

Důkaz Fibonacciho nerovnosti



Dokaž mi prosím, že každý n -tý člen Fibonacciho posloupnosti je menší než 2^n .

Rád! Dokážeme, že každý n -tý člen Fibonacciho posloupnosti je menší než 2^n , tedy:

$$F_n < 2^n \quad \text{pro každé } n \geq 1$$

kde F_n je n -tý člen Fibonacciho posloupnosti definovaný rekurencí:

- $F_1 = 1$
- $F_2 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$

Důkaz matematickou indukcí

1. Indukční základ

Ukážeme platnost pro malá n :

- Pro $n = 1$:
 $F_1 = 1 < 2^1 = 2 \checkmark$
- Pro $n = 2$:
 $F_2 = 1 < 2^2 = 4 \checkmark$

Základ platí.

2. Indukční krok

Předpokládáme, že tvrzení platí pro $n = k$ a $n = k - 1$, tj.:

$$F_k < 2^k \quad \text{a} \quad F_{k-1} < 2^{k-1}$$

Chceme dokázat, že platí i pro $n = k + 1$, tedy:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} < 2^{k+1}$$

Z indukčního předpokladu:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} < 2^k + 2^{k-1}$$

Využijeme fakt, že:

$$2^k + 2^{k-1} = 2^{k-1}(2 + 1) = 3 \cdot 2^{k-1}$$

A nyní ukážeme, že:

$$3 \cdot 2^{k-1} < 2^{k+1}$$

To přepíšeme jako:

$$\frac{3 \cdot 2^{k-1}}{2^{k+1}} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4} < 1$$

Tedy:

$$3 \cdot 2^{k-1} < 2^{k+1}$$

a tím pádem:

$$F_{k+1} < 2^{k+1}$$

✓ Indukční krok je splněn.

Závěr

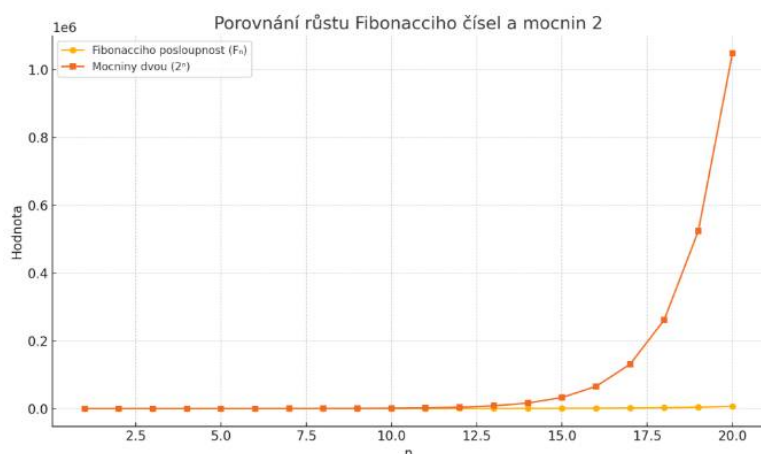
Pomocí matematické indukce jsme dokázali, že:

$$F_n < 2^n \text{ pro všechna } n \geq 1$$

Pokud chceš, mohu ti také ukázat vizuální nebo grafické porovnání růstu Fibonacciho čísel oproti 2^n .



Ano, ukaž mi grafické porovnání růstu.



Tady je graf porovnávající růst Fibonacciho posloupnosti (modře) a mocnin dvou 2^n (oranžově). Jak vidíš, i když Fibonacciho čísla rostou poměrně rychle, mocniny dvou je rychle přerůstají. To podporuje důkaz, že platí $F_n < 2^n$ pro všechna $n \geq 1$.