

Dokaž mi prosím, že každý n -tý člen Fibonacciho posloupnosti je menší než 2^n .

Chceme dokázat, že každý n -tý člen Fibonacciho posloupnosti F_n je menší než 2^n , tj. že pro všechna přirozená čísla n platí:

$$F_n < 2^n.$$

Definice Fibonacciho posloupnosti

Fibonacciho posloupnost je definována rekurentně takto:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pro } n \geq 3.$$

Důkaz matematickou indukcí

Použijeme **matematickou indukci** k důkazu tvrzení.

1. Základní případ

Nejprve ověříme nerovnost pro počáteční hodnoty n :

- Pro $n = 1$:

$$F_1 = 1 < 2^1 = 2.$$

- Pro $n = 2$:

$$F_2 = 1 < 2^2 = 4.$$

Základní případy platí.

2. Indukční krok

Předpokládáme, že tvrzení platí pro všechna $k \leq n$, tj.:

$$F_k < 2^k \quad \text{pro všechna } k \leq n.$$

Nyní dokážeme, že tvrzení platí i pro $n + 1$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < 2^n + 2^{n-1}.$$

Všimněme si, že:

$$2^n + 2^{n-1} = 2^n (1 + 2^{-1}) = 2^n \cdot \frac{3}{2} < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

(Protože $\frac{3}{2} < 2$.)

Tedy:

$$F_{n+1} < 2^{n+1}$$

1111 > 2000.

Závěr

Podle principu matematické indukce platí $F_n < 2^n$ pro všechna přirozená čísla n .

Alternativní odhad pomocí uzavřeného tvaru

Fibonacciho posloupnost má uzavřený tvar (Binetův vzorec):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^n, \text{ kde } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \text{ a } \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618.$$

Protože $|\psi| < 1$, platí $|\psi^n| < 1$, a tedy:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^n < \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n + \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Všimněme si, že $\phi < 2$ (protože $\sqrt{5} \approx 2.236$, tak $\phi \approx 1.618$). Proto:

$$F_n < \frac{1}{\sqrt{5}}2^n + \frac{1}{\sqrt{5}} < 2^n \text{ pro } n \geq 1.$$

Tento přístup také potvrzuje, že $F_n < 2^n$.

Poznámka

Ve skutečnosti platí dokonce silnější nerovnost:

$$F_n \leq 2^{n-1},$$

což lze opět dokázat indukcí. Nicméně původní tvrzení $F_n < 2^n$ je také pravdivé a jeho důkaz je jednodušší.

Ukaž mi grafické porovnání růstu.

Zde je grafické porovnání růstu **Fibonacciho posloupnosti** F_n a exponenciální funkce 2^n :

Grafické znázornění

Použijeme následující hodnoty:

n	F_n (Fibonacci)	2^n
1	1	2
2	1	4
3	2	8
4	3	16
5	5	32
6	8	64
...	...	...

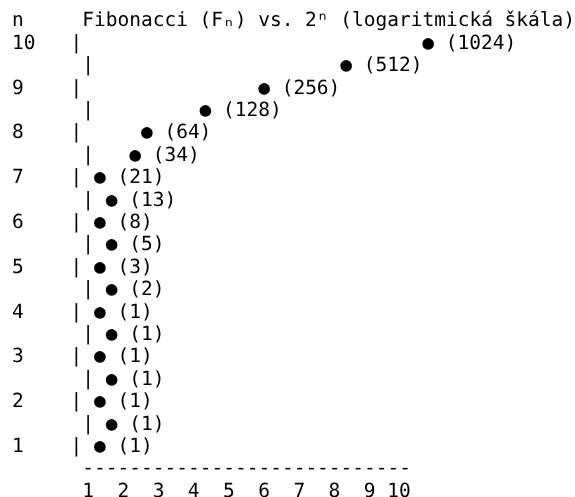
7	13	128
8	21	256
9	34	512
10	55	1024

Graf

text

Copy

Download



Pozorování:

- Fibonacciho posloupnost** roste exponenciálně, ale mnohem pomaleji než 2^n .
- Pro $n \geq 1$ platí $F_n < 2^n$, což odpovídá matematickému důkazu.
- Zatímco 2^n roste jako 2, 4, 8, 16, ..., Fibonacciho čísla rostou pomaleji: 1, 1, 2, 3, 5, 8,

Alternativní graf (lineární škála)

Pokud bychom chtěli vidět růst v lineárním měřítku, rozdíl by byl ještě výraznější:

- $2^{10} = 1024$, zatímco $F_{10} = 55$.
- $2^{20} = 1\,048\,576$, zatímco $F_{20} = 6\,765$.

Závěr

Graf potvrzuje, že **Fibonacciho čísla rostou exponenciálně, ale pomaleji než 2^n** . To odpovídá důkazu, že $F_n < 2^n$ pro všechna $n \geq 1$.