{|BF|}{|CE|}$
- $\triangle AYD \simeq \triangle CYE \Rightarrow \dfrac{|CY|}{|AY|} = \dfrac{|CE|}{|AD|}$
- Z toho

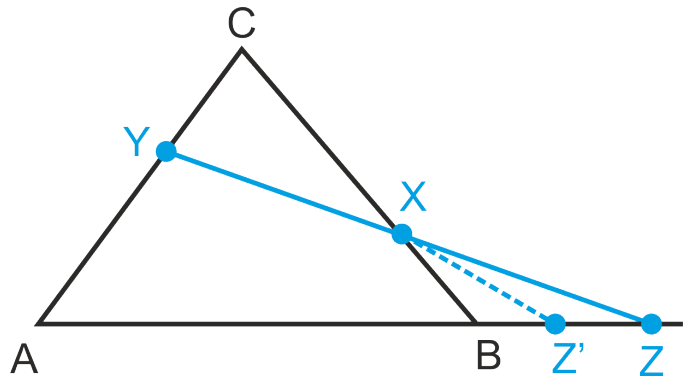


$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = \frac{|AD|}{|BF|} \cdot \frac{|BF|}{|CE|} \cdot \frac{|CE|}{|AD|} = 1.$$

Menelaova věta – důkaz ($\Leftarrow$):

- Označíme Z' průsečík XY s AB. Potom X, Y a Z' leží na přímce a z předpokladu věty

$$\frac{|AZ'|}{|BZ'|}\cdot\frac{|BX|}{|CX|}\cdot\frac{|CY|}{|AY|}=\frac{|AZ|}{|BZ|}\cdot\frac{|BX|}{|CX|}\cdot\frac{|CY|}{|AY|}=1$$



- Neboli

$$\frac{|AZ'|}{|Z'B|}=\frac{|AZ|}{|ZB|}.$$

- Z toho dostaneme: $Z=Z'$.

■

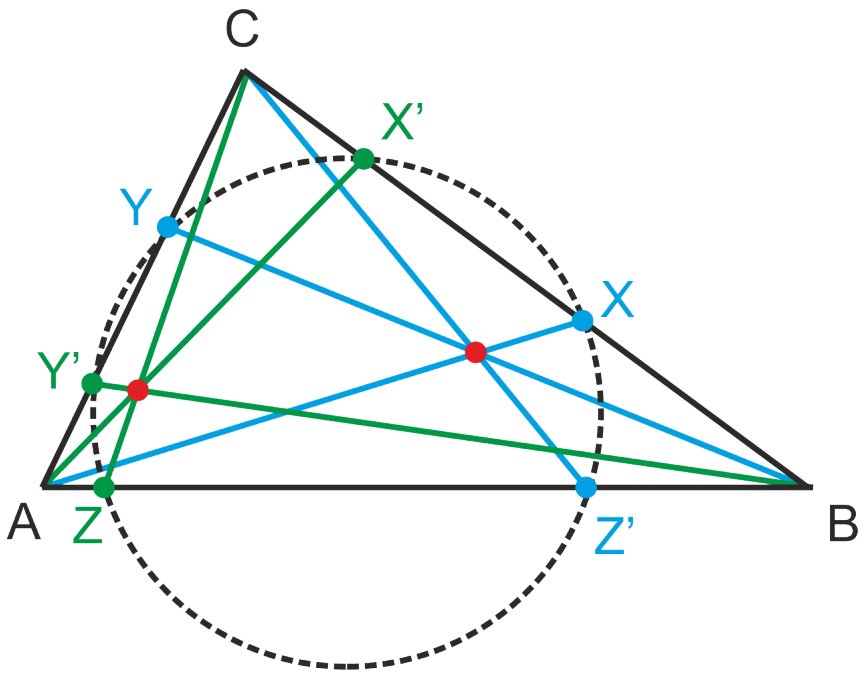
Meneláos Alexandrijský

- 70 – 140
- Řecký matematik a astronom
- jako první studoval geodetické křivky na plochách jako přirozené analogie přímkám v rovině
- Jeho dílo Sphaerica je složeno z tří knih a věnuje se geometrii na sféře a jejím aplikacím v astronomických měřeních a výpočtech.

Úlohy na Cevovu a Menelaovu větu

Úloha 1

Kružnice protne trojúhelník ABC v bodech X, X', Y, Y', Z, Z'. Dokažte, že přímky AX, BY a CZ se protínají v 1 bodě právě tehdy když se protínají v 1 bodě přímky AX', BY' a CZ'.



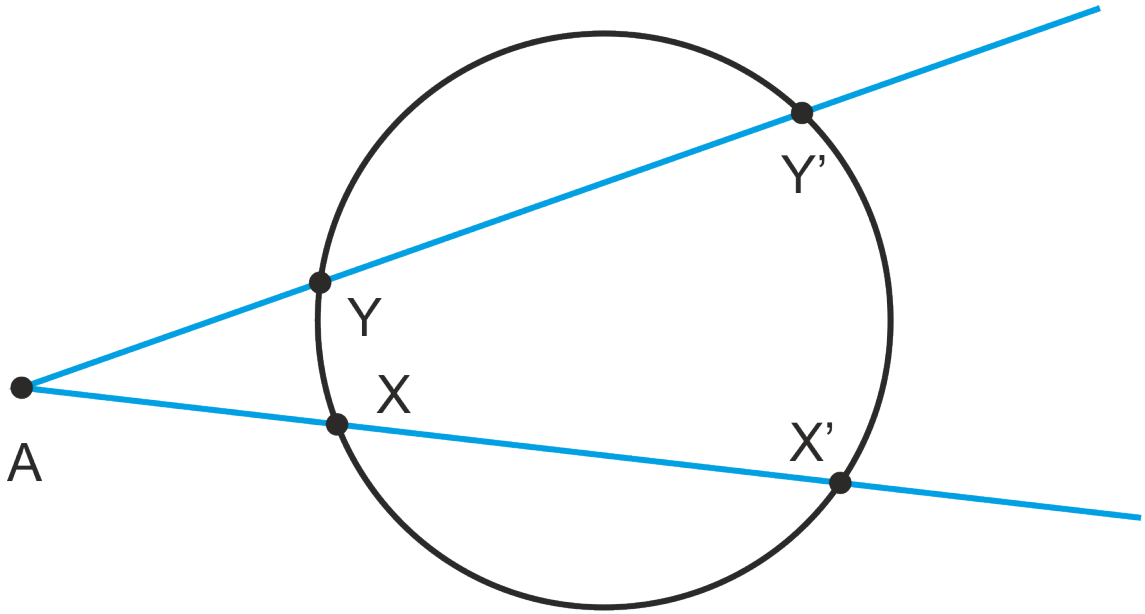
Věta o sečnách kružnice

Věta

Nechť přímky x a y protínají kružnici k v bodech X, X' a Y, Y'. Potom

$$|AX| \cdot |AX'| = |AY| \cdot |AY'|,$$

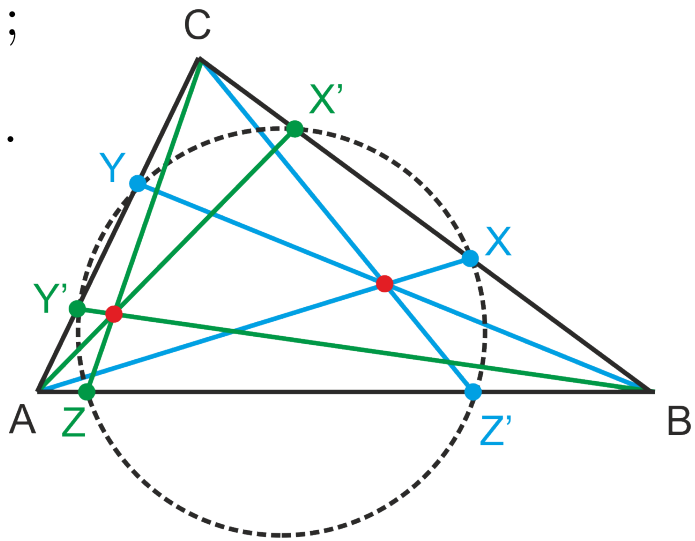
kde A je jejich průsečík.



Úlohy na Cevovu a Menelaovu větu – řešení:

- Z předchozí věty plyne:

$$|AZ||AZ'| = |AY||AY'| \quad \Rightarrow \quad |\frac{|AZ|}{|AY|} = \frac{|AY'|}{|AZ'|};$$
$$|BZ||BZ'| = |BX||BX'| \quad \Rightarrow \quad \frac{|BZ|}{|BX|} = \frac{|BX'|}{|BZ'|};$$
$$|CX||CX'| = |CY||CY'| \quad \Rightarrow \quad \frac{|CX|}{|CY|} = \frac{|CY'|}{|CX'|}.$$



- Vynásobením dostaneme

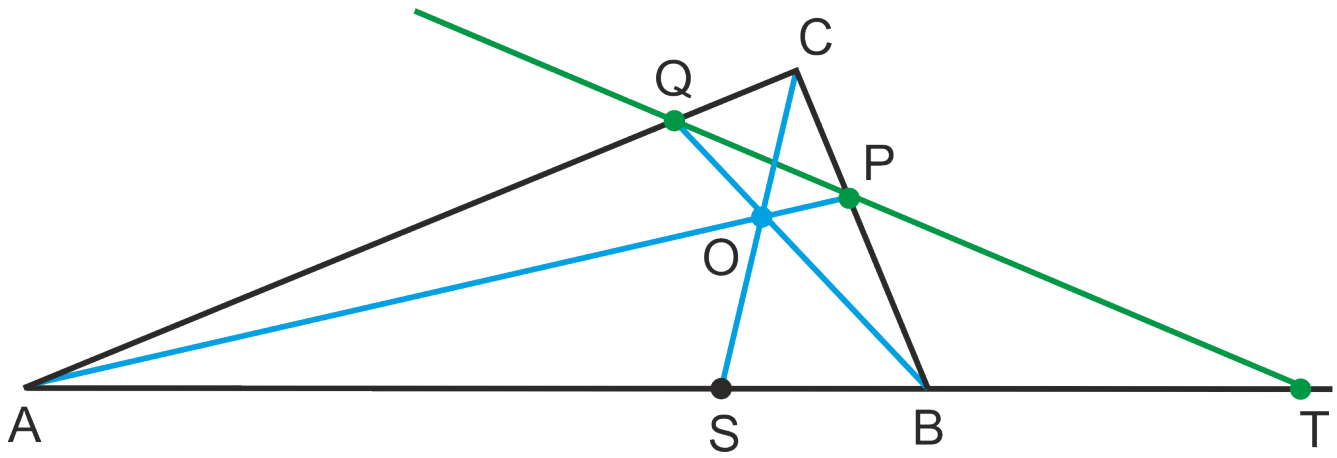
$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{|Z'B|}{|AZ'|} \cdot \frac{|X'C|}{|BX'|} \cdot \frac{|Y'A|}{|CY'|}.$$

- Potom z Cevovy věty plyne že že přímky AX, BY a CZ se protínají v 1 bodě právě tehdy když se protínají v 1 bodě přímky AX', BY' a CZ'.

Úlohy na Cevovu a Menelaovu větu

Úloha 2

V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou AB jsou dány tři ceviány AP, BQ a CS tak, že $|CP| = |CQ| = 2$. Přímka určená body P Q protne AB v bodě T. Vypočtěte velikost $|ST|$ pokud víte, že $|AB| = 10$ a $|AC| = 8$.

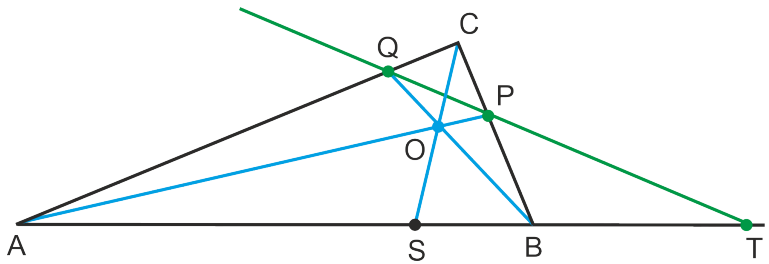


Úlohy na Cevovu a Menelaovu větu – řešení:

- Z Pythagorovo věty $|BC| = 6$. Potom $|AQ| = |AC| - |CQ| = 6$ a $|BP| = |BC| - |PC| = 4$.
- Z Cevovy věty

$$\frac{|AS|}{|SB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$$

plyne $2|AS| = 3|SB|$. A jelikož $|AS| + |SB| = 10$, dostáváme $|SB| = 4$.



- Z Menelaovy věty

$$\frac{|AT|}{|TB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$$

dostaneme $|BT| = 20$.

- $|ST| = |SB| + |BT| = 24$.

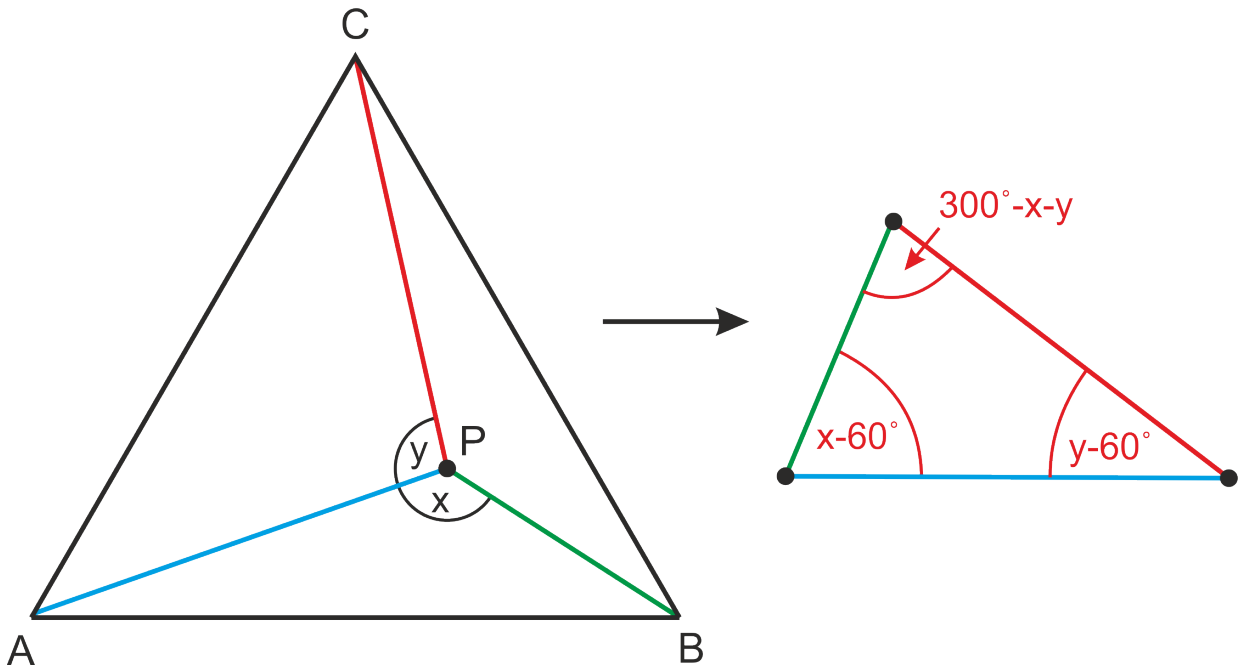
Outline

1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

Problém z YouTube – MindYourDecisions (2018)

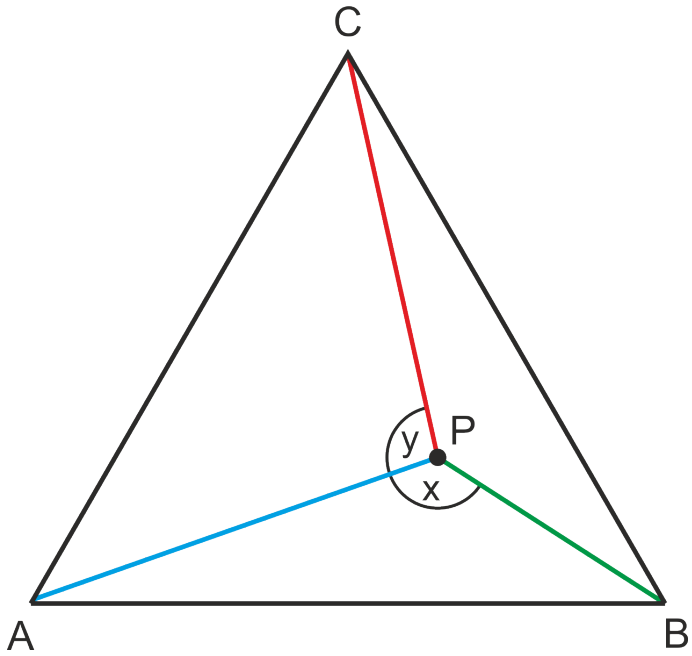
YouTube problém

ABC je rovnostranný trojúhelník a P libovolný bod uvnitř $\triangle ABC$. Označme $x = \angle APB$ a $y = \angle APC$. Dokažte, že trojúhelník se stranami AP, BP a CP má vnitřní úhly rovny $x - 60°, y - 60°$ a $300° - x - y$.



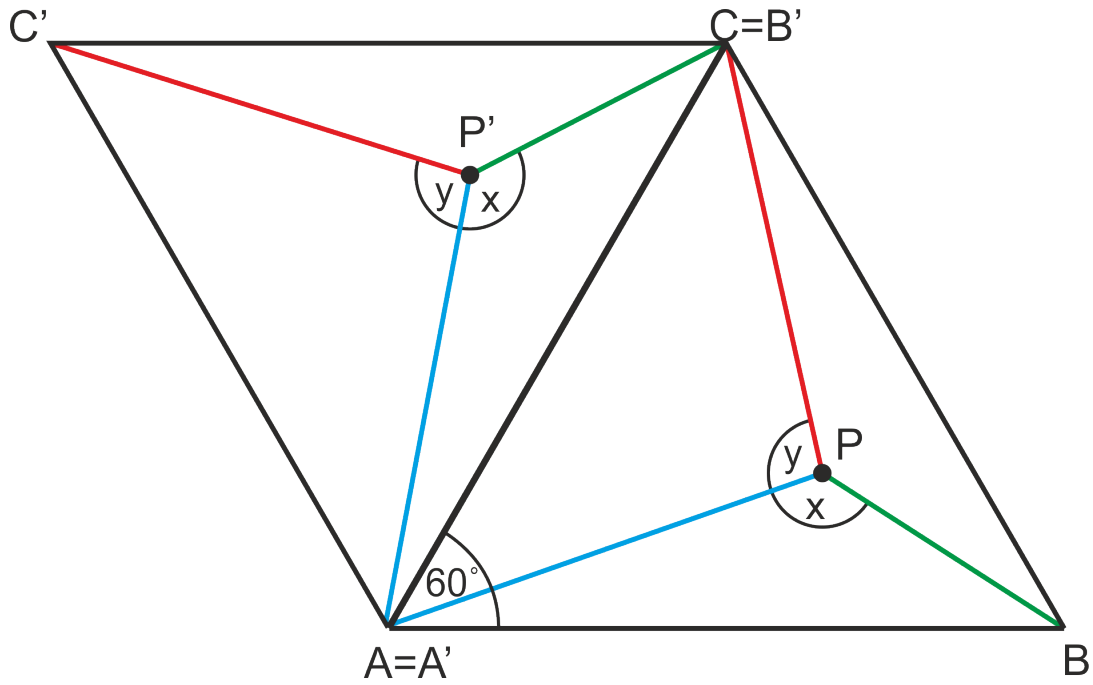
Problém z YouTube – řešení

- Otočíme $\triangle ABC$ okolo A o $60°$
- $\angle PAP' = 60°$
- $|PP'| = |AP|$
- $\angle APP' = \angle AP'P = 60°$
- $\angle PP'C = x - 60°$
- $\angle P'PC = y - 60°$
- $\angle PCP' = 300° - x - y$



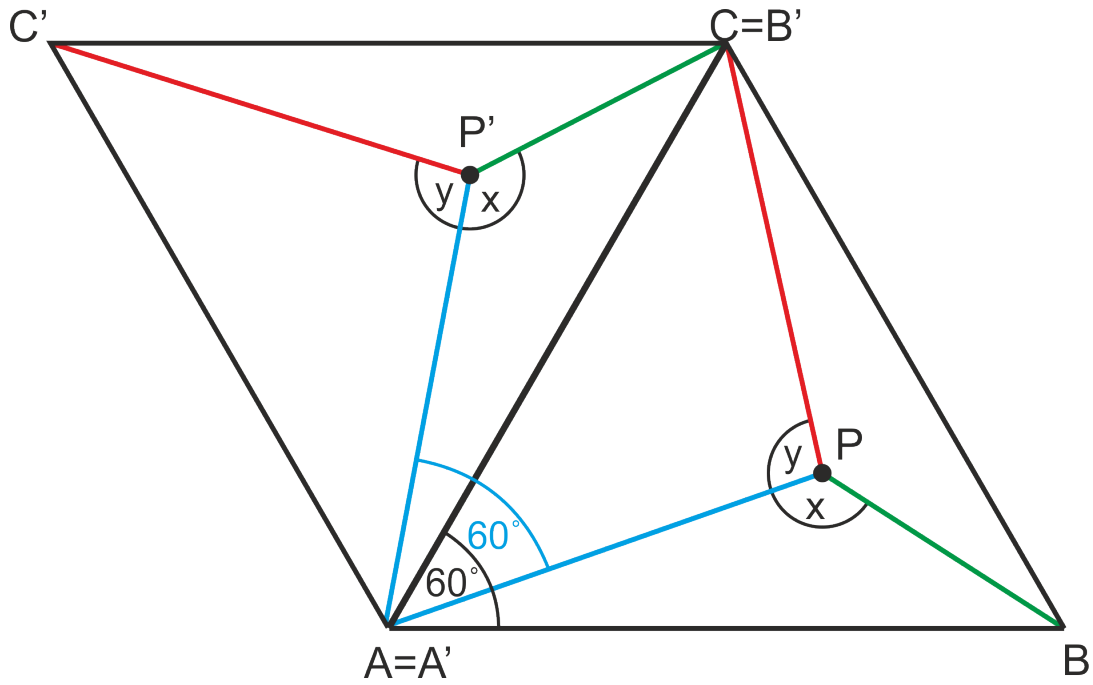
Problém z YouTube – řešení

- Otočíme $\triangle ABC$ okolo A o $60°$
- $\angle PAP' = 60°$
- $|PP'| = |AP|$
- $\angle APP' = \angle AP'P = 60°$
- $\angle PP'C = x - 60°$
- $\angle P'PC = y - 60°$
- $\angle PCP' = 300° - x - y$



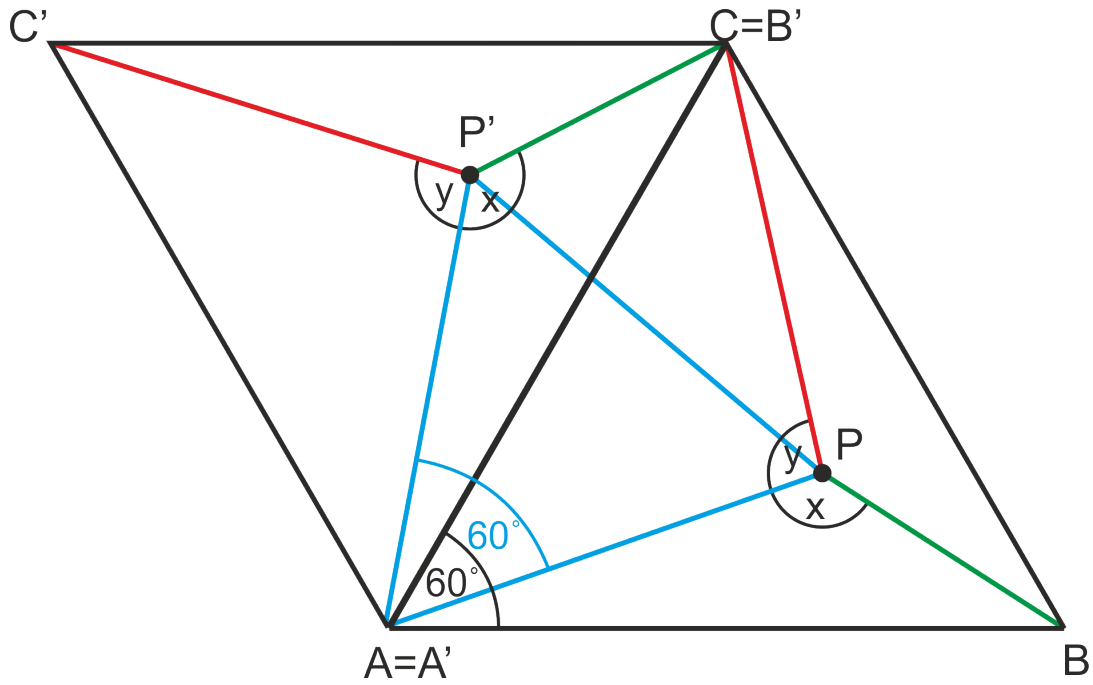
Problém z YouTube – řešení

- Otočíme $\triangle ABC$ okolo A o $60°$
- $\angle PAP' = 60°$
- $|PP'| = |AP|$
- $\angle APP' = \angle AP'P = 60°$
- $\angle PP'C = x - 60°$
- $\angle P'PC = y - 60°$
- $\angle PCP' = 300° - x - y$



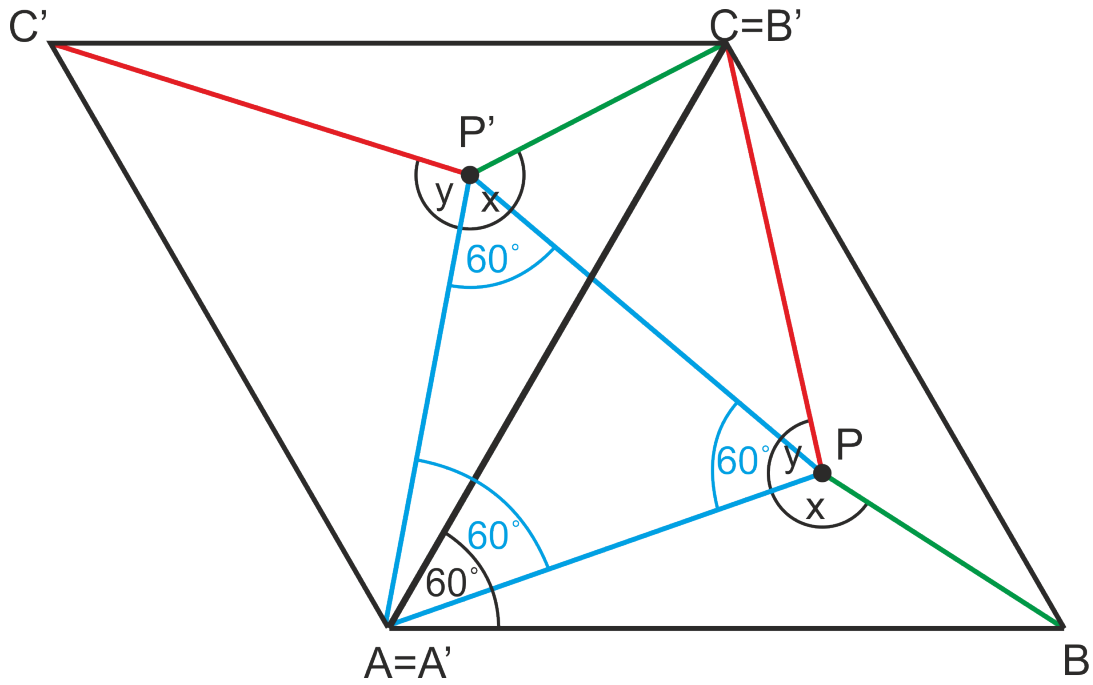
Problém z YouTube – řešení

- Otočíme $\triangle ABC$ okolo A o $60°$
- $\angle PAP' = 60°$
- $|PP'| = |AP|$
- $\angle APP' = \angle AP'P = 60°$
- $\angle PP'C = x - 60°$
- $\angle P'PC = y - 60°$
- $\angle PCP' = 300° - x - y$



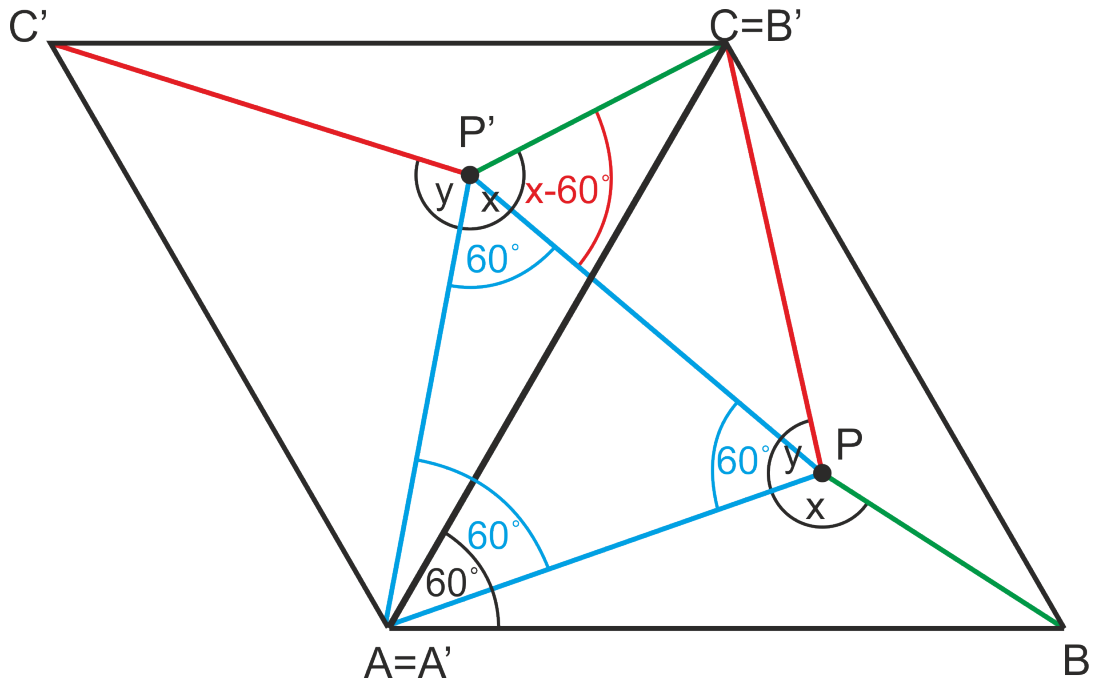
Problém z YouTube – řešení

- Otočíme $\triangle ABC$ okolo A o $60°$
- $\angle PAP' = 60°$
- $|PP'| = |AP|$
- $\angle APP' = \angle AP'P = 60°$
- $\angle PP'C = x - 60°$
- $\angle P'PC = y - 60°$
- $\angle PCP' = 300° - x - y$



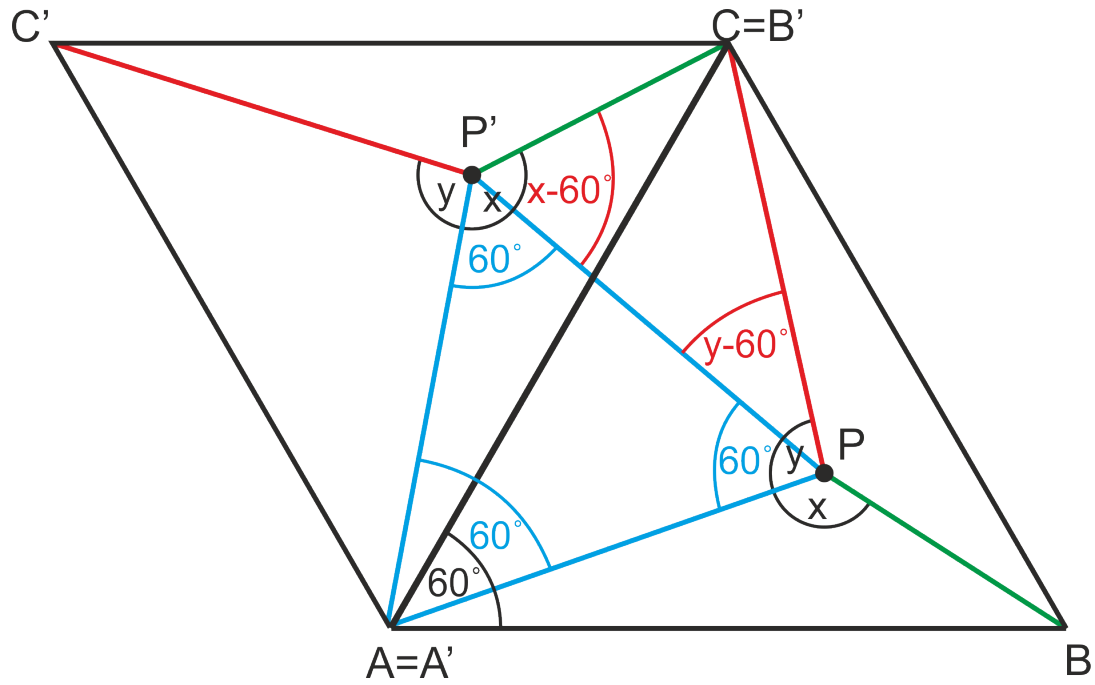
Problém z YouTube – řešení

- Otočíme $\triangle ABC$ okolo A o $60°$
- $\angle PAP' = 60°$
- $|PP'| = |AP|$
- $\angle APP' = \angle AP'P = 60°$
- $\angle PP'C = x - 60°$
- $\angle P'PC = y - 60°$
- $\angle PCP' = 300° - x - y$



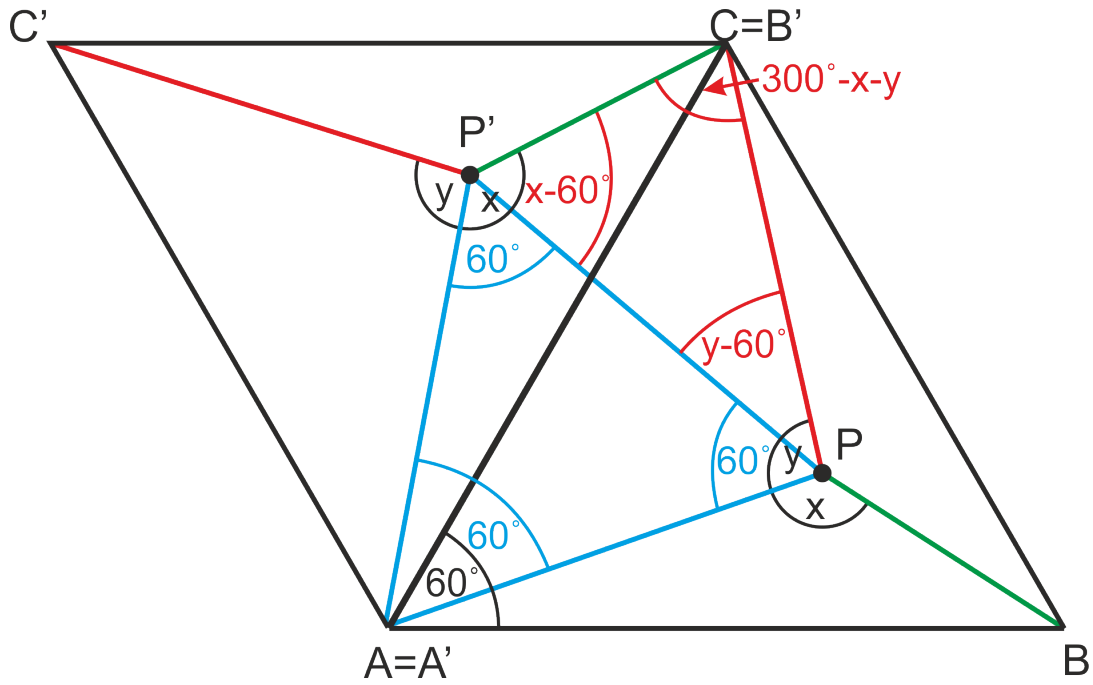
Problém z YouTube – řešení

- Otočíme $\triangle ABC$ okolo A o $60°$
- $\angle PAP' = 60°$
- $|PP'| = |AP|$
- $\angle APP' = \angle AP'P = 60°$
- $\angle PP'C = x - 60°$
- $\angle P'PC = y - 60°$
- $\angle PCP' = 300° - x - y$



Problém z YouTube – řešení

- Otočíme $\triangle ABC$ okolo A o $60°$
- $\angle PAP' = 60°$
- $|PP'| = |AP|$
- $\angle APP' = \angle AP'P = 60°$
- $\angle PP'C = x - 60°$
- $\angle P'PC = y - 60°$
- $\angle PCP' = 300° - x - y$



Outline

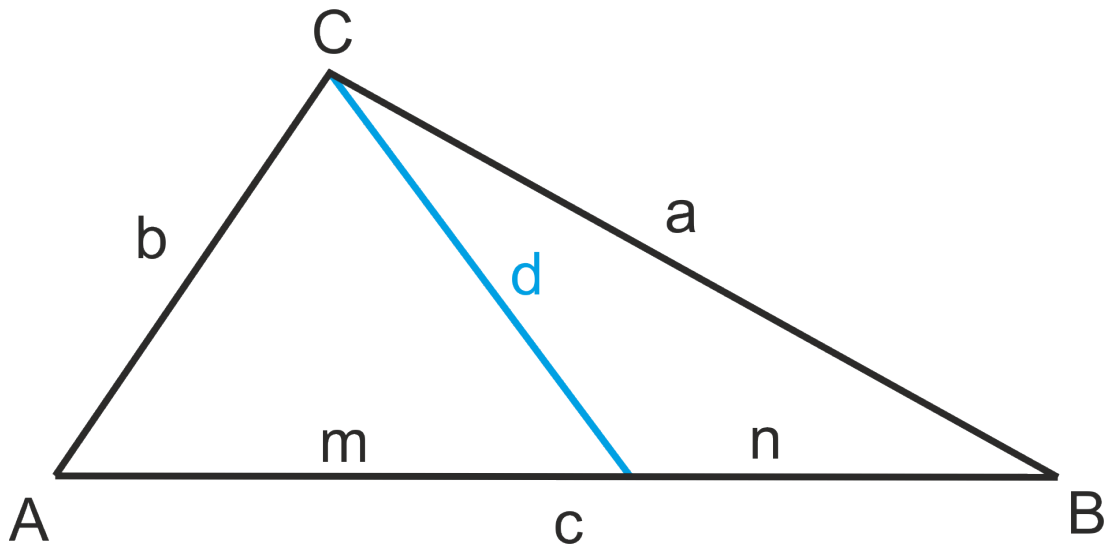
1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

Stewartova věta (1746)

Stewartova věta

V $\triangle ABC$ se stranami a, b, c a příčkou d z vrcholu C ke straně c, která rozděluje stranu c na m a n, platí:

$$b^2 n + a^2 m = c(d^2 + mn).$$



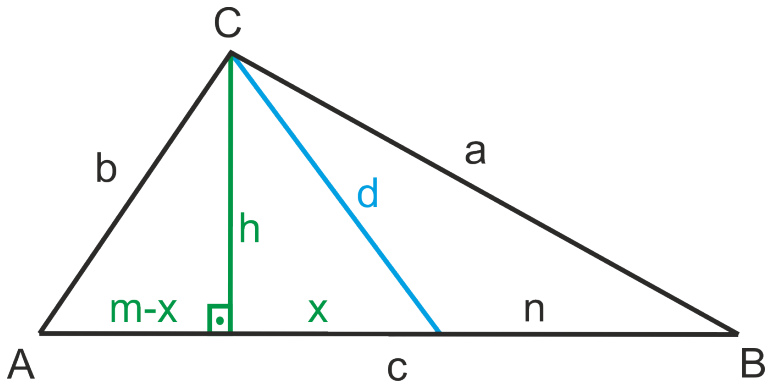
Stewartova věta – důkaz:

- Z Pythagorovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (n+x)^2; \\ b^2 &= h^2 + (m-x)^2; \\ d^2 &= h^2 + x^2. \end{aligned}$$

- Odečteme první dvě rovnice a vyjádříme x. Z třetí rovnice vyjádříme h^2 a dosadíme do první

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2-b^2+m^2-n^2}{2(m+n)}; \\ a^2 &= d^2 + n(n+2x). \end{aligned}$$



- Dosadíme x do druhé rovnice a upravíme

$$b^2 n + a^2 m = (m+n)(d^2 + mn).$$

■

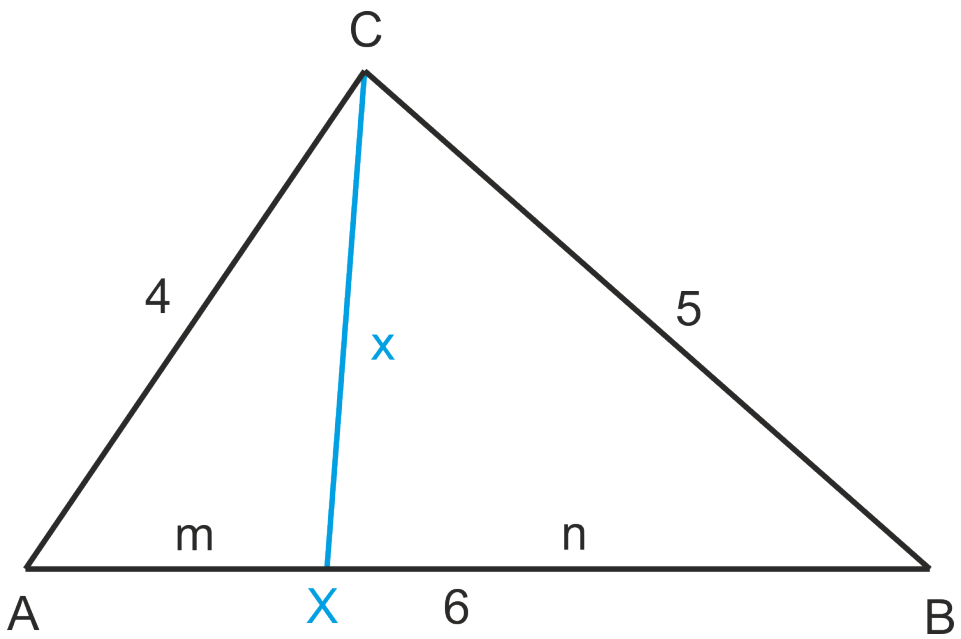
Matthew Stewart

- 1717 – 1785
- Skotský matematik
- oženil se se svou sestřenicí
- Studoval antickou geometrii
- stal se profesorem matematiky na univerzitě v Edinburgu
- nejznámější publikace: Some General Theorems of Considerable use in the Higher Parts of Mathematics – proposition II je Stewartova věta.

Úloha na Stewartovu větu

Úloha 1

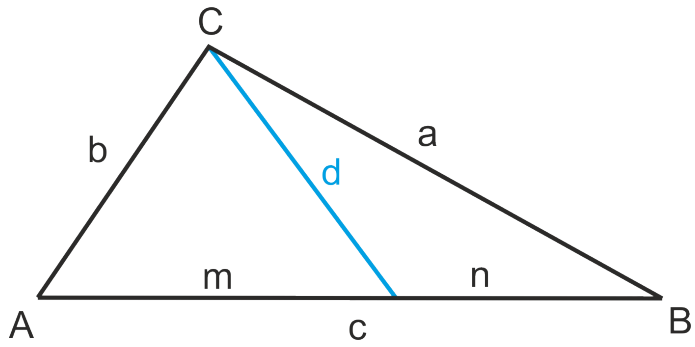
V $\triangle ABC$ je bod X na AB tak, že $|BX| = 2|AX|$. Spočítejte $|CX|$, pokud $|AC| = 4$, $|BC| = 5$ a $|AB| = 6$.



Úloha na Stewartovu větu – řešení:

- Aplikujeme Stewartovu větu na x:

$$16n + 25m = 6(x^2 + mn)$$



- Dále

$$\left.\begin{array}{rcl} n & = & 2m \\ m+n & = & 6 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 2, \quad n = 4.$$

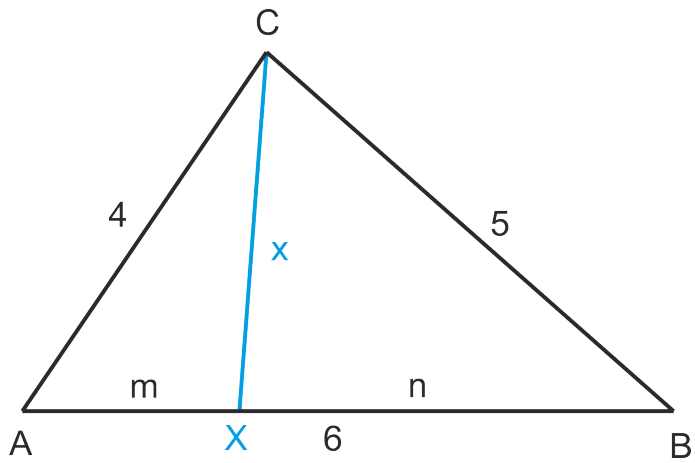
$$b^2 n + a^2 m = c(d^2 + mn)$$

- Dosadíme za m a n do první rovnice

$$114 = 6\left(x^2 + 8\right).$$

- Vyřešíme kvadratickou rovnici

$$x = \sqrt{11}.$$

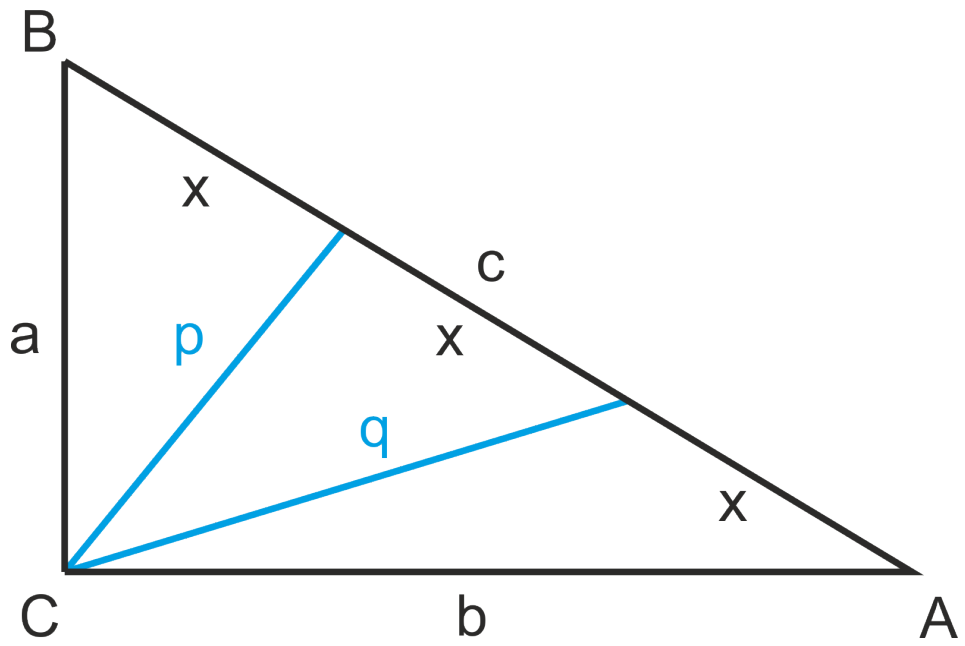


Úloha na Stewartovu větu

Úloha 2

Pravoúhlý trojúhelník má odvěsny a a b a přeponu c. Dvě úsečky p a q z vrcholu C rozdělují stranu c na tři shodné části x. Dokažte, že platí

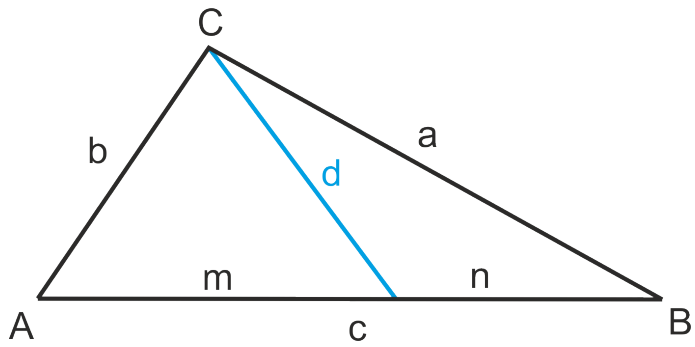
$$p^2 + q^2 = 5x^2.$$



Úloha na Stewartovu větu – řešení:

- Aplikujeme Stewartovu větu na p a na q

$$\begin{aligned} a^2(2x) + b^2 x &= 3x(q^2 + 2x^2), \\ a^2 x + b^2(2x) &= 3x(p^2 + 2x^2). \end{aligned}$$



- Sečteme tyto rovnice

$$3x(a^2 + b^2) = 3x(p^2 + q^2 + 4x^2.)$$

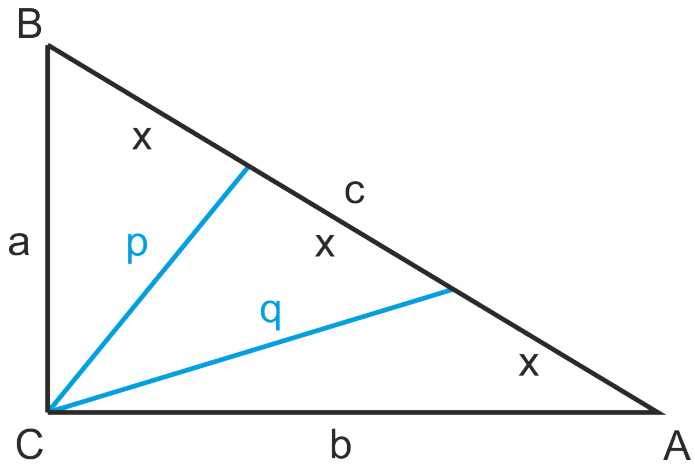
$$b^2 n + a^2 m = c(d^2 + mn)$$

- Z toho

$$a^2 + b^2 = p^2 + q^2 + 4x^2.$$

- Spolu s Pythagorovo větou $a^2 + b^2 = 9x^2$ dostaneme

$$p^2 + q^2 = 5x^2.$$



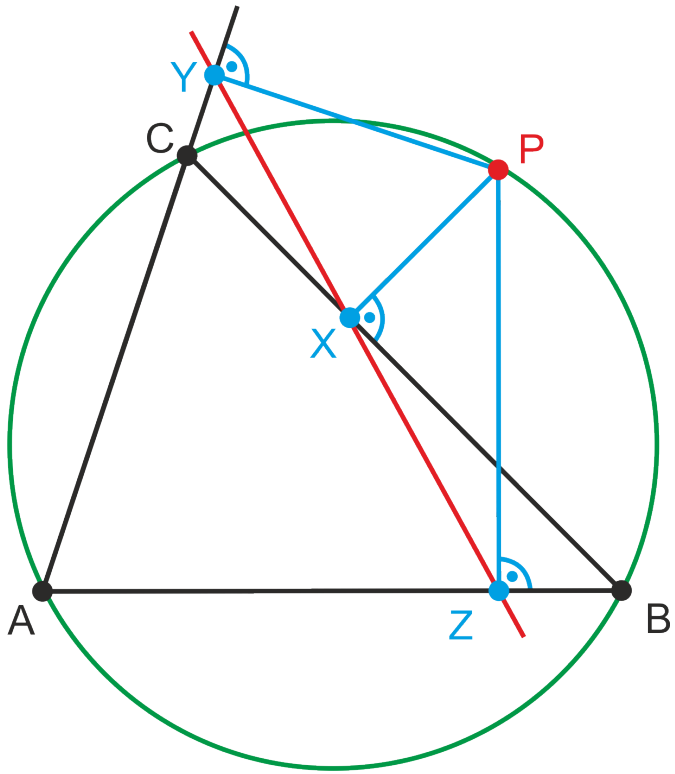
Outline

1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

Simsonova věta

Simsonova věta

Označme X, Y, Z paty kolmic vedených z bodu P na strany trojúhelníka ABC. Pak body X, Y, Z leží v přímce právě tehdy, když bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Této přímce se říká Simsonova přímka bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC.

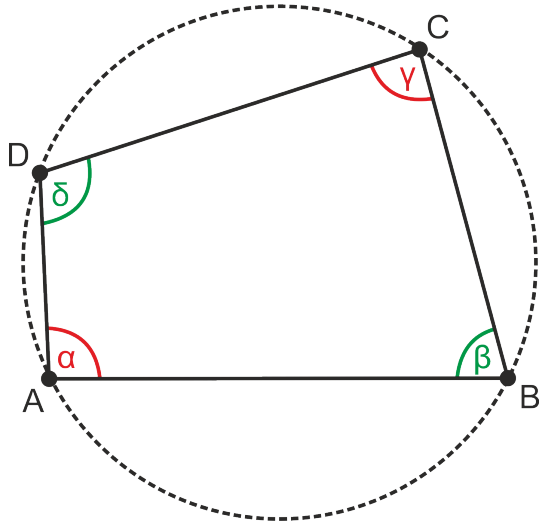


Tětivový čtyřúhelník

Věta 1

V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ s úhly u vrcholů A, B, C, D popořadě $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ platí:

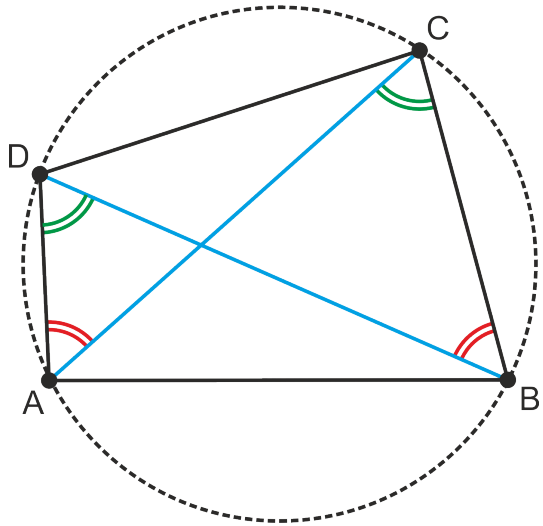
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi.$$



Věta 2

V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí:

$$\angle DAC = \angle DBC \quad \text{a} \quad \angle ADB = \angle ACB.$$



Simsonova věta – důkaz:

- Dokážeme, že $\delta = \angle ZXP + \angle YXP = \pi$
- Z Thaletovy věty je $BZXP$ tětivový:

$$\angle ZXP = \pi - \angle PBZ$$

- Z Thaletovy věty je $PXCY$ tětivový:

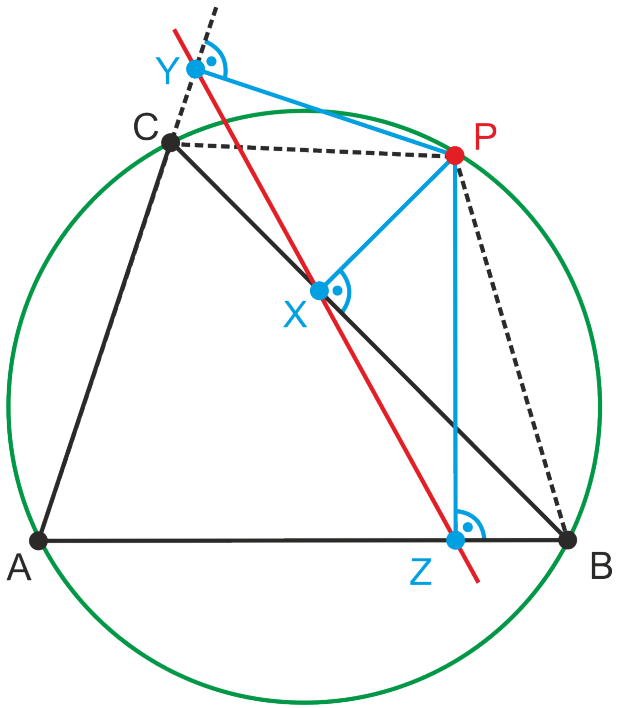
$$\angle YXP = \angle PCY = \pi - \angle ACP$$

- Z předpokladu věty je $ABPC$ tětivový

$$\angle ACP = \pi - \angle PBA$$

- pro $\delta = \angle ZXP + \angle YXP$ tedy dostáváme

$$\delta = (\pi - \angle PBA) + (\pi - (\pi - \angle PBA)) = \pi.$$



Simsonova věta – důkaz:

- Dokážeme, že $\delta = \angle ZXP + \angle YXP = \pi$
- Z Thaletovy věty je $BZXP$ tětivový:

$$\angle ZXP = \pi - \angle PBZ$$

- Z Thaletovy věty je $PXCY$ tětivový:

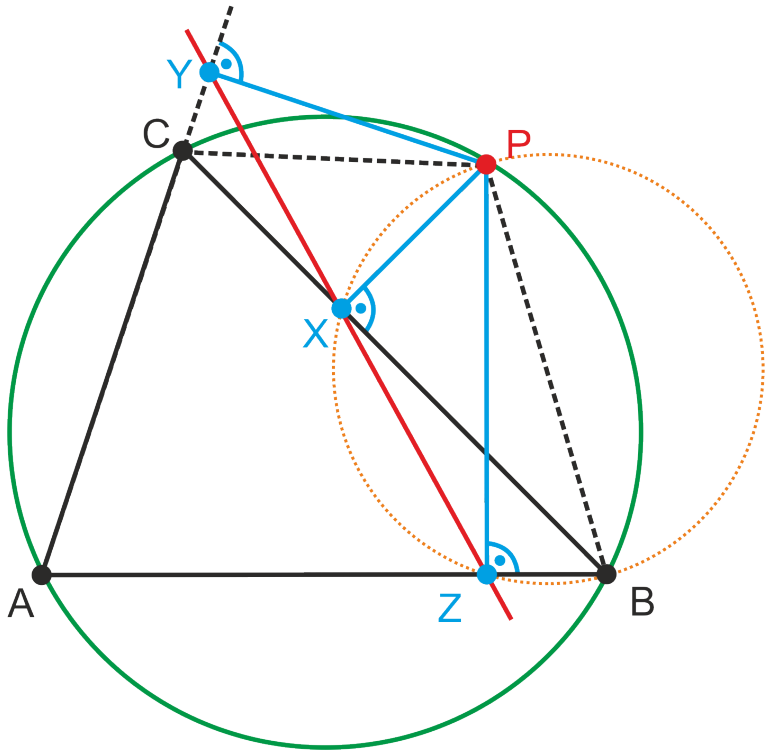
$$\angle YXP = \angle PCY = \pi - \angle ACP$$

- Z předpokladu věty je $ABPC$ tětivový

$$\angle ACP = \pi - \angle PBA$$

- pro $\delta = \angle ZXP + \angle YXP$ tedy dostáváme

$$\delta = (\pi - \angle PBA) + (\pi - (\pi - \angle PBA)) = \pi.$$



Simsonova věta – důkaz:

- Dokážeme, že $\delta = \angle ZXP + \angle YXP = \pi$
- Z Thaletovy věty je $BZXP$ tětivový:

$$\angle ZXP = \pi - \angle PBZ$$

- Z Thaletovy věty je $PXCY$ tětivový:

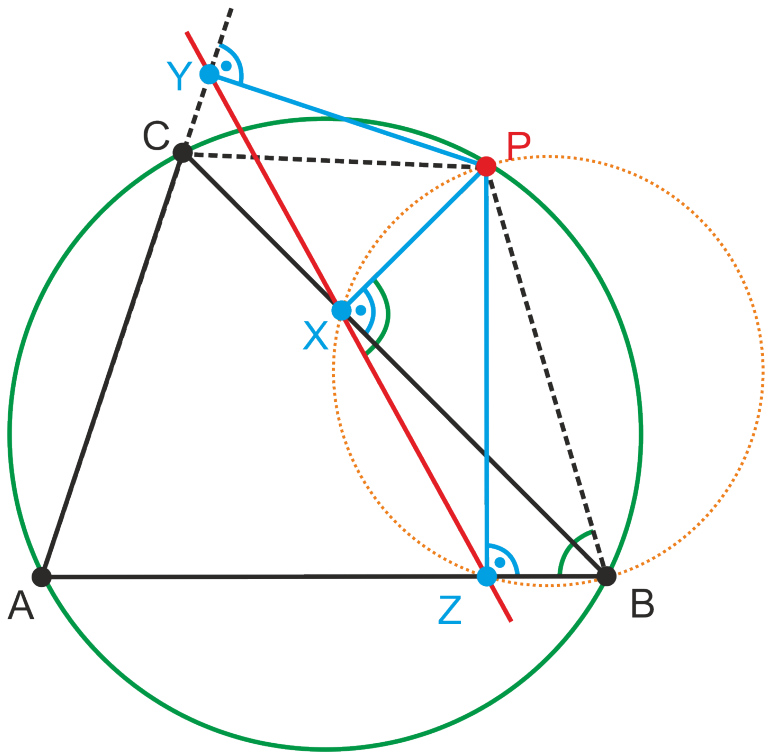
$$\angle YXP = \angle PCY = \pi - \angle ACP$$

- Z předpokladu věty je $ABPC$ tětivový

$$\angle ACP = \pi - \angle PBA$$

- pro $\delta = \angle ZXP + \angle YXP$ tedy dostáváme

$$\delta = (\pi - \angle PBA) + (\pi - (\pi - \angle PBA)) = \pi.$$



Simsonova věta – důkaz:

- Dokážeme, že $\delta = \angle ZXP + \angle YXP = \pi$
- Z Thaletovy věty je $BZXP$ tětivový:

$$\angle ZXP = \pi - \angle PBZ$$

- Z Thaletovy věty je $PXCY$ tětivový:

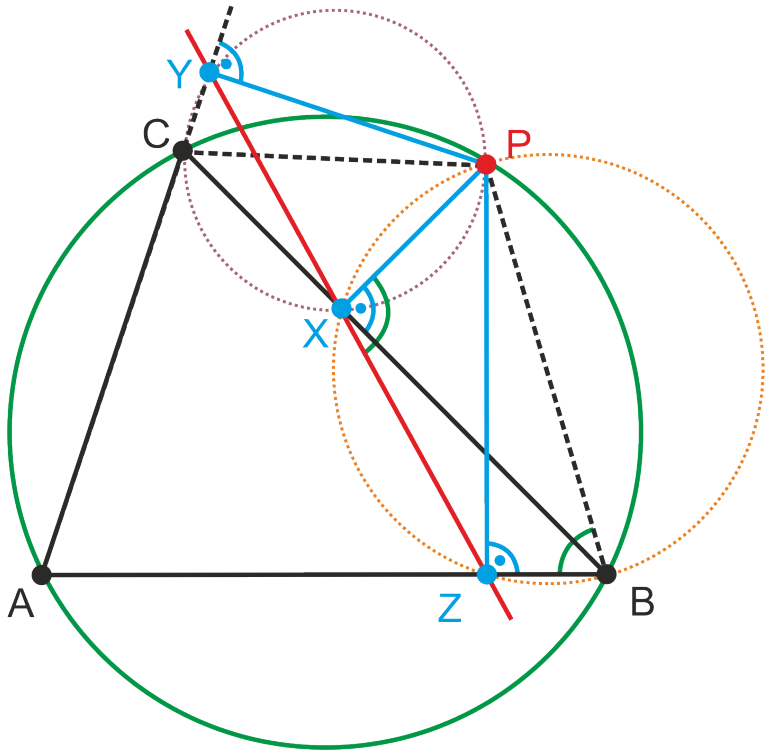
$$\angle YXP = \angle PCY = \pi - \angle ACP$$

- Z předpokladu věty je $ABPC$ tětivový

$$\angle ACP = \pi - \angle PBA$$

- pro $\delta = \angle ZXP + \angle YXP$ tedy dostáváme

$$\delta = (\pi - \angle PBA) + (\pi - (\pi - \angle PBA)) = \pi.$$



Simsonova věta – důkaz:

- Dokážeme, že $\delta = \angle ZXP + \angle YXP = \pi$
- Z Thaletovy věty je $BZXP$ tětivový:

$$\angle ZXP = \pi - \angle PBZ$$

- Z Thaletovy věty je $PXCY$ tětivový:

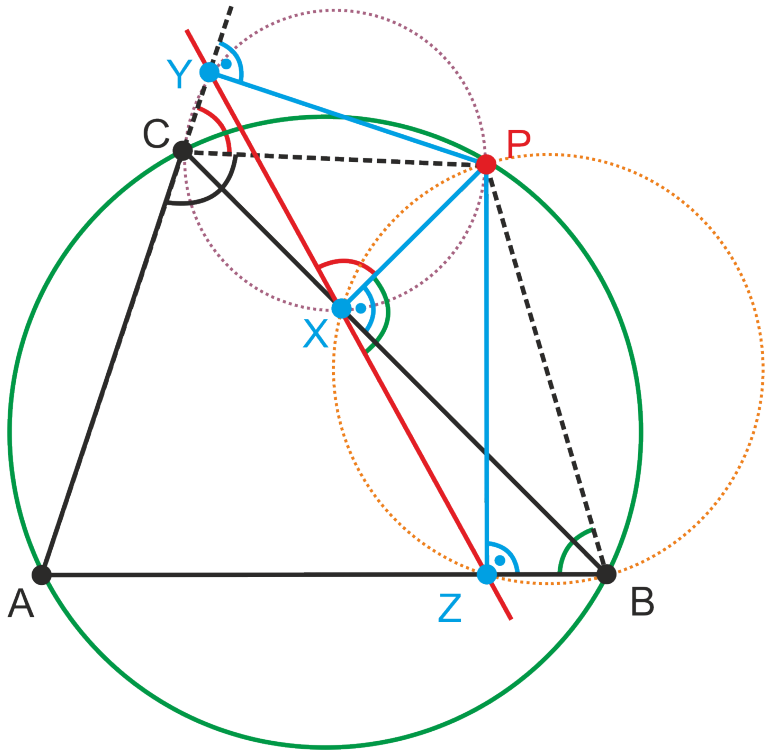
$$\angle YXP = \angle PCY = \pi - \angle ACP$$

- Z předpokladu věty je $ABPC$ tětivový

$$\angle ACP = \pi - \angle PBA$$

- pro $\delta = \angle ZXP + \angle YXP$ tedy dostáváme

$$\delta = (\pi - \angle PBA) + (\pi - (\pi - \angle PBA)) = \pi.$$



Simsonova věta – důkaz:

- Dokážeme, že $\delta = \angle ZXP + \angle YXP = \pi$
- Z Thaletovy věty je $BZXP$ tětivový:

$$\angle ZXP = \pi - \angle PBZ$$

- Z Thaletovy věty je $PXCY$ tětivový:

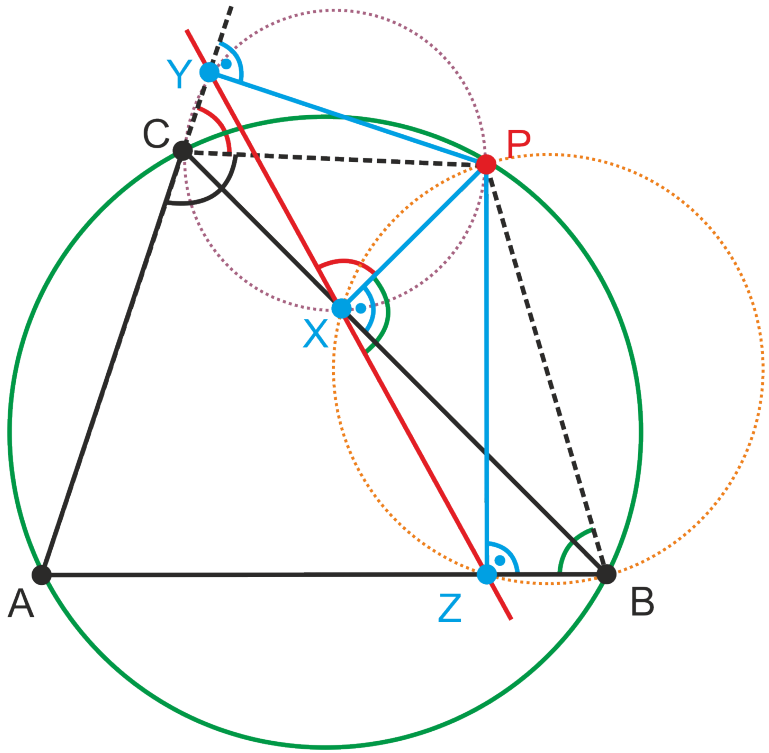
$$\angle YXP = \angle PCY = \pi - \angle ACP$$

- Z předpokladu věty je $ABPC$ tětivový

$$\angle ACP = \pi - \angle PBA$$

- pro $\delta = \angle ZXP + \angle YXP$ tedy dostáváme

$$\delta = (\pi - \angle PBA) + (\pi - (\pi - \angle PBA)) = \pi.$$



Simsonova věta – důkaz:

- Dokážeme, že $\delta = \angle ZXP + \angle YXP = \pi$
- Z Thaletovy věty je $BZXP$ tětivový:

$$\angle ZXP = \pi - \angle PBZ$$

- Z Thaletovy věty je $PXCY$ tětivový:

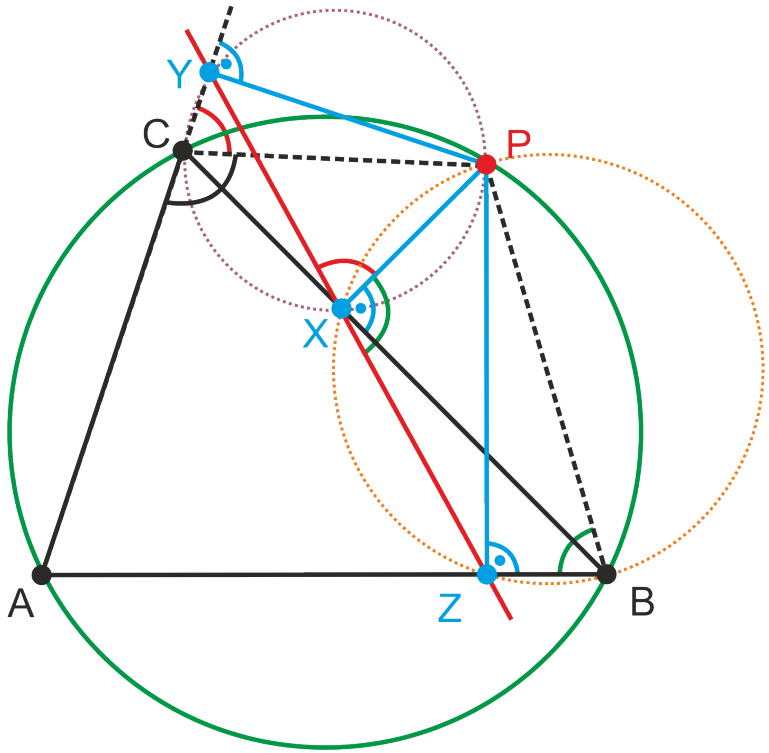
$$\angle YXP = \angle PCY = \pi - \angle ACP$$

- Z předpokladu věty je $ABPC$ tětivový

$$\angle ACP = \pi - \angle PBA$$

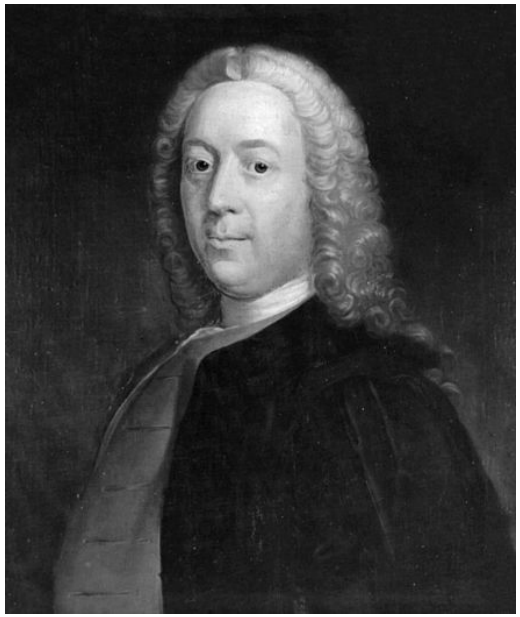
- pro $\delta = \angle ZXP + \angle YXP$ tedy dostáváme

$$\delta = (\pi - \angle PBA) + (\pi - (\pi - \angle PBA)) = \pi.$$



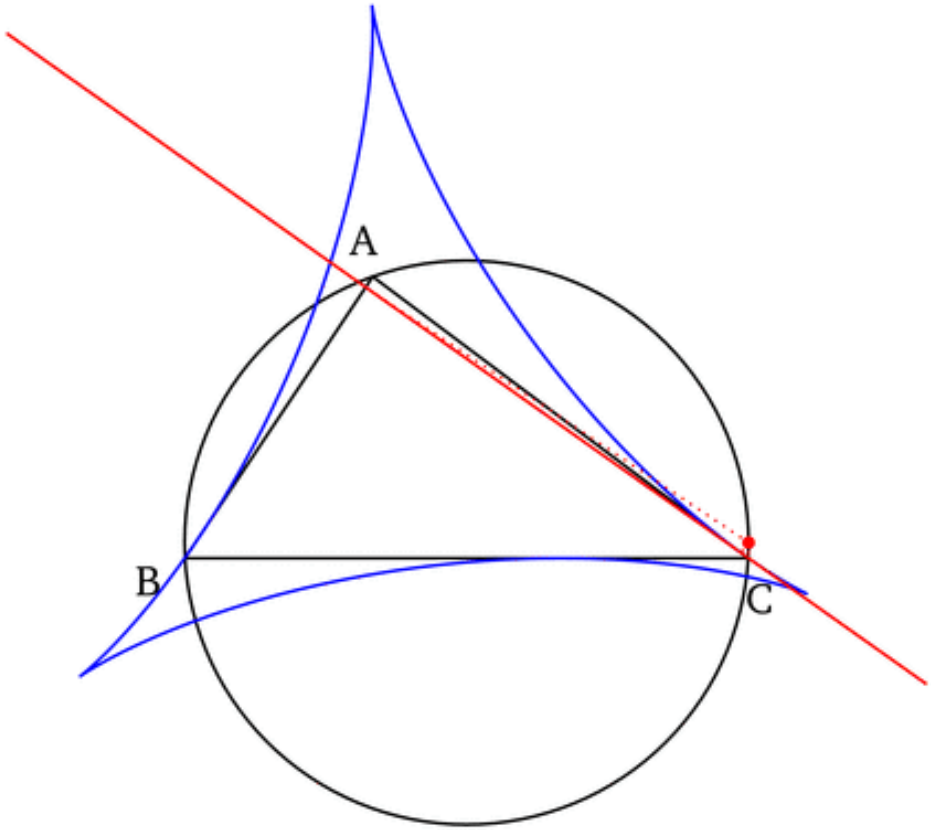
Robert Simson

- 1687 – 1768
- britský matematik
- měl nastoupit církevní dráhu, ale převládl jeho zájem o matematiku
- roku 1711 se v Glasgow stal profesorem matematiky



Steinerův deltoid:

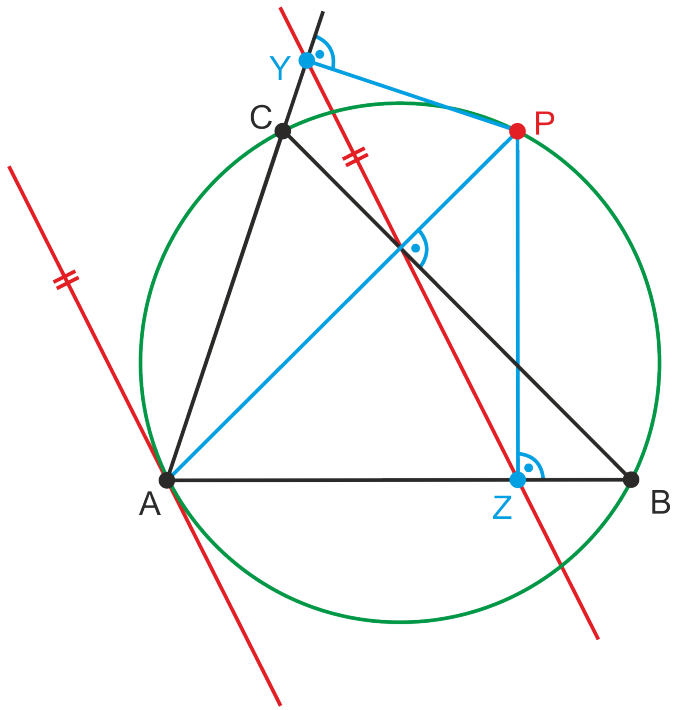
- Množina všech Simsonovo přímek tvoří obálku křivky, která se nazývá Steinerův deltoid



Úloha na Simsonovu větu

Úloha 1

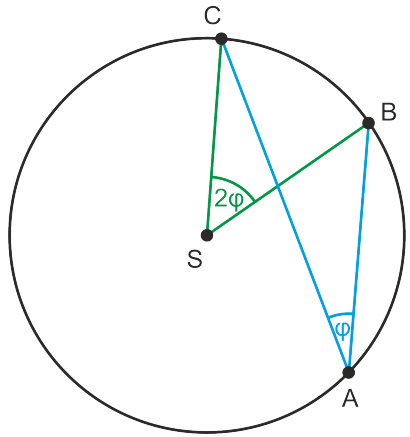
Výška v_A protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ v bodě P. Označme Y, Z paty kolmic vedených z bodu P na strany AC a AB. Dokažte, že přímka YZ je rovnoběžná s tečnou t_A kružnice opsané $\triangle ABC$ v bodě A.



Věta - Úhly vepsané kružnici:

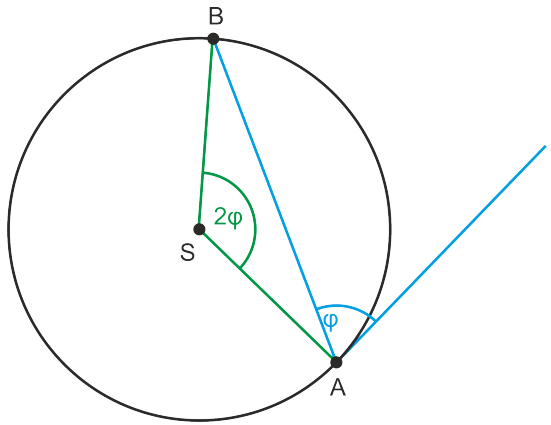
Věta (úhly vepsané kružnici)

Velikost úhlu vepsaného kružnici je polovinou velikosti patřičného obloukového úhlu.



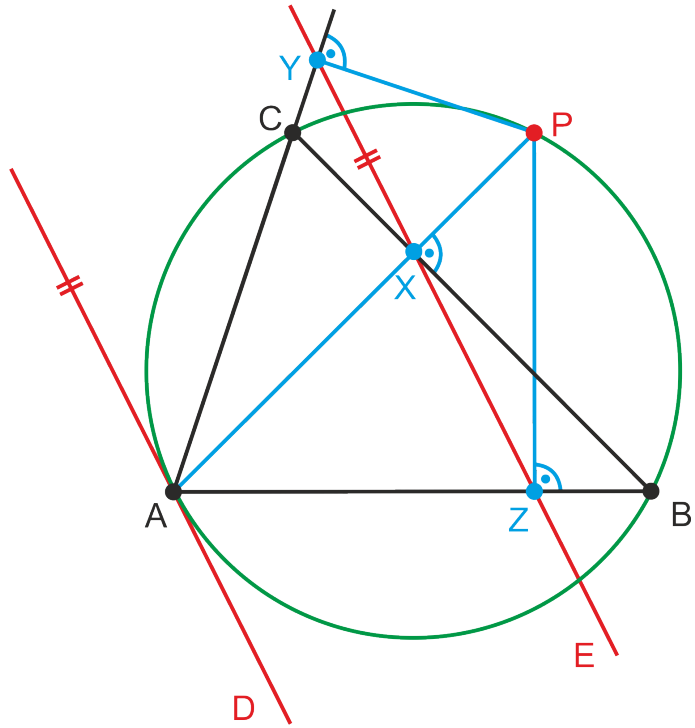
Věta (úhly vepsané kružnici – tečna s sečna)

Velikost úhlu tvořeného sečnou a tečnou je polovinou velikosti patřičného obloukového úhlu.



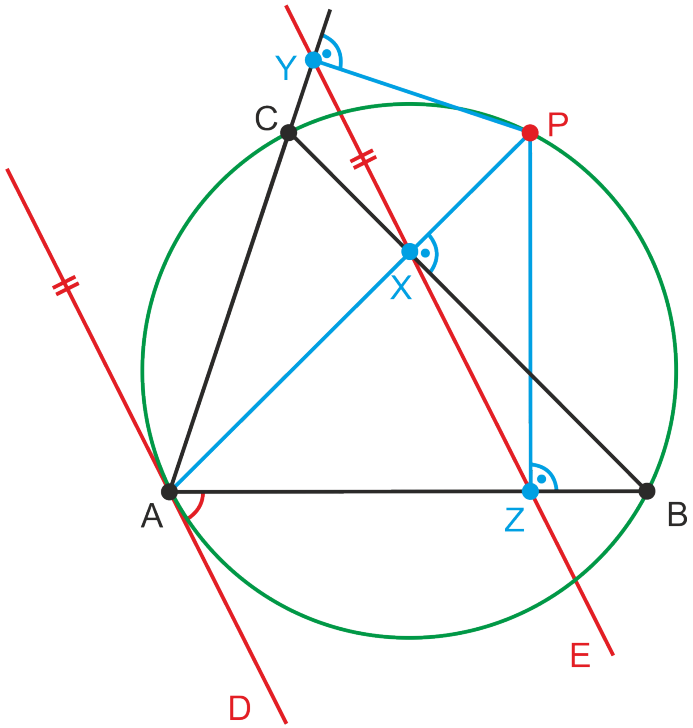
Úloha na Simsonovu větu – řešení:

- bod P leží na kružnici opsané $\Rightarrow$ (Simsonova věta) bod X leží na přímce YZ
- Chceme ukázat, že $ZX \parallel DA$, neboli $\angle DAZ = \angle EZB$
- Z Thaletovy věty víme, že čtyřúhelník $XZPG$ je tětivový.
- Z věty o úhlu vepsaného kružnici víme, že $\angle DAB = \angle APB$
- Z toho, že čtyřúhelník $XZBP$ je tětivový víme, že $\angle XPB + \angle XZB = \pi$
- Z toho dostáváme $\angle DAZ = \angle EZB$



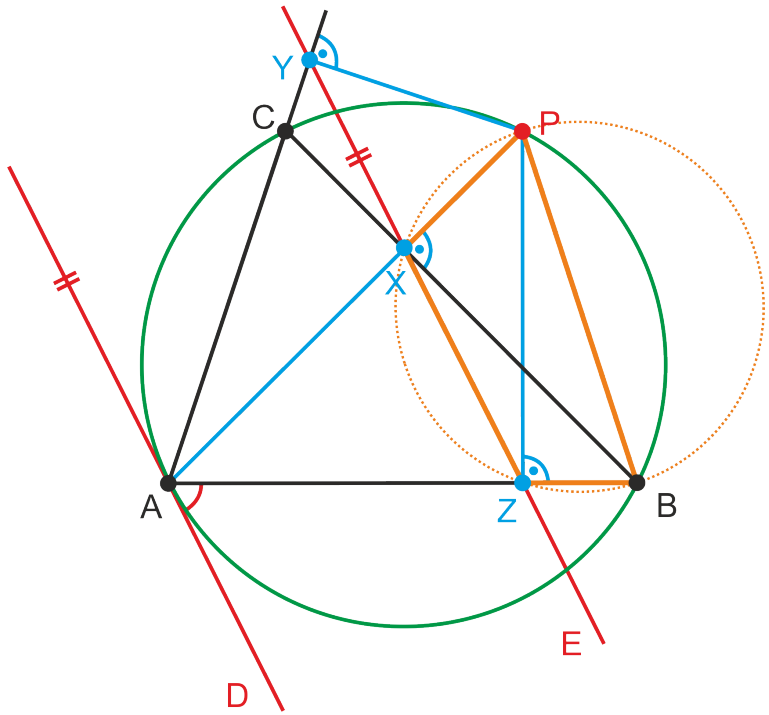
Úloha na Simsonovu větu – řešení:

- bod P leží na kružnici opsané $\Rightarrow$ (Simsonova věta) bod X leží na přímce YZ
- Chceme ukázat, že $ZX \parallel DA$, neboli $\angle DAZ = \angle EZB$
- Z Thaletovy věty víme, že čtyřúhelník $XZPG$ je tětivový.
- Z věty o úhlu vepsaného kružnici víme, že $\angle DAB = \angle APB$
- Z toho, že čtyřúhelník $XZBP$ je tětivový víme, že $\angle XPB + \angle XZB = \pi$
- Z toho dostáváme $\angle DAZ = \angle EZB$



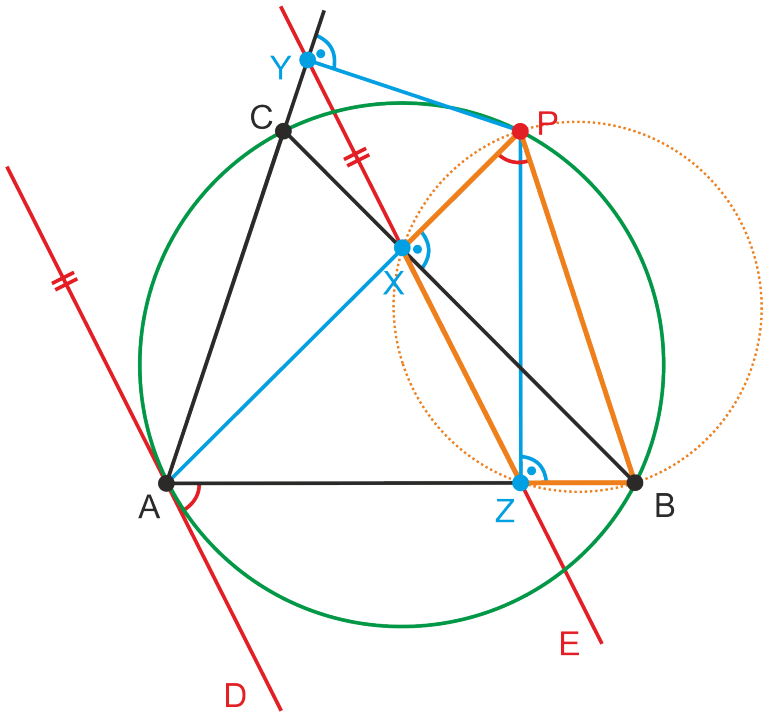
Úloha na Simsonovu větu – řešení:

- bod P leží na kružnici opsané $\Rightarrow$ (Simsonova věta) bod X leží na přímce YZ
- Chceme ukázat, že $ZX \parallel DA$, neboli $\angle DAZ = \angle EZB$
- Z Thaletovy věty víme, že čtyřúhelník $XZPG$ je tětivový.
- Z věty o úhlu vepsaného kružnici víme, že $\angle DAB = \angle APB$
- Z toho, že čtyřúhelník $XZBP$ je tětivový víme, že $\angle XPB + \angle XZB = \pi$
- Z toho dostáváme $\angle DAZ = \angle EZB$



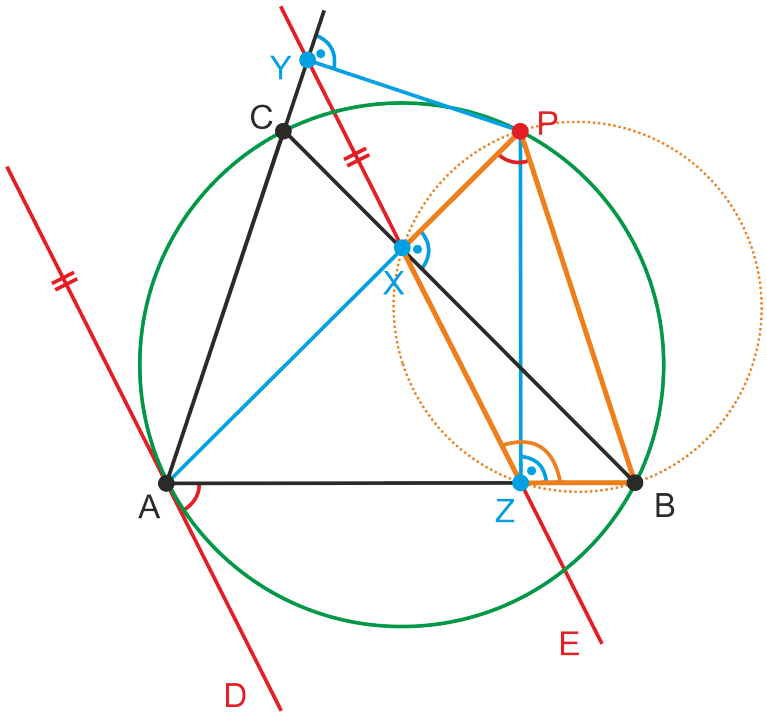
Úloha na Simsonovu větu – řešení:

- bod P leží na kružnici opsané $\Rightarrow$ (Simsonova věta) bod X leží na přímce YZ
- Chceme ukázat, že $ZX \parallel DA$, neboli $\angle DAZ = \angle EZB$
- Z Thaletovy věty víme, že čtyřúhelník $XZPG$ je tětivový.
- Z věty o úhlu vepsaného kružnici víme, že $\angle DAB = \angle APB$
- Z toho, že čtyřúhelník $XZBP$ je tětivový víme, že $\angle XPB + \angle XZB = \pi$
- Z toho dostáváme $\angle DAZ = \angle EZB$



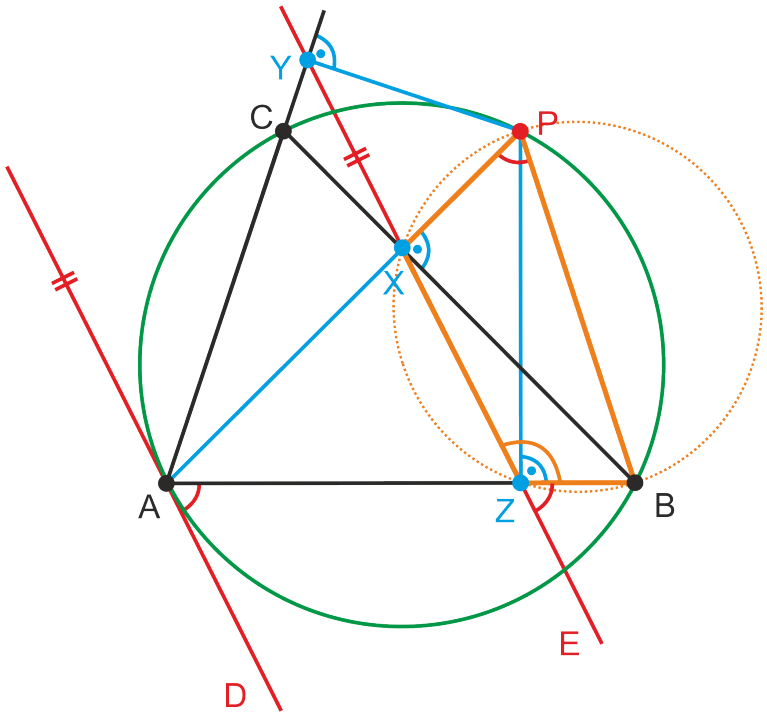
Úloha na Simsonovu větu – řešení:

- bod P leží na kružnici opsané $\Rightarrow$ (Simsonova věta) bod X leží na přímce YZ
- Chceme ukázat, že $ZX \parallel DA$, neboli $\angle DAZ = \angle EZB$
- Z Thaletovy věty víme, že čtyřúhelník $XZPG$ je tětivový.
- Z věty o úhlu vepsaného kružnici víme, že $\angle DAB = \angle APB$
- Z toho, že čtyřúhelník $XZBP$ je tětivový víme, že $\angle XPB + \angle XZB = \pi$
- Z toho dostáváme $\angle DAZ = \angle EZB$



Úloha na Simsonovu větu – řešení:

- bod P leží na kružnici opsané $\Rightarrow$ (Simsonova věta) bod X leží na přímce YZ
- Chceme ukázat, že $ZX \parallel DA$, neboli $\angle DAZ = \angle EZB$
- Z Thaletovy věty víme, že čtyřúhelník $XZPG$ je tětivový.
- Z věty o úhlu vepsaného kružnici víme, že $\angle DAB = \angle APB$
- Z toho, že čtyřúhelník $XZBP$ je tětivový víme, že $\angle XPB + \angle XZB = \pi$
- Z toho dostáváme $\angle DAZ = \angle EZB$



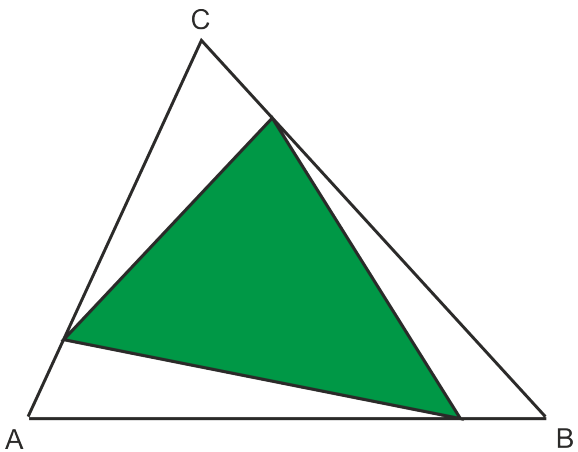
Outline

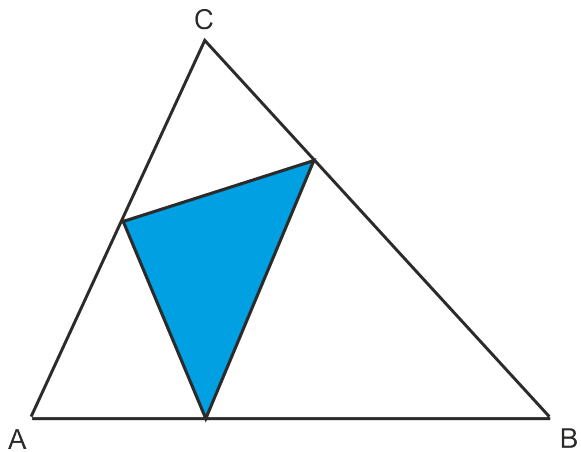
1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

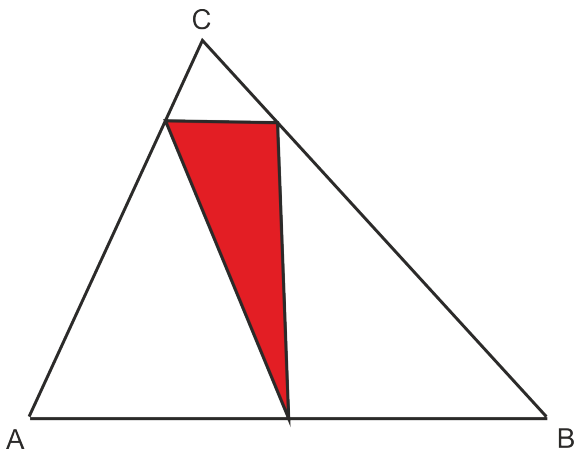
Fagnanův problém

Fagnanův problém (1775)

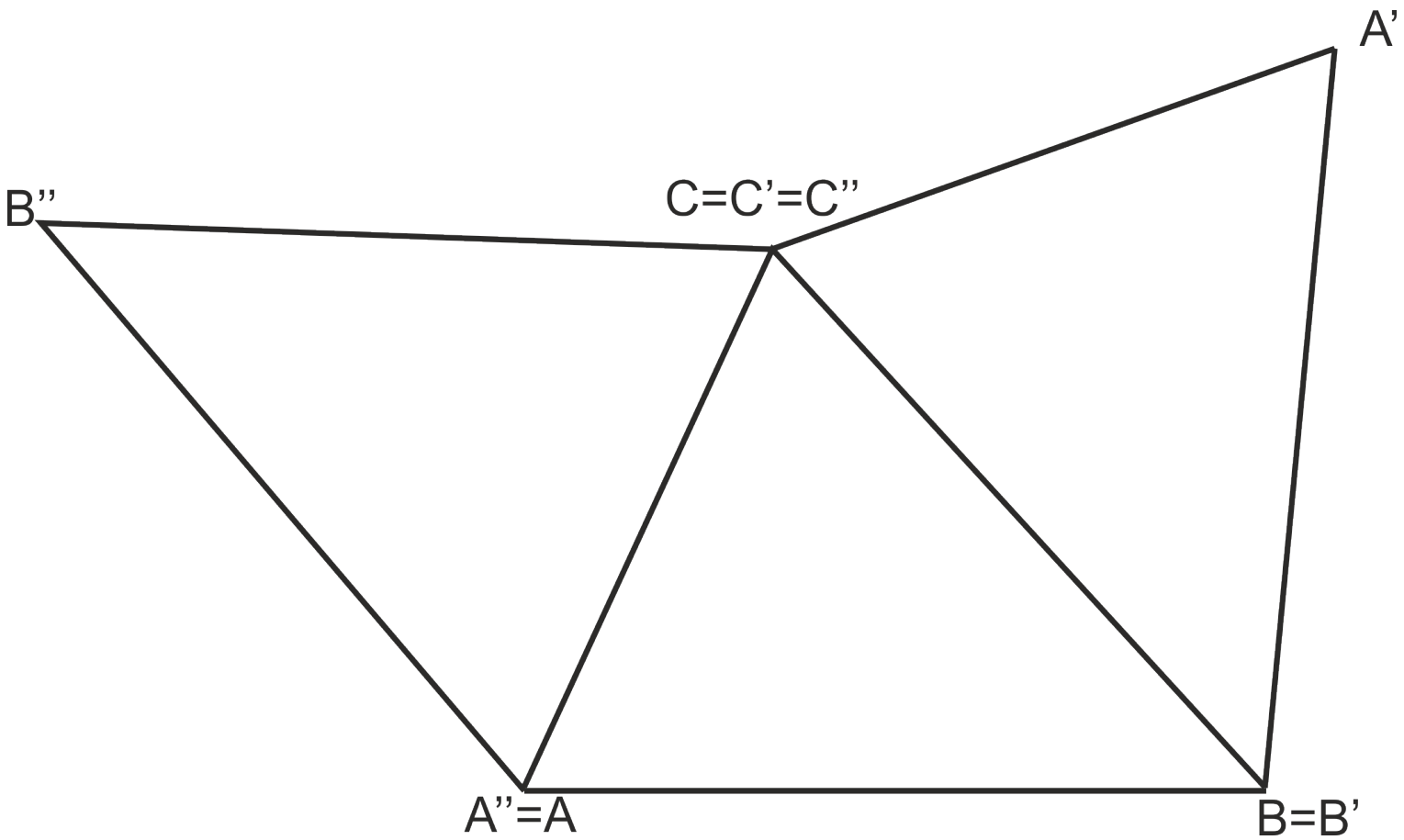
Do daného ostroúhlého trojúhelníku vepište trojúhelník o minimálním obvodu.



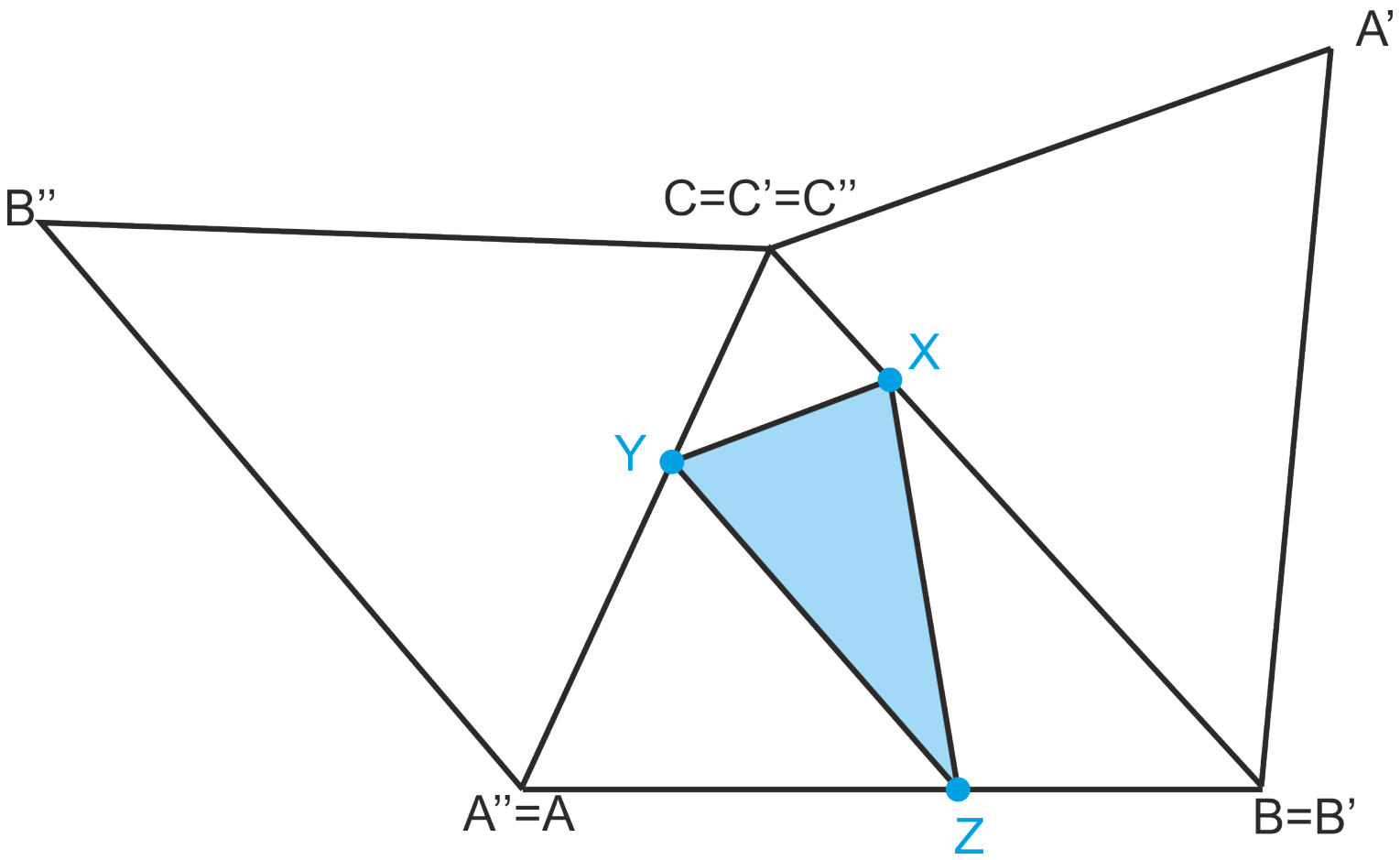




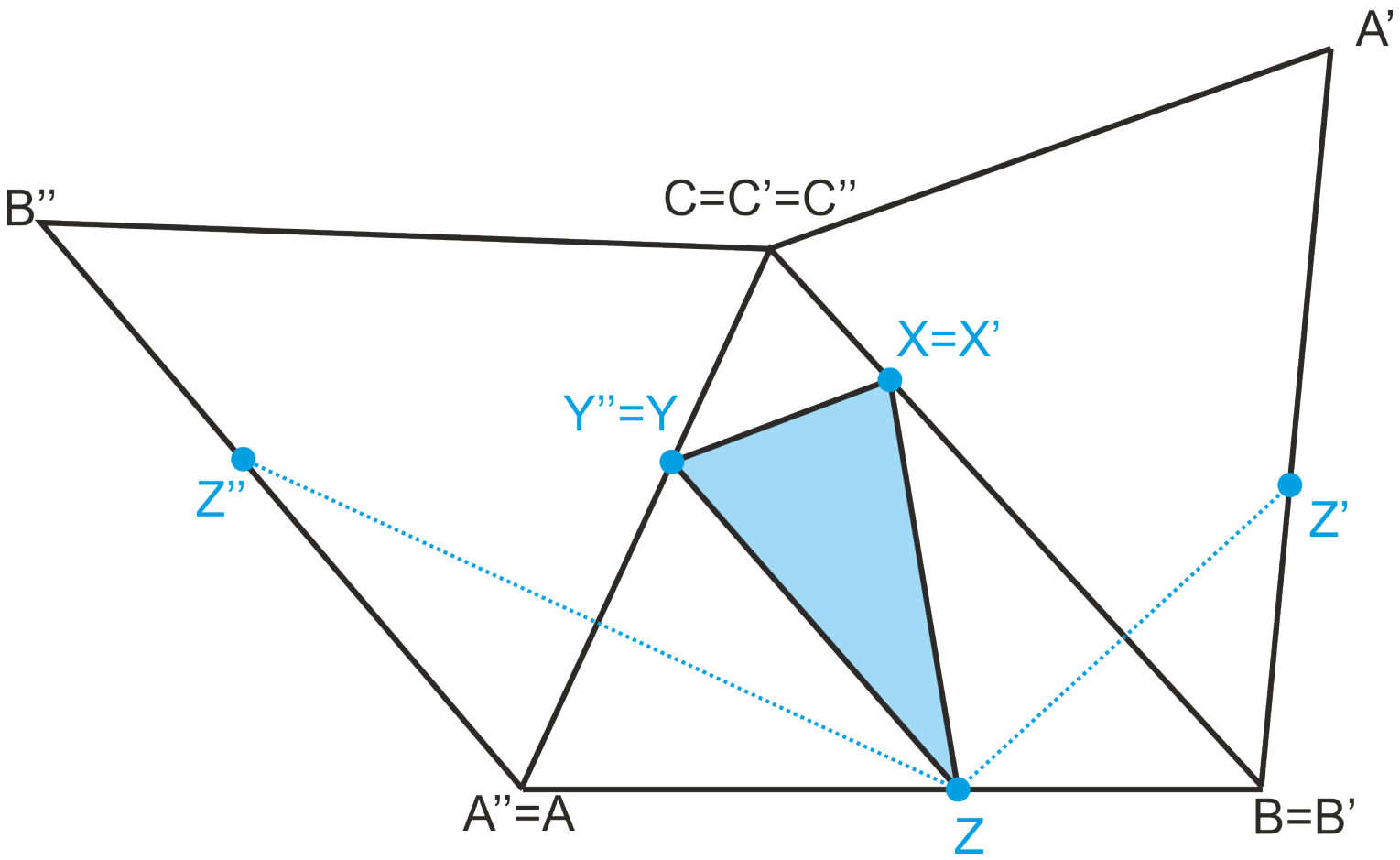
Fagnanův problém – řešení:



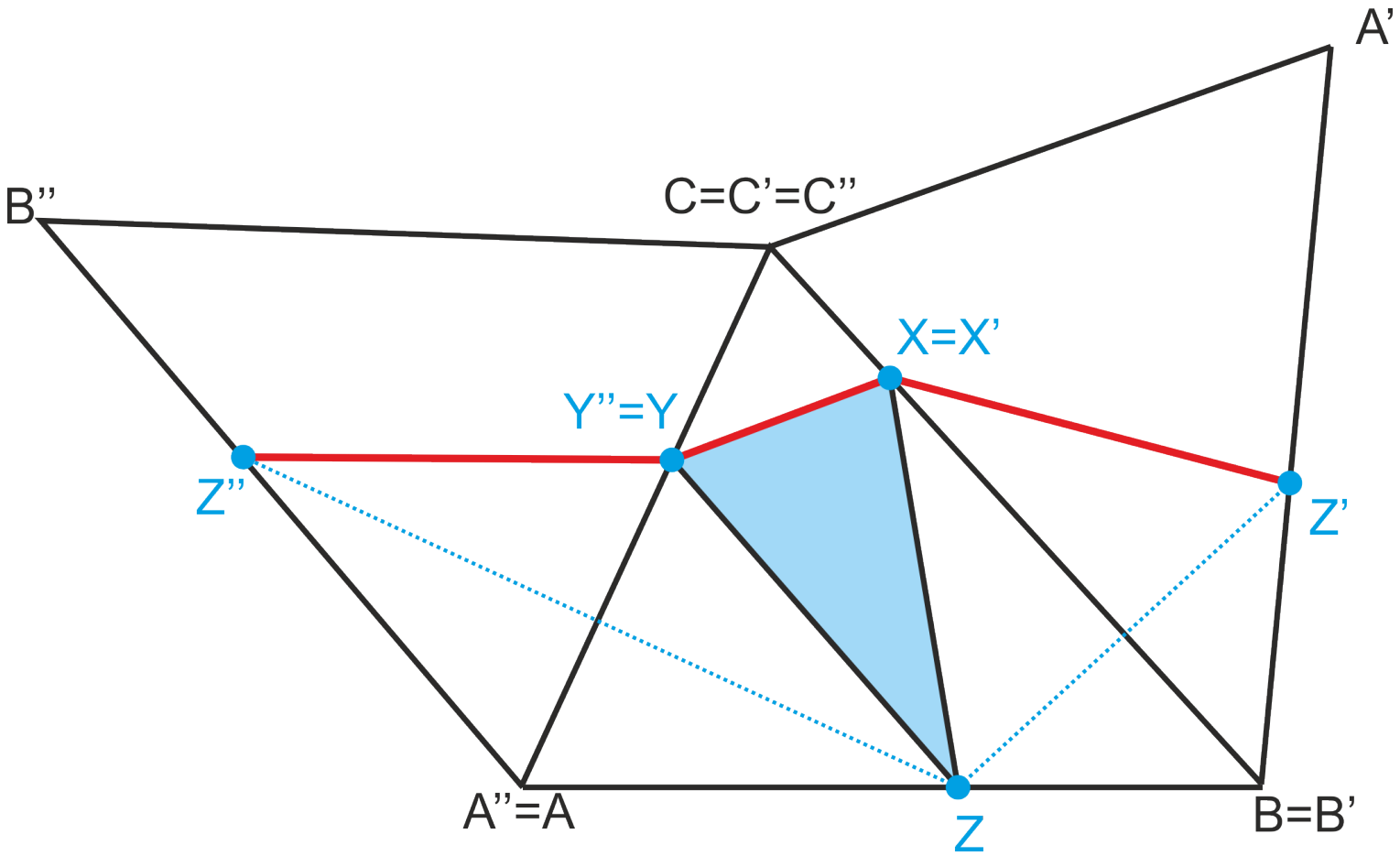
Fagnanův problém – řešení:



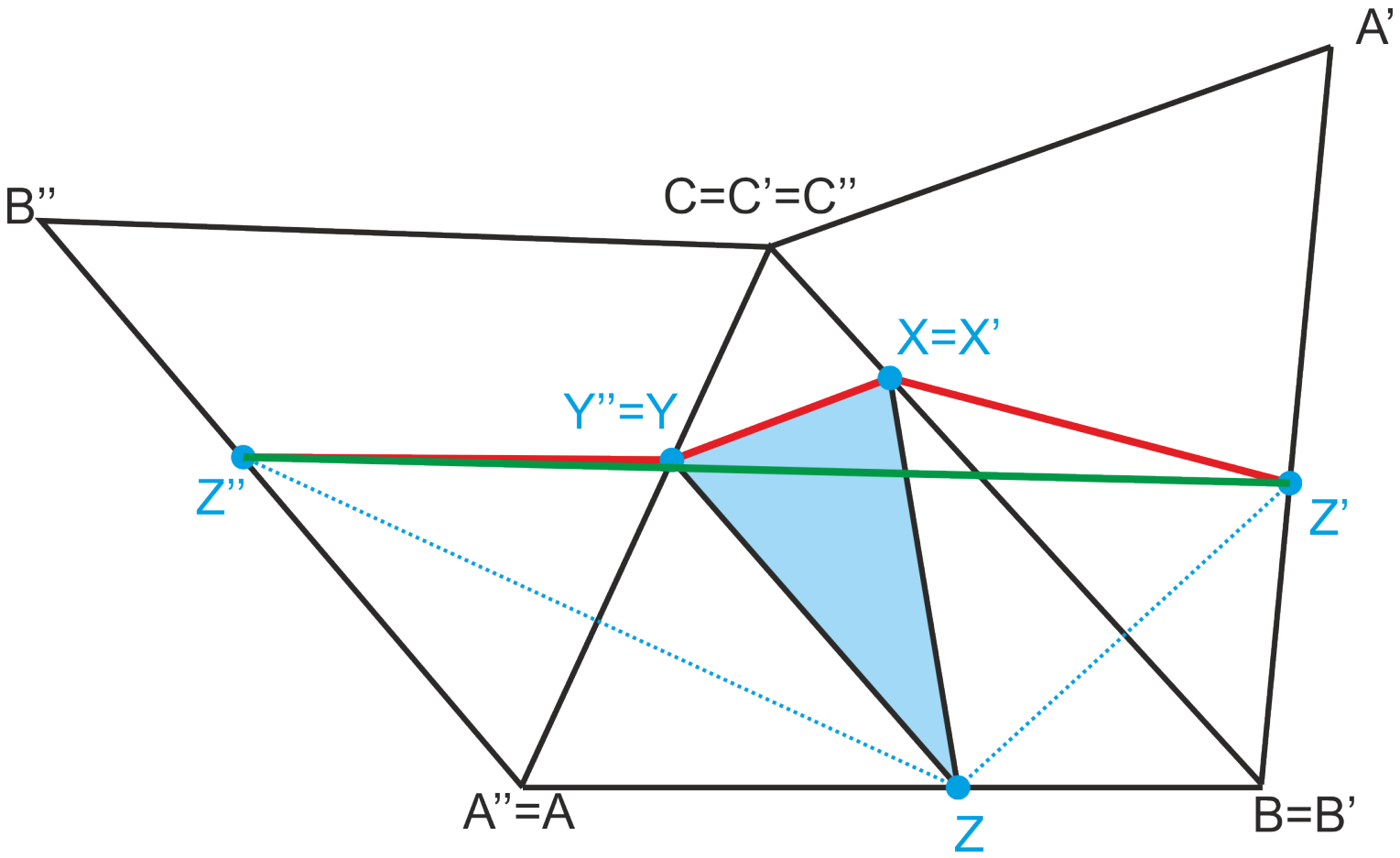
Fagnanův problém – řešení:



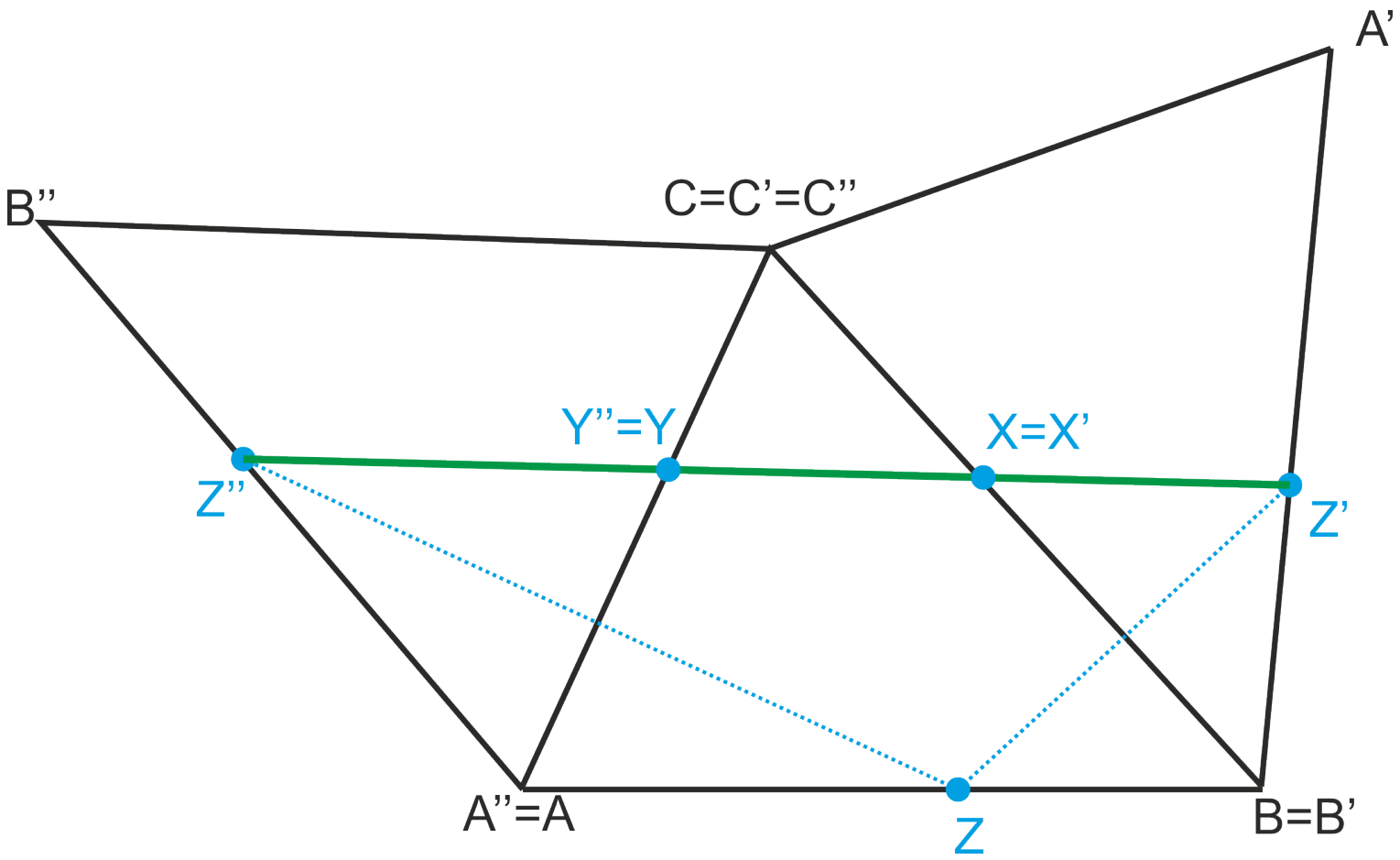
Fagnanův problém – řešení:



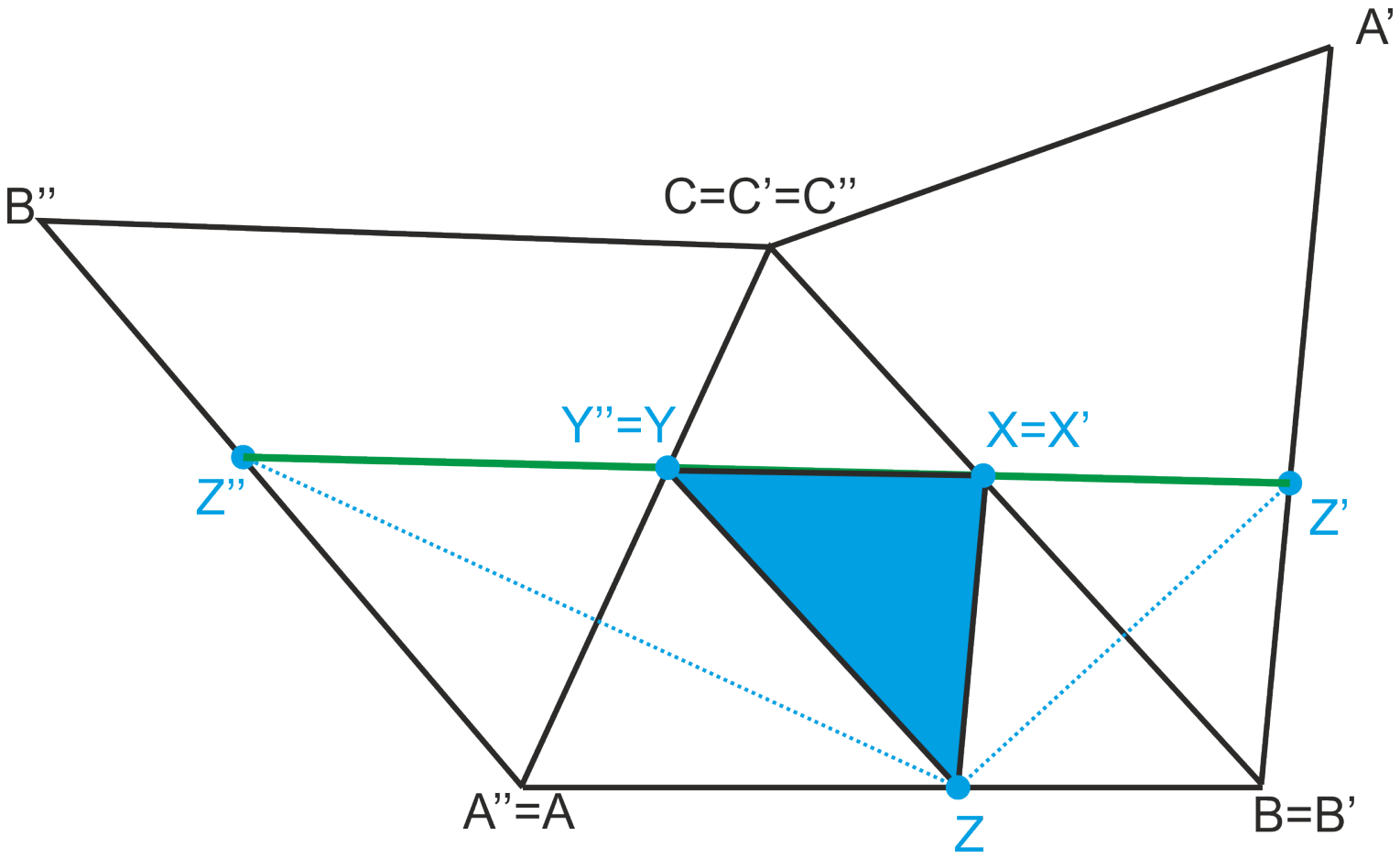
Fagnanův problém – řešení:



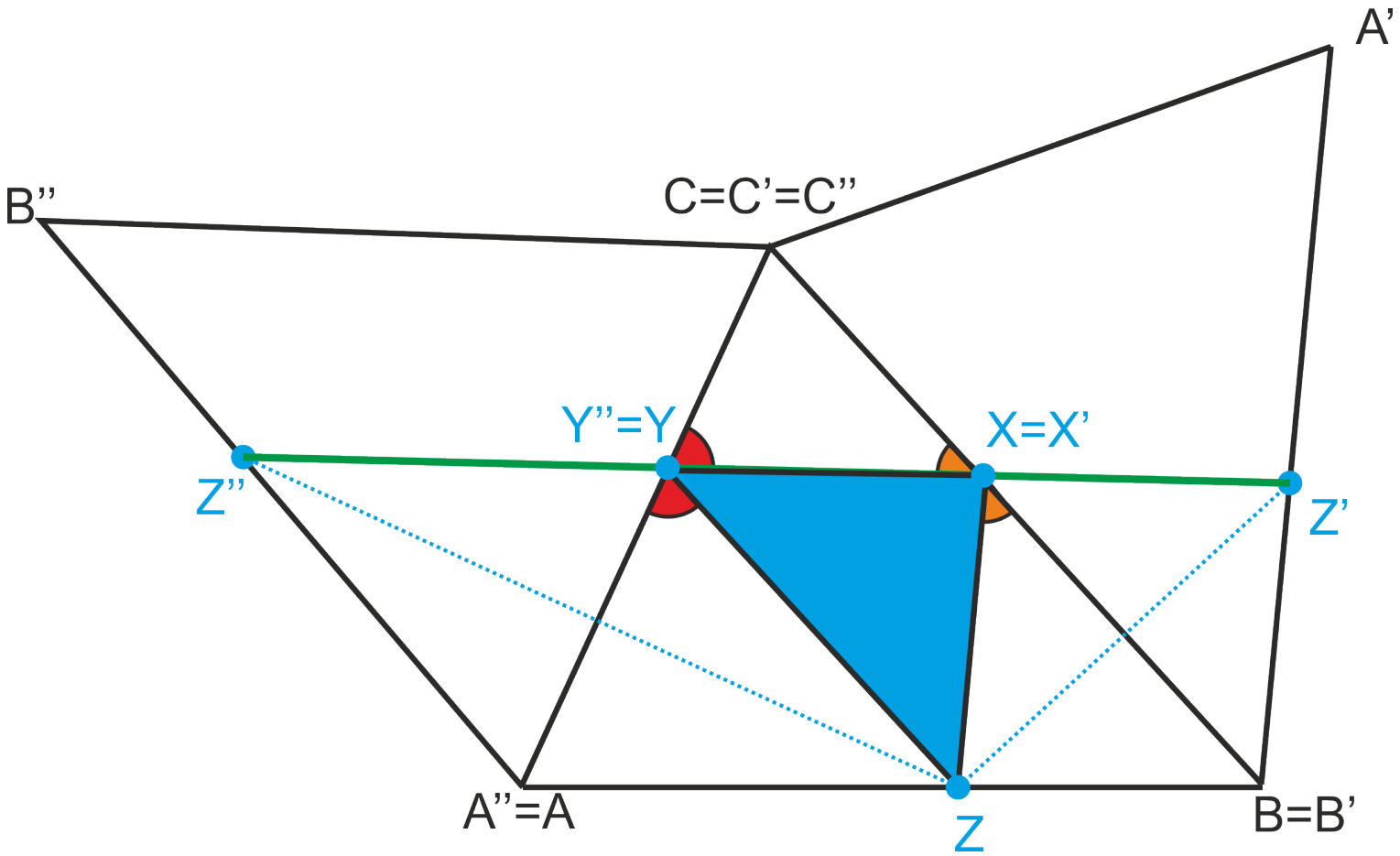
Fagnanův problém – řešení:



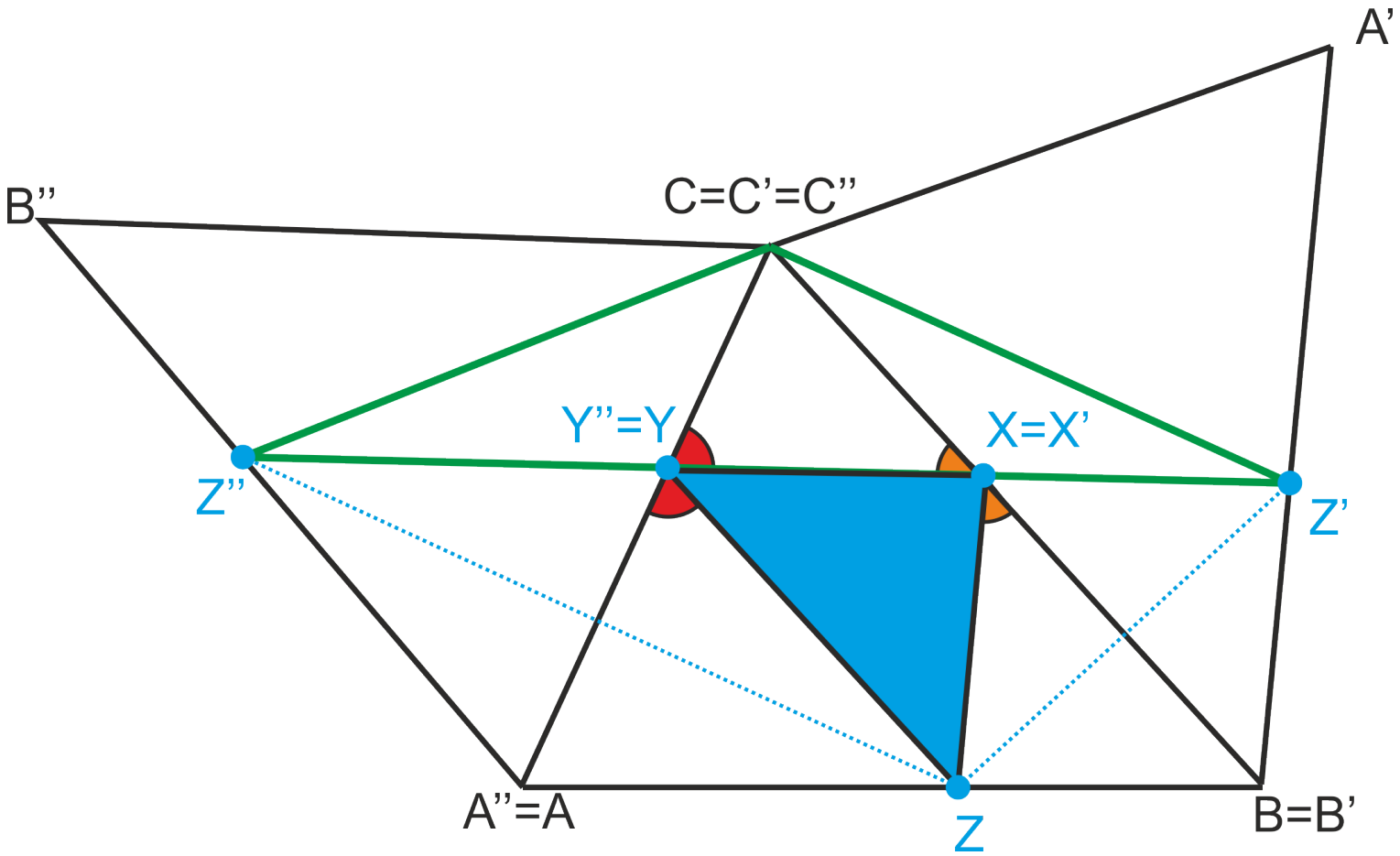
Fagnanův problém – řešení:



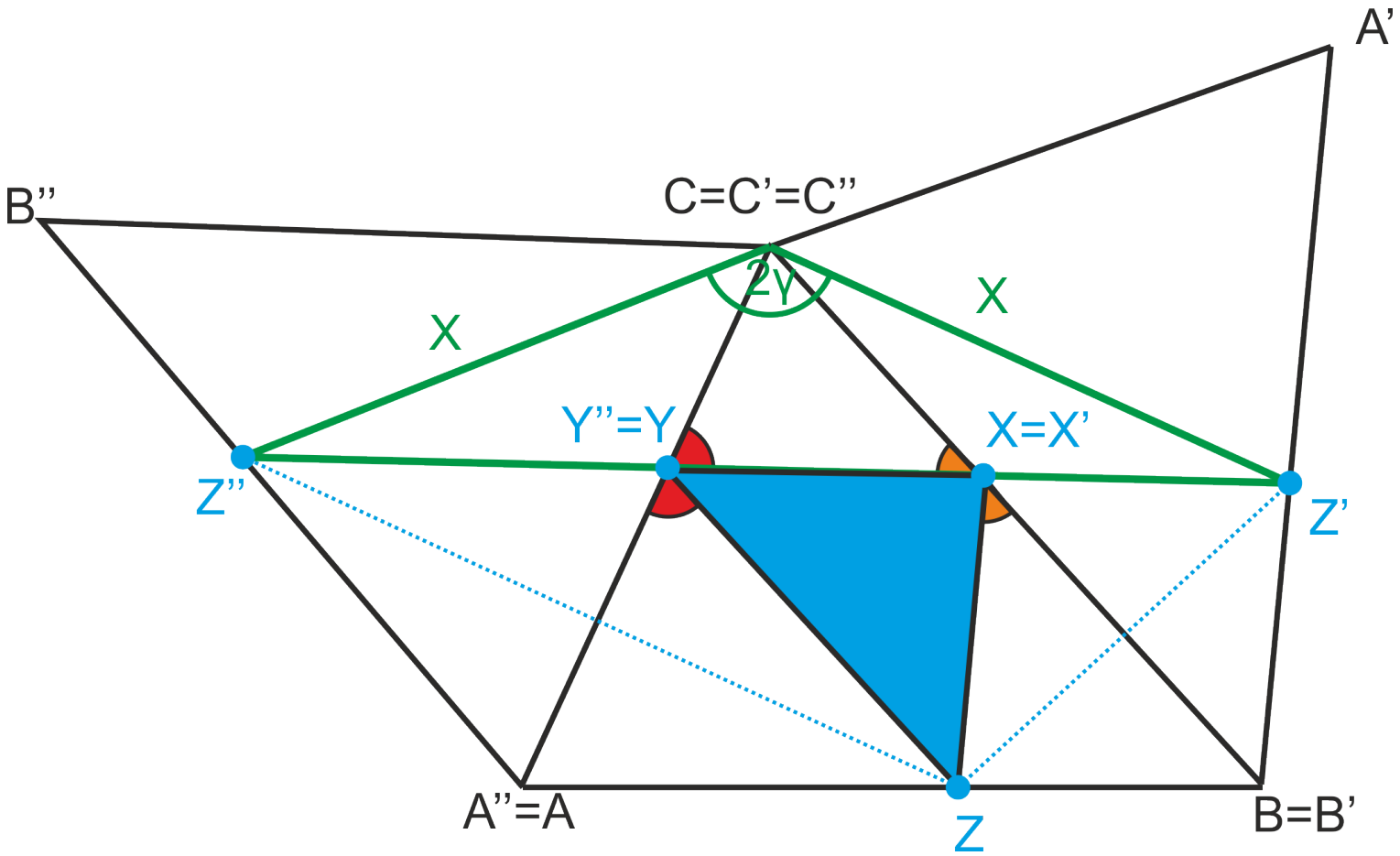
Fagnanův problém – řešení:



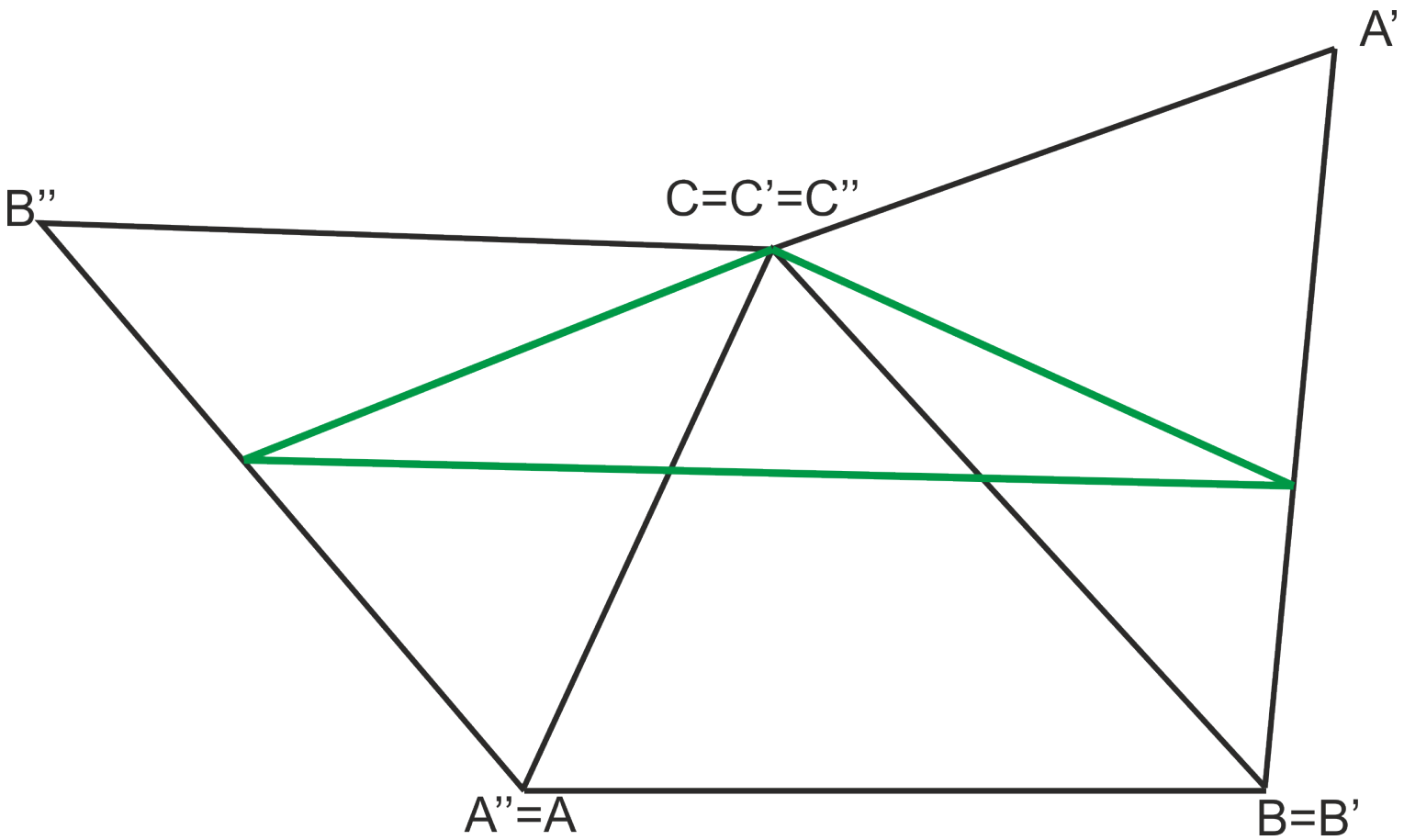
Fagnanův problém – řešení:



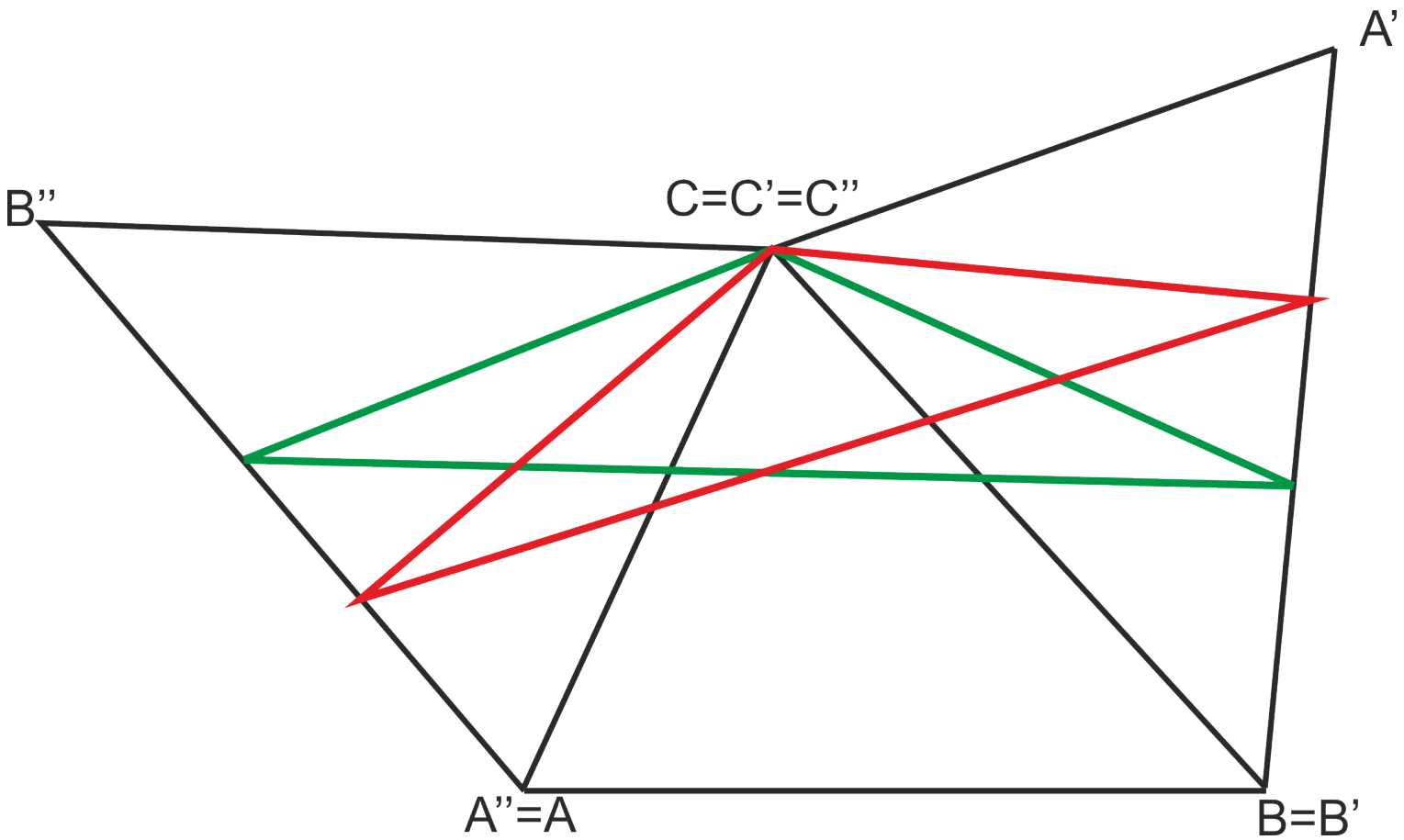
Fagnanův problém – řešení:



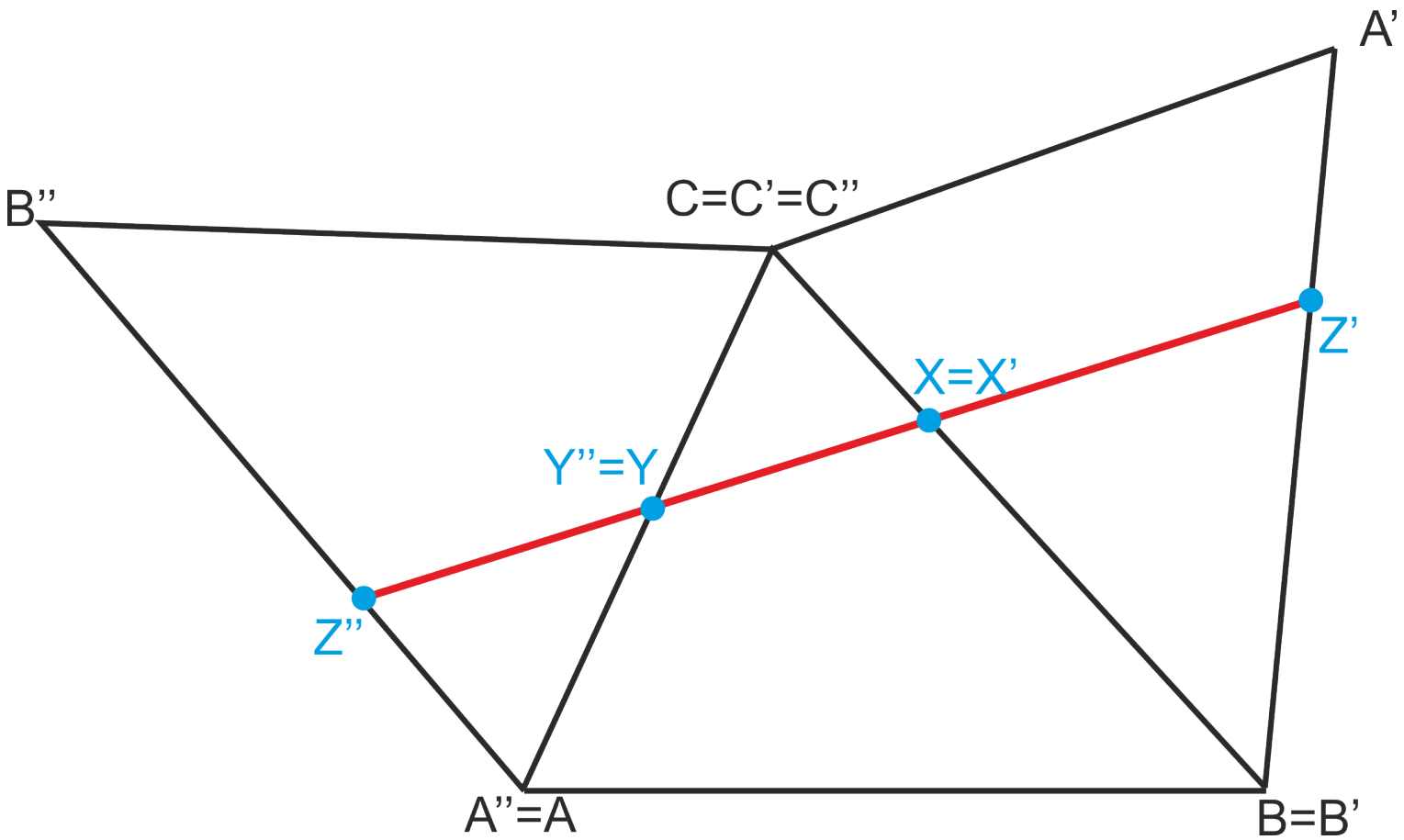
Fagnanův problém – řešení:



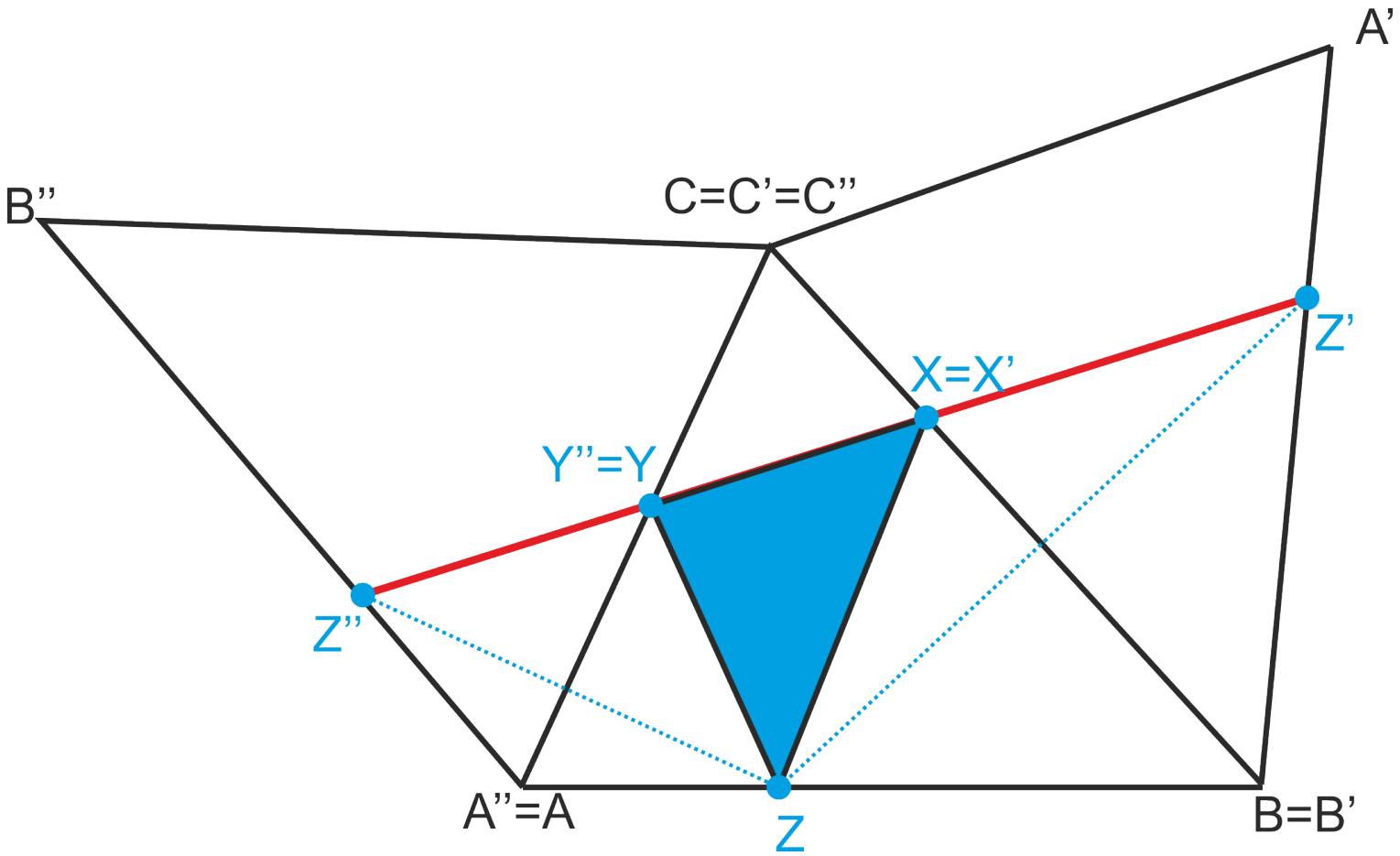
Fagnanův problém – řešení:



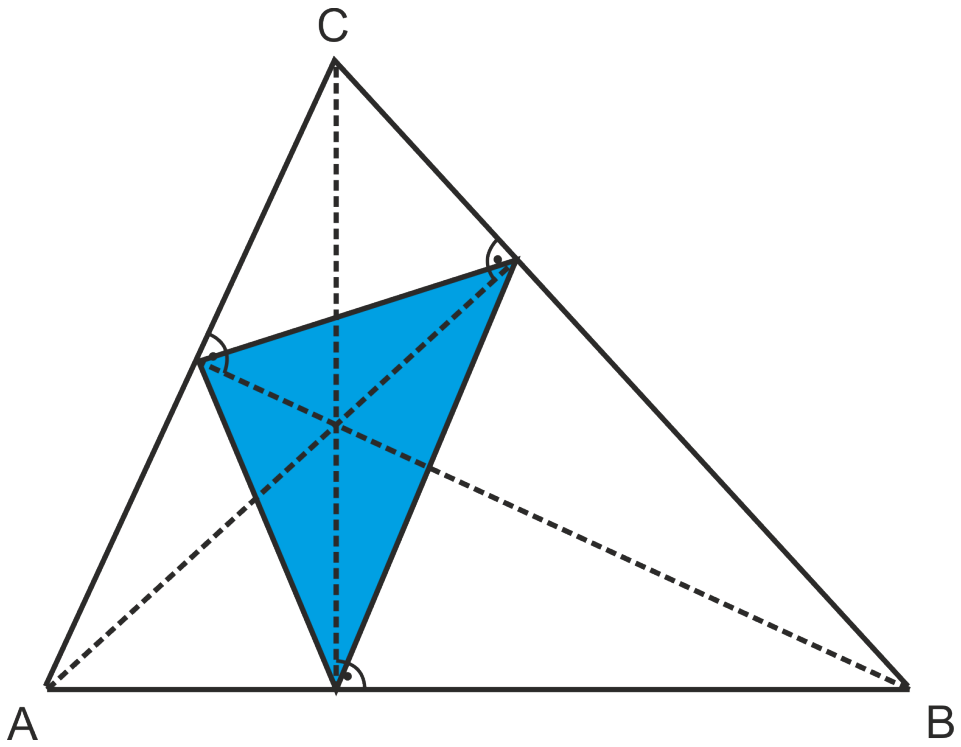
Fagnanův problém – řešení:



Fagnanův problém – řešení:



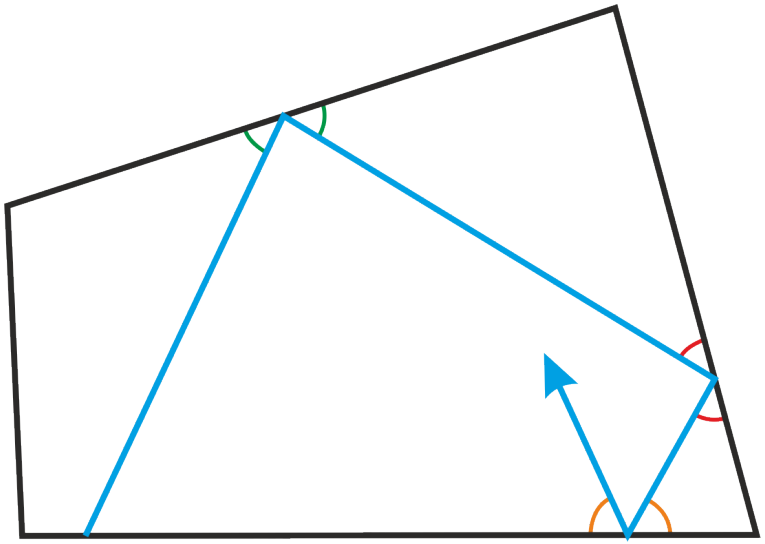
Fagnanův problém – řešení:



Billiards in a polygon

Uvažujme karambolový stůl ve tvaru mnohoúhelníku a ideální kulečníkovou kouli, která se od stěn odráží podle optického pravidla: úhel dopadu se rovná úhlu odrazu. Předpokládáme, že hmota koule je soustředěná do jednoho bodu a zanedbáváme tření a rotace.

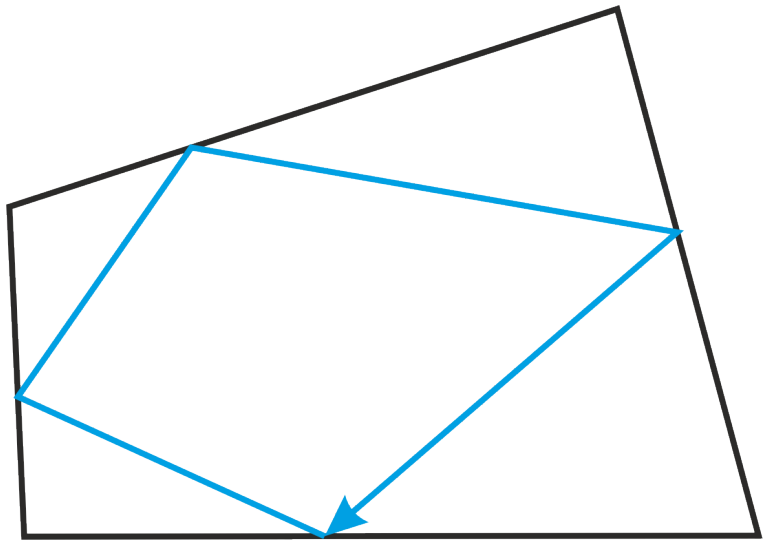
- studují se regulární trajektorie
- speciálně periodické trajektorie



Billiards in a polygon

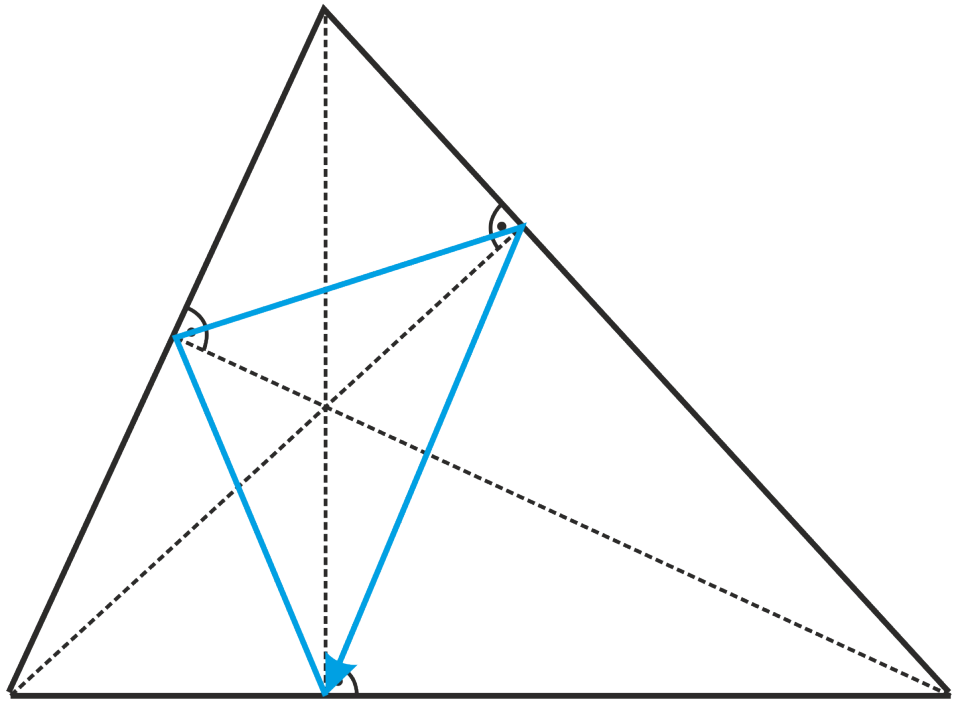
Uvažujme karambolový stůl ve tvaru mnohoúhelníku a ideální kulečníkovou kouli, která se od stěn odráží podle optického pravidla: úhel dopadu se rovná úhlu odrazu. Předpokládáme, že hmota koule je soustředěná do jednoho bodu a zanedbáváme tření a rotace.

- studují se regulární trajektorie
- speciálně periodické trajektorie



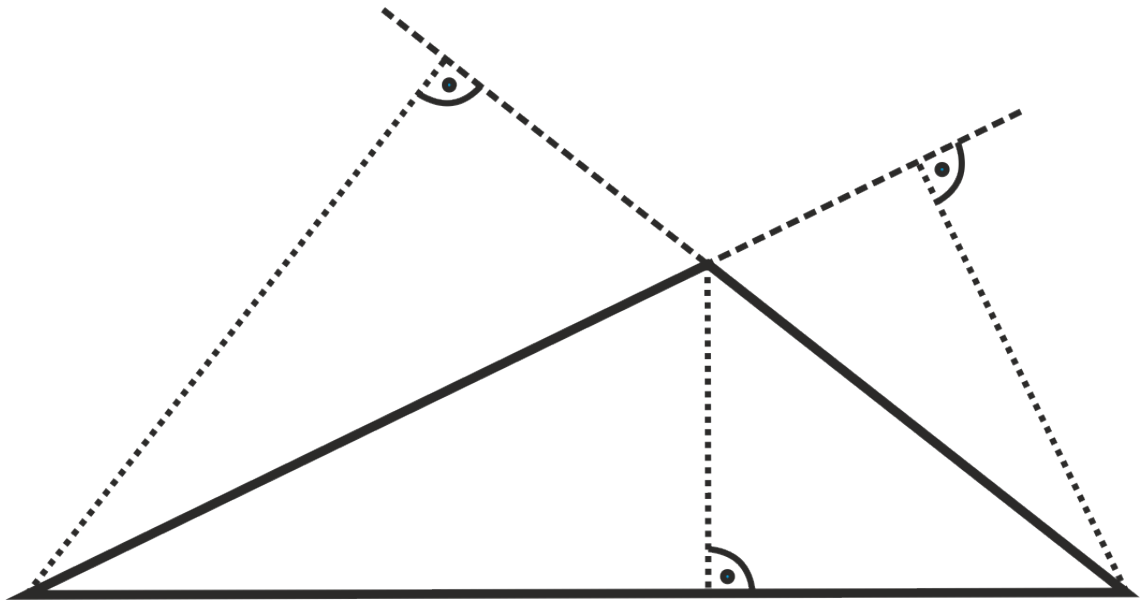
Billiards in a triangle

1. Nalezení periodické regulární trajektorie v ostroúhlém trojúhelníku
   - v 1775 nalezl Giovanni Fagnano speciální trajektorii
2. Nalezení periodické regulární trajektorie v tupoúhlém trojúhelníku
   - otevřený problém



Billiards in a triangle

1. Nalezení periodické regulární trajektorie v ostroúhlém trojúhelníku
   - v 1775 nalezl Giovanni Fagnano speciální trajektorii
2. Nalezení periodické regulární trajektorie v tupoúhlém trojúhelníku
   - otevřený problém



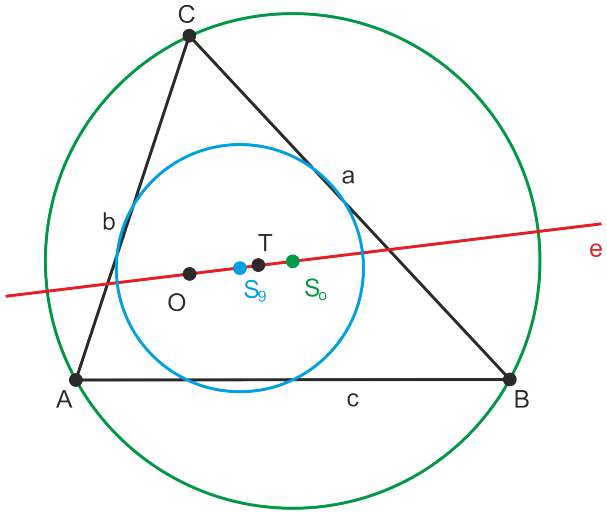
Outline

1 Úvod
2 Otázka z přijímacích zkoušek na MIT
3 Pythagorova věta
4 Heronova věta
5 Langleyho problém
6 Cevova a Menelaova věta
7 Zajímavá (bezejmenná) úloha
8 Stewartova věta
9 Simsonova věta
10 Fagnanův problém
11 Další zajímavé věty

Eulerovy věty

Eulerova přímka (1765)

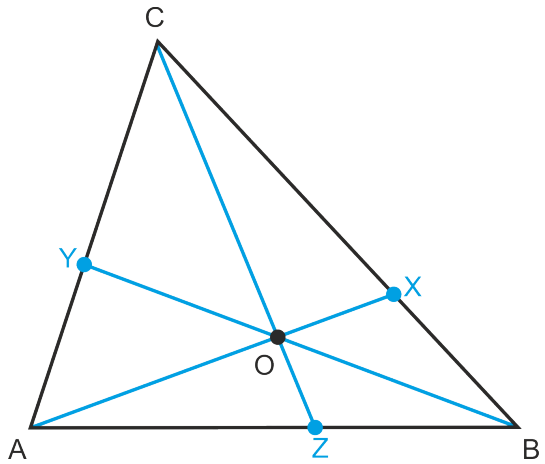
Těžiště, ortocentrum a středy kružnic opsané a devíti bodů $\triangle ABC$ leží na jedné přímce, kterou nazýváme Eulerova přímka.



Eulerova věta (1780)

Je dán trojúhelník ABC a bod O neležící na žádné ze stran $\triangle ABC$. Body X, Y a Z jsou průsečíky přímek AO, BO a CO se stranami BC, AC a AB. Potom platí

$$\frac{|AO|}{|OX|}+\frac{|BO|}{|OY|}+\frac{|CO|}{|OZ|}=\frac{|AO|}{|OX|}\cdot\frac{|BO|}{|OY|}\cdot\frac{|CO|}{|OZ|}+2.$$



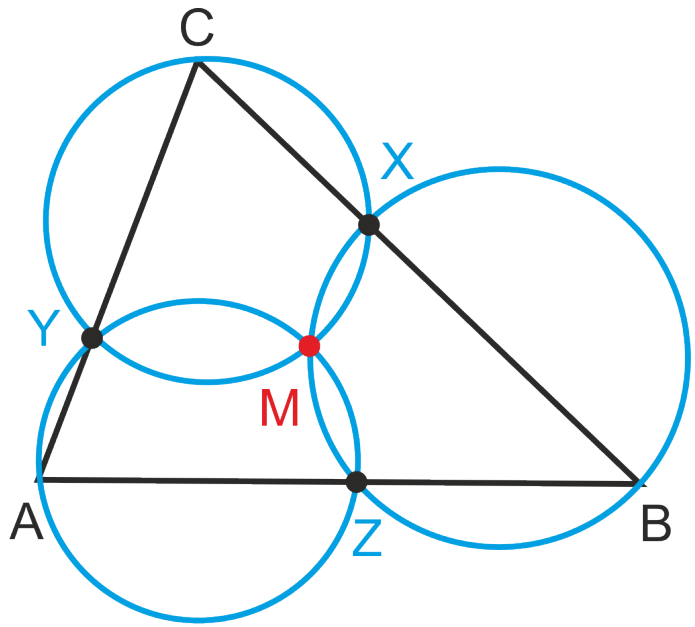
Leonard Euler

- 1707 – 1783
- švýcarský matematik a fyzik
- považován za nejlepšího matematika 18. století a za jednoho z nejlepších matematiků vůbec
- plodným autorem knih: jeho sebrané spisy čítají 60—80 svazků
- mnoho objevů na poli diferenciálního počtu a teorie grafů
- zavedl spoustu nových moderních matematických pojmů a symbolů, obzvlášť v matematické analýze
- je také proslulý svými pracemi v mechanice, optice a astronomii.
- na jeho počest po něm byl pojmenován asteroid – 2002 Euler

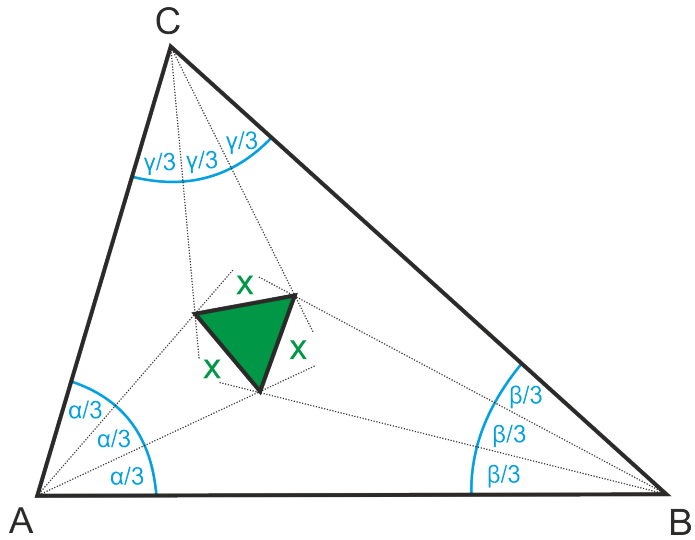
Miquelova věta (1833)

Miquelova věta

Mějme trojúhelník ABC. Na přímkách BC, CA a AB zvolme postupně body X, Y a Z. Kružnice opsané trojúhelníkům AYZ, BZX a CXY se protínají v jednom bodě, který nazveme Miquelovým bodem.



Morleyova věta (1900)



Morleyova věta

Polopřímky, které dělí vnitřní úhly libovolného trojúhelníku na třetiny, se protínají ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku.

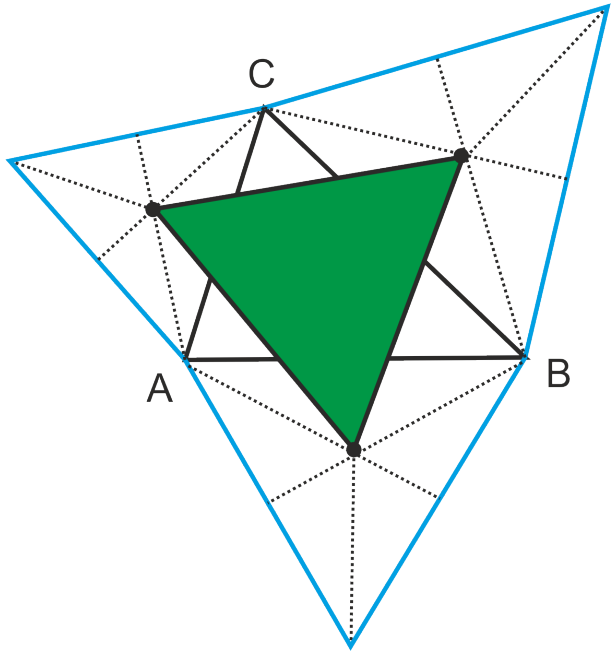
Frank Morley:

- 1860 – 1937
- britský matematik
- působil v oblastech algebra a geometrie
- úspěšně školil více než 50 Ph.D. studentů

Napoleonova věta

Napoleonova věta

Pokud nad stranami libovolného trojúhelníku zkonstruujeme rovnostranné trojúhelníky (všechny směrem dovnitř nebo všechny směrem ven). Těžiště těchto trojúhelníků tvoří opět rovnostranný trojúhelník.



Napoléon Bonaparte:

- 1769 – 1821
- francouzský vojevůdce a státník
- ve 24 letech byl generálem, krátce po třicítce prvním mužem ve státě a na vrcholu své moci ovládal většinu západní Evropy

Děkuji za pozornost