

Mám následující kód v Lean4.

Můžeš mi ho prosím doplnit o komentáře a vysvětlit, jak celý důkaz funguje?



Rozhodně! Rád ti k tvému Lean4 kódu přidám komentáře a vysvětlím, jak důkaz funguje.

Fragment kódu



```
import Mathlib

-- Definice konvergence posloupnosti
-- Posloupnost 'a' konverguje k 'c', pokud pro každé  $\epsilon > 0$ 
-- existuje přirozené číslo N takové, že pro všechna  $n \geq N$ 
-- je absolutní hodnota rozdílu  $a_n$  a  $c$  menší než  $\epsilon$ .
def ConvergesTo (a :  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ) (c :  $\mathbb{R}$ ) :=
   $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |a\ n - c| < \epsilon$ 

-- Důkaz věty o limitě součtu posloupností
-- Jestliže posloupnost 'a' konverguje k 'c' (ha)
-- a posloupnost 'b' konverguje k 'd' (hb),
-- pak posloupnost  $(a_n + b_n)$  konverguje k  $(c + d)$ .
theorem limit_add
  {a b :  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ } {c d :  $\mathbb{R}$ }
  (ha : ConvergesTo a c) (hb : ConvergesTo b d) :
  ConvergesTo ( $\lambda n \Rightarrow a\ n + b\ n$ ) (c + d) :=
by
  -- Začátek důkazu. Cílem je ukázat, že pro libovolné  $\epsilon > 0$  ...
  intros  $\epsilon$   $\epsilon\_pos$ 
  -- ... existuje N takové, že pro všechna  $n \geq N$  platí  $|(a_n + b_n) - (c + d)| < \epsilon$ .

  -- Potřebujeme  $\epsilon/2$  pro použití v definici konvergence pro 'a' a 'b'.
  -- Dokážeme, že  $\epsilon/2$  je kladné, protože  $\epsilon$  je kladné.
  have  $\epsilon2\_pos : \epsilon / 2 > 0 :=$  by linarith

  -- Použijeme definici konvergence pro posloupnost 'a' s  $\epsilon/2$ .
  -- 'obtain' nám rozbalí existenci ( $\exists N, \dots$ ) na konkrétní hodnotu 'Na'
  a důkaz 'haN'.
```

```

-- 'haN' je důkaz, že pro všechna  $n \geq Na$  platí  $|a_n - c| < \varepsilon/2$ .
obtain ⟨Na, haN⟩ := ha (ε / 2) ε2_pos

-- To samé pro posloupnost 'b'. Získáme 'Nb' a 'hbN'.
-- 'hbN' je důkaz, že pro všechna  $n \geq Nb$  platí  $|b_n - d| < \varepsilon/2$ .
obtain ⟨Nb, hbN⟩ := hb (ε / 2) ε2_pos

-- Zvolíme N jako maximum z Na a Nb.
-- Tím zajistíme, že pro  $n \geq N$  platí zároveň  $n \geq Na$  i  $n \geq Nb$ .
let N := max Na Nb
-- 'use N' nám říká, že toto je to 'N', které hledáme pro splnění exis-
tenční podmínky v definici konvergence.
use N
-- Nyní musíme dokázat, že pro všechna  $n \geq N$  platí  $|(a_n + b_n) - (c + d)| < \varepsilon$ .
intros n hn

-- Aplikujeme důkaz 'haN' na naše 'n'.
-- Potřebujeme ukázat, že  $n \geq Na$ . Víme, že  $n \geq N$  a  $N \geq Na$ , takže to pl-
atí.
-- 'le_trans' je tranzitivita relace "menší nebo rovno".
-- 'le_max_left _ _' dokazuje, že  $\max(Na, Nb)$  je větší nebo roven Na.
have ha_appl := haN n (le_trans (le_max_left _ _) hn)

-- To samé pro 'hbN' a 'Nb'.
have hb_appl := hbN n (le_trans (le_max_right _ _) hn)

-- Nyní samotný výpočet a odvození nerovnosti.
calc
  -- První krok: Přeskupíme členy uvnitř absolutní hodnoty.
  --  $(a_n + b_n) - (c + d) = (a_n - c) + (b_n - d)$ 
   $|a_n + b_n - (c + d)| = |(a_n - c) + (b_n - d)| := \text{by ring\_nf}$ 
  -- Druhý krok: Použijeme trojúhelníkovou nerovnost:  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .
  -- Zde  $x = (a_n - c)$  a  $y = (b_n - d)$ .
   $\leq |a_n - c| + |b_n - d| := \text{abs\_add _ _}$ 
  -- Třetí krok: Použijeme naše důkazy ha_appl a hb_appl.
  -- Víme, že  $|a_n - c| < \varepsilon/2$  a  $|b_n - d| < \varepsilon/2$ .
  -- 'add_lt_add' říká, že pokud  $x < X$  a  $y < Y$ , pak  $x + y < X + Y$ .
   $< \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 := \text{add\_lt\_add ha\_appl hb\_appl}$ 
  -- Čtvrtý krok: Jednoduchá aritmetika.
   $= \varepsilon := \text{by ring}$ 

```

Jak celý důkaz funguje:

Důkaz `limit_add` v Lean4 formálně ověřuje, že součet dvou konvergentních posloupností konverguje k součtu jejich limit. Používá **definici konvergence** (epsilon-delta definice), která říká, že posloupnost (a_n) konverguje k limitě c , pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje N takové, že pro všechna $n \geq N$ platí $|a_n - c| < \varepsilon$.

delta dennice), která je klíčová pro analýzu posloupností.

Zde je rozbor jednotlivých kroků a jak odpovídají myšlenky důkazu z klasické matematiky:

1. **Definice konvergence** (`ConvergesTo`):

- Říká, že posloupnost a_n konverguje k c (zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$), pokud se pro každé, jakkoli malé, kladné číslo ϵ (epsilon) dají členy posloupnosti a_n libovolně přiblížit k c .
- Formálně to znamená, že existuje index N takový, že pro všechny indexy n větší nebo rovné N je vzdálenost mezi a_n a c (tj. $|a_n - c|$) menší než ϵ .

2. **Věta k dokázání** (`theorem limit_add`):

- Chceme dokázat, že pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = d$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c + d$.
- To znamená, že musíme ukázat, že pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje N takové, že pro všechna $n \geq N$ platí $|(a_n + b_n) - (c + d)| < \epsilon$.

3. **Struktura důkazu** (`by intros ε ε_pos ...`):

- `intros ε ε_pos` : Důkaz začíná tím, že předpokládáme libovolné kladné ϵ . Naším cílem je najít N .
- `have ε2_pos : ε / 2 > 0 := by linarith` : Protože a_n a b_n konvergují, můžeme si "rozdělit" ϵ na dvě části. Tradiční trik v těchto důkazech je použít $\epsilon/2$ pro každou z dílčích konvergencí, aby se jejich součet ve výsledku rovnal celkovému ϵ . `linarith` je taktika, která dokazuje jednoduché lineární nerovnosti.
- `obtain (Na, haN) := ha (ε / 2) ε2_pos` : Zde aplikujeme definici konvergence na posloupnost a_n . Protože a_n konverguje k c , víme, že pro naše $\epsilon/2$ existuje nějaké N_a takové, že pro všechna $n \geq N_a$ platí $|a_n - c| < \epsilon/2$. Lean nám to poskytne jako `Na` (konkrétní index) a `haN` (důkaz, že nerovnost platí pro $n \geq N_a$).
- `obtain (Nb, hbN) := hb (ε / 2) ε2_pos` : To samé provedeme pro posloupnost b_n , čímž získáme N_b a `hbN` (důkaz, že $|b_n - d| < \epsilon/2$ pro $n \geq N_b$).

geN_b).

- `let N := max Na Nb` : Potřebujeme, aby obě nerovnosti ($|a_n - c| < \epsilon/2$ a $|b_n - d| < \epsilon/2$) platily současně. To zajistíme tím, že zvolíme N jako maximum z N_a a N_b . Pokud $n \geq N$, pak nutně $n \geq N_a$ a $n \geq N_b$.
- `use N` : Tímto Lean "ví", že jsme našli to hledané N z definice konvergence.
- `intros n hn` : Nyní musíme dokázat, že pro *jakékoli* n takové, že $n \geq N$ (`hn`), platí naše cílová nerovnost.
- `have ha_appl := haN n (le_trans (le_max_left _ _) hn)` : Aplikujeme důkaz `haN`. Abychom ho mohli použít, potřebujeme ukázat, že toto konkrétní n je větší nebo rovno N_a . Víme, že $n \geq N$ (z `hn`) a že $N \geq N_a$ (protože $N = \max N_a N_b$). Tím získáme `ha_appl`, což je důkaz, že $|a_n - c| < \epsilon/2$.
- `have hb_appl := hbN n (le_trans (le_max_right _ _) hn)` : Analogicky získáme `hb_appl`, což je důkaz, že $|b_n - d| < \epsilon/2$.
- `calc ...` : Toto je sekvence rovností a nerovností, které vedou k cílovému výsledku:
 - `| (a n + b n) - (c + d) | = | (a n - c) + (b n - d) | := by ring_nf` : Algebraické přeskupení členů uvnitř absolutní hodnoty. `ring_nf` je taktika, která provádí algebraické zjednodušení.
 - `_ ≤ |a n - c| + |b n - d| := abs_add _ _` : Aplikace **trojúhelníkové nerovnosti** ($|x + y| \leq |x| + |y|$). Toto je klíčový krok v důkazu limit součtu.
 - `ha_appl hb_appl $|a_n - c| < \epsilon/2 $|b_n - d| < \epsilon/2` : Pokud sečteme dvě striktní nerovnosti, výsledek je také striktní nerovnost. `add_lt_add` je pro to pravidlo.
 - `_ = ε := by ring` : Poslední zjednodušení $\epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. `ring` je taktika pro zjednodušení aritmetických výrazů.

Shrnutí:

Důkaz postupuje tak, že pro jakékoli malé

$\forall \epsilon > 0$ "nutime" obě posloupnosti (a_n) a (b_n) být dostatečně blízko svým limitám (blíže než $\epsilon/2$). Díky trojúhelníkové nerovnosti se pak rozdíl součtu posloupností od součtu limit stane menším než součet jednotlivých odchylek (tj. menší než $\epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$), což dokazuje konvergenci. Lean4 pak formálně ověřuje každý logický krok a použití axiomů/vět (jako je trojúhelníková nerovnost).
Doufám, že ti to pomohlo lépe pochopit kód a důkaz! Dej vědět, pokud máš další otázky.



Nechte Gemini napsat dokument nebo kód, který budete moci upravit

