

Singulární rozklad

Singulární rozklad matice

- Jeden z **nejdůležitějších** teoretických i praktických nástrojů maticových výpočtů.
- Umožňuje určit **hodnost** či **normu** matice, **ortogonální báze** $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$ atd.
- Za univerzálnost a sílu tohoto nástroje musíme platit **vyššími výpočetními nároky**.
- Motivace vedoucí k zobecnění na singulární rozklad: spektrální rozklad hermitovská a pozitivně semidefinitní A .

Motivace

Spektrální rozklad hermitovské pozitivně semidefinitní matice

- Nechť A je **hermitovská**, pozitivně semidefinitní, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hodnosti r , $r \equiv \text{rank}(A)$.
- A má nezáporná vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, uvažujme uspořádání

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \quad \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

- **Schurova věta** pro normální matice: existuje rozklad tvaru

$$A = Q \Lambda Q^*, \quad Q^* Q = I, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Hermitovské pozitivně semidefinitní matice

Rozklad do ortogonálních invariantních podprostorů

- Sloupce unitární $Q = [q_1, \dots, q_n]$ jsou vlastní vektory A ,

$$Aq_j = \lambda_j q_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

- $q_1, \dots, q_n$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{C}^n$ a **definují rozklad** $\mathbb{C}^n$ na ortogonální jednodimenzionální podprostory, jež jsou **invariantní** vzhledem k násobení maticí A , tj.

$$v \in \text{span}\{q_j\} \implies Av \in \text{span}\{q_j\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

- Aplikace A ,

$$v = \sum_{k=1}^n \alpha_k q_k \implies Av = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k q_k.$$

Hermitovské pozitivně semidefinitní matice

Spektrální rozklad a ortogonální báze $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$

- **Schématicky zobrazené působení** A na $\{q_1, \dots, q_n\}$:

$$\begin{aligned} A q_1 &\longrightarrow \lambda_1 q_1, \\ A q_2 &\longrightarrow \lambda_2 q_2, \\ &\vdots \\ A q_r &\longrightarrow \lambda_r q_r, \\ A \{q_{r+1}, \dots, q_n\} &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

- Vidíme báze $\mathcal{N}(A)$ a $\mathcal{R}(A)$:

$$\mathcal{R}(A) = \text{span}\{q_1, \dots, q_r\}, \quad \mathcal{N}(A) = \text{span}\{q_{r+1}, \dots, q_n\}.$$

Hermitovské pozitivně semidefinitní matice

Dyadický rozvoj, aproximace A maticí nižší hodnosti

- **Dyadický rozvoj** matice A ,

$$A = \sum_{j=1}^r \lambda_j q_j q_j^* = \sum_{j=1}^r A_j, \quad A_j \equiv \lambda_j q_j q_j^*.$$

Platí $\|A_j\| = \|A_j\|_F = \lambda_j$ a $\|A_1\| \geq \|A_2\| \geq \dots \geq \|A_r\|$.

- **Aproximace A maticí $A^{(k)}$** hodnosti k ,

$$A^{(k)} = \sum_{j=1}^k A_j.$$

- **Chyba aproximace** měřená spektrální normou

$$\|A - A^{(k)}\| = \lambda_{k+1}.$$

Jádro a obor hodnot matic A^*A a AA^*

- **Singulární rozklad** $\rightarrow$ **zobecnění** předchozího na obecné matice

$$A \in \mathbb{C}^{n \times m}, \quad \text{rank}(A) = r.$$

- K odvození použijeme **spektrální rozklady** A^*A a AA^* .
(čtvercové hermitovské pozitivně semidefinitní).

Jádro a obor hodnot matic A^*A a AA^* (cvičení)

Pro libovolnou komplexní matici $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A^*A) &= \mathcal{N}(A), & \mathcal{R}(A^*A) &= \mathcal{R}(A^*), \\ \mathcal{N}(AA^*) &= \mathcal{N}(A^*), & \mathcal{R}(AA^*) &= \mathcal{R}(A). \end{aligned}$$

Jádro a obor hodnot matic A^*A a AA^*

- Připomeňme

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^*) &= \mathbb{C}^m, & \mathcal{N}(A) &\perp \mathcal{R}(A^*), \\ \mathcal{N}(A^*) \oplus \mathcal{R}(A) &= \mathbb{C}^n, & \mathcal{N}(A^*) &\perp \mathcal{R}(A).\end{aligned}$$

- Platí

$$\dim(\mathcal{R}(A)) = r = \dim(\mathcal{R}(A^*))$$

a proto

$$\dim(\mathcal{R}(AA^*)) = r = \dim(\mathcal{R}(A^*A)).$$

Spektrální rozklad A^*A

- **Vztah?** Spektrální rozklad $A^*A \leftrightarrow$ spektrální rozklad AA^* ?
- **Předpoklad:** známe spektrální rozklad A^*A , odvodíme spektrální rozklad AA^* .
- Označme λ_j vlastní čísla a v_j příslušné ortonormální vlastní vektory A^*A ,

$$A^*A v_j = \lambda_j v_j, \quad \|v_j\| = 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme uspořádání

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \quad \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_m = 0.$$

- Označíme-li $V \equiv [v_1, \dots, v_m]$, platí

$$V^*A^*AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-r}), \quad V^*V = I_m.$$

Vztahy mezi vlastními čísly a vektory matic A^*A a AA^*

- Dle předchozího platí

$$\begin{aligned}\text{span}\{v_1, \dots, v_r\} &= \mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*), \\ \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_m\} &= \mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A).\end{aligned}$$

- Existuje vztah mezi vlastními vektory A^*A a AA^* ?

O vlastních vektorech matic A^*A a AA^*

Uvažujme spektrální rozklad matice A^*A . Potom jsou vektory

$$u_j \equiv A v_j / \sqrt{\lambda_j}, \quad j = 1, \dots, r,$$

ortonormální vlastní vektory matice AA^* a platí

$$AA^* u_j = \lambda_j u_j, \quad \|u_j\| = 1, \quad j = 1, \dots, r.$$



Spektrální rozklad matice AA^*

- Pro $j = 1, \dots, r$ platí $\lambda_j \neq 0$,

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j.$$

- $u_1, \dots, u_r \rightarrow$ ortonormální báze $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*)$.
- Doplníme na ortonormální bázi celého prostoru pomocí $u_{r+1}, \dots, u_n \rightarrow$ báze $\mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)$.
- Platí

$$\begin{aligned}\text{span}\{u_1, \dots, u_r\} &= \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A), \\ \text{span}\{u_{r+1}, \dots, u_n\} &= \mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*).\end{aligned}$$

- Označíme-li $U \equiv [u_1, \dots, u_n]$, pak

$$U^* AA^* U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}), \quad U^* U = I_n.$$

Spektrální rozklady matic AA^* a A^*A

- Spektrální rozklad $A^*A \Rightarrow$ spektrální rozklad AA^* .
- Nalezli jsme ortonormální báze $\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A^*)$, $\mathcal{N}(A)$,
$$\mathcal{R}(A^*) = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}, \quad \mathcal{N}(A) = \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_m\},$$
$$\mathcal{R}(A) = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\}, \quad \mathcal{N}(A^*) = \text{span}\{u_{r+1}, \dots, u_n\}.$$
- Z konstrukce $\rightarrow$ nenulová vlastní čísla A^*A a AA^* se rovnají.

Singulární čísla

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Odmocniny nenulových vlastních čísel matice A^*A nazveme **singulárními čísly** matice A ,

$$\sigma_j \equiv \sqrt{\lambda_j}, \quad j = 1, \dots, r, \quad r = \text{rank}(A).$$

- λ_j by uspořádána sestupně, proto $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Singulární rozklad

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j \quad \Rightarrow \quad Av_j = \sigma_j u_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

- Zobrazení $\mathbb{C}^m = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ maticí A :

$$\begin{array}{rcl} Av_1 & \longrightarrow & \sigma_1 u_1, \\ Av_2 & \longrightarrow & \sigma_2 u_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Av_r & \longrightarrow & \sigma_r u_r, \\ A\{v_{r+1}, \dots, v_m\} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

- Maticově

$$AV = U\Sigma, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}.$$

Singulární rozklad - matice A^*

- Ekvivalentně,

$$A = U\Sigma V^*, \quad A^* = V\Sigma^T U^*$$

a analogicky

$$\begin{array}{rcl} A^*u_1 & \longrightarrow & \sigma_1 v_1, \\ A^*u_2 & \longrightarrow & \sigma_2 v_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^*u_r & \longrightarrow & \sigma_r v_r, \\ A^*\{u_{r+1}, \dots, u_n\} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

- $A \rightarrow$ vzájemně jednoznačné přiřazení dvojic jednorozměrných podprostorů $\text{span}\{u_j\}$ a $\text{span}\{v_j\}$, $j = 1, \dots, r$.

Singulární rozklad - celkové schema

$$\begin{array}{ccccc}
 & A & & A^* & \\
 v_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & u_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & v_1, \\
 v_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & u_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & v_2, \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 v_r & \xrightarrow{\sigma_r} & u_r & \xrightarrow{\sigma_r} & v_r, \\
 v_{r+1} & \left. \vphantom{\begin{array}{c} v_{r+1} \\ \vdots \\ v_m \end{array}} \right\} \rightarrow 0, & u_{r+1} & \left. \vphantom{\begin{array}{c} u_{r+1} \\ \vdots \\ u_n \end{array}} \right\} \rightarrow 0. \\
 \vdots & & \vdots & & \\
 v_m & & u_n & &
 \end{array}$$

Věta o singulárním rozkladu obecné matice

Geometrická verze

Geometrická verze singulárního rozkladu

Pro každou matici $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnosti r existuje ortonormální báze $\{v_1, \dots, v_m\}$ prostoru $\mathbb{C}^m$, ortonormální báze $\{u_1, \dots, u_n\}$ prostoru $\mathbb{C}^n$ a kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ tak, že platí

$$Av_j = \begin{cases} \sigma_j u_j, & j = 1, \dots, r, \\ 0, & j = r + 1, \dots, m, \end{cases}$$

$$A^* u_j = \begin{cases} \sigma_j v_j, & j = 1, \dots, r, \\ 0, & j = r + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ jsou odmocninami nenulových vlastních čísel matic $A^* A$ a AA^* příslušných vlastním vektorům $\{v_1, \dots, v_r\}$ resp. $\{u_1, \dots, u_r\}$.

Věta o singulárním rozkladu obecné matice

Maticová verze

Maticová verze singulárního rozkladu

$\forall A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnoty r existují unitární matice $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ a kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ tak, že platí

$$A = U \Sigma V^*, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

kde $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$.

- $v_j, j = 1, \dots, m \rightarrow$ **pravé singulární vektory**,
 $u_j, j = 1, \dots, n \rightarrow$ **levé singulární vektory**.
- SVD $\rightarrow$ *singular value decomposition*.
- A **reálná** $\rightarrow$ existuje **reálný** SVD (A^*A i AA^* jsou reálné symetrické s reálnými ortonormálními vlastními vektory).

Zápisy singulárního rozkladu

Plný a ekonomický zápis

- Rozklad $A = U\Sigma V^*$ s čtvercovými $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ je vhodný především pro **teoretické účely** (**plný** tvar).
- **Praktické účely** $\rightarrow$ **ekonomický** tvar singulárního rozkladu. Označíme-li $U_r \equiv [u_1, \dots, u_r]$, $V_r \equiv [v_1, \dots, v_r]$, platí

$$A = U_r \Sigma_r V_r^*,$$

schematicky

$$\begin{array}{c} A \\ \boxed{} \end{array} = \begin{array}{c} U \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{c} \Sigma \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{c} V^* \\ \boxed{} \end{array} = \begin{array}{c} U_r \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{c} \Sigma_r \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{c} V_r^* \\ \boxed{} \end{array}.$$

Detailed description: The diagram illustrates the compact SVD decomposition. It shows a large square matrix A equal to the product of three matrices: U, Σ, and V*. Matrix U is shown as a square with a vertical dashed line, indicating its first r columns are U_r. Matrix Σ is shown as a square with a horizontal dashed line, indicating its top r rows are Σ_r. Matrix V* is shown as a square with a horizontal dashed line, indicating its first r rows are V_r*. The compact form is then shown as the product of three smaller matrices: U_r (a tall rectangle), Σ_r (a small square), and V_r* (a wide rectangle).

(odstraníme násobení nulovými bloky)

Zápisy singulárního rozkladu

Zápis pomocí dyadického rozvoje

- Ekonomický tvar SVD lze zapsat pomocí **dyadického rozvoje**

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^* = \sum_{j=1}^r A_j, \quad A_j \equiv \sigma_j u_j v_j^*.$$

- j -tý vnější součin $A_j = \sigma_j u_j v_j^*$ je matice hodnosti jedna, platí

$$\|A_j\| = \|A_j\|_F = \sigma_j, \quad (\text{cvičení})$$

a proto

$$\|A_1\| \geq \|A_2\| \geq \dots \geq \|A_r\| > 0.$$

- Matici A hodnosti r jsme vyjádřili jako součet r matic hodnosti jedna s nerostoucí normou.

Singulární rozklad normální matice

Vztah k spektrálnímu rozkladu

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normální, pro jednoduchost regulární, Schur $\rightarrow$

$$A = Q\Lambda Q^*, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

λ_j obecně komplexní, předpokládejme $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

•

$$D \equiv \text{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \dots, \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}\right), \quad DD^* = D^*D = I.$$

$$D^*\Lambda = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) = \Lambda D^*.$$

- Získání singulárního rozkladu A

$$A = (QD) (D^*\Lambda) Q^* \equiv U\Sigma V^*,$$

kde $U \equiv QD$ a $V \equiv Q$ jsou unitární, $\Sigma \equiv D^*\Lambda$ je reálná diagonální matice s kladnými prvky na diagonále.

- Singulární čísla A jsou **absolutní hodnoty vlastních čísel** A .

Výpočet singulárního rozkladu

a spektrální rozklad matic AA^* a A^*A

- Jeli A obdélníková a **jeden z rozměrů je malý** (uvažujme např. situaci $n \gg m$), **může být výhodné** použít k výpočtu spektrální rozklad $A^*A \in \mathbb{C}^{m \times m} \rightarrow$ spočteme v_j a σ_j .
- Levé singulární vektory u_j (n -prvkové vektory) dopočteme snadno užitím vztahů

$$u_j = \frac{Av_j}{\sigma_j}, \quad j = 1, \dots, r.$$

- $n \ll m$ a n je malé $\rightarrow$ analogicky.
- Podstatná **nevýhoda**:

$$\kappa(A^*A) = \kappa(AA^*) = \kappa(A)^2.$$

Je-li matice A **špatně podmíněna**, mohou být malá singulární čísla počítaná tímto způsobem určena **velmi nepřesně**.

Výpočet singulárního rozkladu

Standardní způsob

- 1 transformace A na **bidiagonální tvar**,

$$B = WAQ, \quad W^*W = I, \quad Q^*Q = I.$$

Unitární transformace $\rightarrow$ **numerická stabilita**.

- 2 **singulární rozklad bidiagonální matice** (iteračně pomocí implicitního QR algoritmu). Singulární čísla bidiagonální matice **je možné spočítat velmi přesně**, s relativní přesností na úrovni strojové přesnosti.

Výpočetní náročnost výpočtu SVD

Odhad počtu operací, pro jednoduchost čtvercové matice řádu n .

- Jde o **iterační proces** → nemůžeme *a priori* určit přesný počet operací. Předpoklad: iterační **proces konverguje velmi rychle** – můžeme odhadnout zdola počet operací.
- Převod na bidiagonální matici → 2-krát více operací než QR.
- Chceme-li spočítat pouze singulární čísla, nejméně

$$\frac{8}{3} n^3 \text{ operací.}$$

- Chceme-li znát explicitně i U a V , je nutné vynásobit jednotlivé Householderovy reflexe, potřebujeme nejméně

$$\frac{16}{3} n^3 \text{ operací.}$$

- V většině aplikací je zbytečné provádět explicitní výpočet U a V (stačí je ukládat v implicitním tvaru - ukládají se jen příslušné vektory jež definují Householderovy reflexe).

Použití singulárního rozkladu

- Ukážeme, jak pomocí SVD určit **hodnost** (rank), **normu** či **podmíněnost** matice, **pseudoinverzi** matice a nalezneme **nejlepší aproximaci** matice pomocí matice nižší hodnosti.
- **Pseudoinverze** (Moore-Penroseova zobecněná inverze), je zobecněním inverze čtvercové regulární matice.

Definice: Moore-Penroseova pseudoinverze

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnosti r a nechť $A = U\Sigma V^* = U_r \Sigma_r V_r^*$ je její singulární rozklad. Matici

$$A^\dagger \equiv V \Sigma^\dagger U^* = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^*, \quad \Sigma^\dagger \equiv \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

nazveme *Moore-Penroseovou zobecněnou inverzí* matice A (zkráceně pseudoinverze).

Pseudoinverze matice

Ekvivalentní definice, projektory

- $A^\dagger$ splňuje rovnosti (cvičení)

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A, & (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger, \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, & (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A. \end{aligned}$$

- $A^\dagger$ je těmito podmínkami určena jednoznačně.
- Máme **dvě ekvivalentní definice** pseudoinverze matice A .
- Z definice pseudoinverze plyne

$$\begin{aligned} AA^\dagger &= U_r \Sigma_r V_r^* V_r \Sigma_r^{-1} U_r^* = U_r U_r^*, \\ A^\dagger A &= V_r \Sigma_r^{-1} U_r^* U_r \Sigma_r V_r^* = V_r V_r^*. \end{aligned}$$

- $AA^\dagger = U_r U_r^*$ je **ortogonálním projektorem** na $\mathcal{R}(A)$.
 $A^\dagger A = V_r V_r^*$ je **ortogonálním projektorem** na $\mathcal{R}(A^*)$.

Jiné vyjádření pseudoinverze

Pseudoinverze matic s plnou sloupcovou (řádkovou) hodnotí

Věta

Uvažujme matici $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Je-li $n \geq m$ a $\text{rank}(A) = m$, potom

$$A^\dagger = (A^* A)^{-1} A^*.$$

Naopak, je-li $n < m$ a $\text{rank}(A) = n$, potom $A^\dagger = A^* (A A^*)^{-1}$. 

- Je-li A čtvercová regulární matice, potom platí $A^\dagger = A^{-1}$.

Normy a podmíněnost matice

Spektrální a Frobeniova norma

Normy a singulární čísla

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnosti r a necht $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ jsou její singulární čísla. Potom platí

$$\|A\| = \sigma_1, \quad \|A\|_F = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2)^{1/2}$$

a navíc

$$\|A\| \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r} \|A\|.$$



Podmíněnost matice

a singulární čísla

- Podmíněnost čtvercové regulární matice

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Jelikož $\|A\| = \sigma_1$ a $\|A^{-1}\| = \sigma_n^{-1}$, je

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

- Zobecnění na obdélníkové matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n \geq m$ s plnou sloupcovou hodnotí, $\text{rank}(A) = m$,

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_m}.$$

Aproximace maticí nižší hodnosti

Formulace problému

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ je matice hodnosti r a nechť je dáno přirozené číslo $k < r$. Cíl: nalézt matici $B_k \in \mathbb{C}^{n \times m}$ tak, že

$$\text{rank}(B_k) = k \quad \text{a} \quad \|A - B_k\| = \min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{n \times m} \\ \text{rank}(X) = k}} \|A - X\|.$$

Lemma

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnosti r a nechť k je přirozené číslo, $k < r$. Pro každou matici $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\text{rank}(X) = k$, platí

$$\|A - X\| \geq \sigma_{k+1},$$

kde σ_{k+1} je $(k+1)$ ní singulární číslo matice A .



Aproximace maticí nižší hodnosti

Věta: Eckart, Young, Mirsky

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnosti r a necht' k je přirozené číslo, $k < r$. Uvažujme singulární rozklad matice A ,

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^*.$$

Potom je matice

$$A^{(k)} \equiv \sum_{j=1}^k \sigma_j u_j v_j^*$$

nejlepší aproximací matice A hodnosti k a platí

$$\min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{n \times m} \\ \text{rank}(X)=k}} \|A - X\| = \|A - A^{(k)}\| = \sigma_{k+1}.$$



Numerická hodnota matice

- Řekneme, že A má **numerickou hodnotu** k , pokud A má k singulárních čísel výrazně větších než strojová přesnost ϵ a ostatní singulární čísla jsou úměrná ϵ

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_k \gg \sigma_{k+1} \approx \mathbf{u}.$$

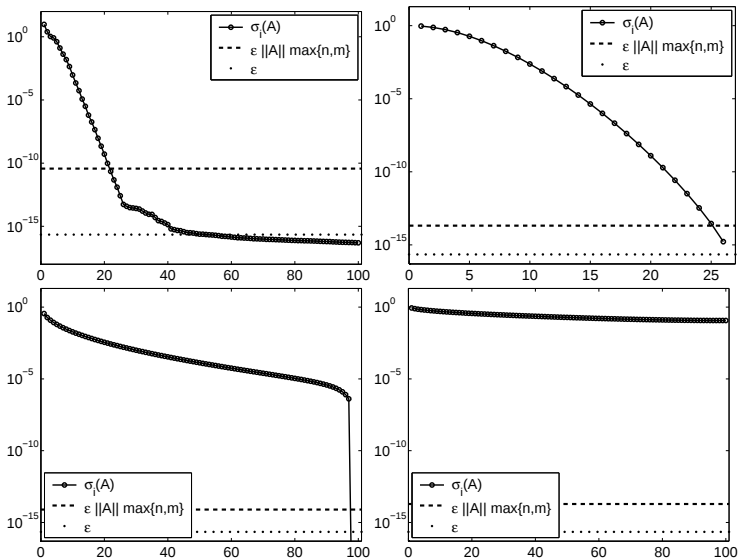
- Není přitom kvantifikováno, co znamená, že je singulární číslo **úměrné** $\mathbf{u}$. Matlab $\rightarrow$ numerická hodnota matice je dána počtem singulárních čísel matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ větších než

$$\epsilon \|A\| \max\{n, m\}.$$

- Příklady: krylovovská matice s normalizovanými sloupci,

$$\left[\frac{w}{\|w\|}, \frac{Bw}{\|Bw\|}, \dots, \frac{B^{m-1}w}{\|B^{m-1}w\|} \right] \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

kde $m = 100$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Butterfly Gyro, kolekce Oberwolfach.

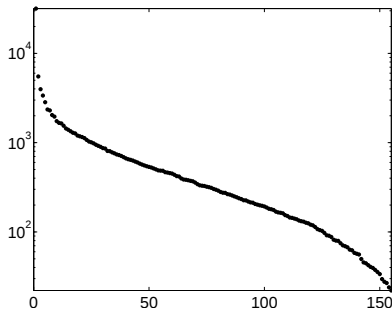


krylovovské matice (vlevo nahoře), paralax(100) (vpravo nahoře), heat(100,1) (vlevo dole), heat(100,5) (vpravo dole).

Použití SVD na kompresi dat

Fotografie a matice

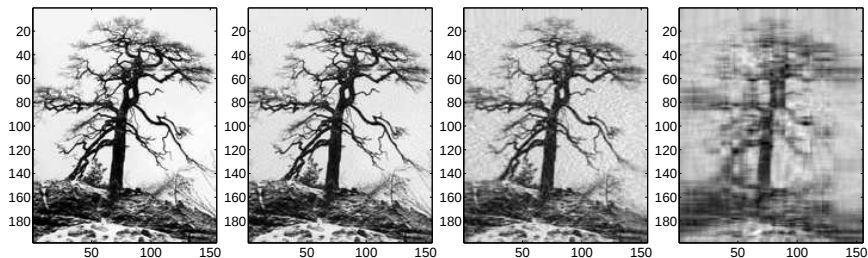
- Fotografie = matice. Černobílá = 1 matice, barevná → 3 barevné kanály 3 matice.
- Příklad: černobílá fotografie stromu → matice $A \in \mathbb{R}^{198 \times 155}$, plná sloupcovou hodnotu, singulární čísla



$$A^{(k)} \equiv \sum_{j=1}^k \sigma_j u_j v_j^T, \quad k = 1, \dots, 155$$

Použití SVD na kompresi dat

Aproximace fotografie



Matice	co ukládáme	počet ukládaných čísel	paměť
A	$U_{155}, V_{155}, \sigma_{1,\dots,155}$	$(198 + 155 + 1) \times 155$	428 Kb
$A^{(86)}$	$U_{86}, V_{86}, \sigma_{1,\dots,86}$	$(198 + 155 + 1) \times 86$	237 Kb
$A^{(40)}$	$U_{40}, V_{40}, \sigma_{1,\dots,40}$	$(198 + 155 + 1) \times 40$	110 Kb
$A^{(10)}$	$U_{10}, V_{10}, \sigma_{1,\dots,10}$	$(198 + 155 + 1) \times 10$	27.6 Kb

Cvičení

5.1 Dokažte, že pro libovolnou komplexní matici $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ platí

$$\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A), \quad \mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*).$$

5.2 Dokažte, že pro libovolnou komplexní matici $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ platí

$$\mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*), \quad \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A).$$

5.3 Dokažte

$$\|A_j\| = \|A_j\|_F = \sigma_j, \quad \text{kde} \quad A_j = \sigma_j u_j v_j^*.$$

5.4 Dokažte

$$\|A\| = \sigma_1$$

přímo z definice maticové normy.

Cvičení

5.5 Odvoďte vztah mezi spektrálním a singulárním rozkladem matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ v následujících případech:

- ① A je hermitovská,
- ② A je hermitovská a navíc pozitivně semidefinitní.

5.7 Ukažte, že $A^\dagger$ splňuje tzv. Moore-Penroseovy podmínky:

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A, & (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger, \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, & (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A. \end{aligned}$$

5.9 Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n < m$, je matice s lineárně nezávislými řádky. Ukažte, že platí $A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$.

5.10 Dokažte, že každá regulární matice A s podmíněností rovnou jedné je normální a je (nenulovým) skalárním násobkem unitární matice.