Využití FOURIEROVÝCH řad pro znázornění spekter

Fourierovy řady (dále FŘ) slouží k náhradě časových funkcí součtem harmonických signálů.

Předpis pro výpočet koeficientů: Libovolná časová funkce (s jistým omezením) se dá převést podle následujícího předpisu na součet sinusovek:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{2\pi}{T}t + b_n \sin n\frac{2\pi}{T}t)$$

Popis některých vlastností předpisu: f (t) musí být časově omezená a musí mít konečný počet nespojitostí 1. druhu. Jednotlivé prvky řady jsou amplitudy pro různé frekvence.

$\frac{a_0}{2}$ - tzv absolutní člen (též střední hodnota pro f = 0 Hz),

složky a_n (kosinové) , b_n (sinové) jsou amplitudy pro tzv harmonické frekvence $\omega_n = n\frac{2\pi}{T}$ $\quad a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt, b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\frac{2\pi}{T}tdt \quad \text{pro n = 1,2,...}$$

Ze vzorců je zřejmé, že se jedná o výpočet amplitud harmonických funkcí.

Preciznější vyjádření vlastností řad - různé varianty zápisu, integrační interval, druh spojitosti a ohraničenosti funkce, definiční obor, konvergence aj. - viz odbornou literaturu z oblasti matematiky.

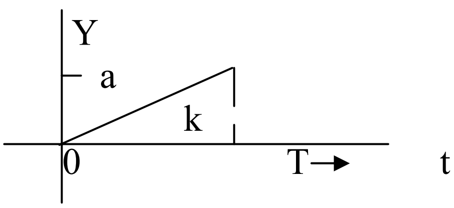
V tomto článku se věnujme vlastnostem těchto řad z hlediska zpracování a měření signálů.

Velmi častým problémem je měření různých časových funkcí.

Tyto funkce (chvění) probíhajících na strojích jsou v podstatě časově neomezené, ale technicky možné je lze změřit po jistou krátkou dobu.

Tyto časově omezené funkce splňují podmínky FŘ a lze tuto funkci vyjádřit součtem harmonických signálů.

Uveďme příklad jednoduše popsatelné funkce a uveďme její vyjádření pomocí FŘ:



Matematické vyjádření:

y = kt $\quad 0 < t < T$

y = 0 $\quad 0 > t > T$

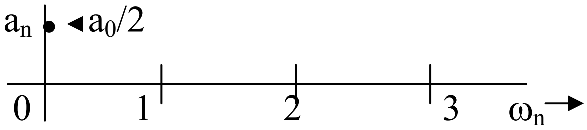
a = maximální hodnota funkce

Rekurentní vzorec dle výše uvedených vztahů je tabelován (viz Matemat. vzorce Bartsch).

$$y(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{T}t + \frac{1}{2}\sin\frac{2\cdot 2\pi}{T}t + \frac{1}{3}\sin\frac{3\cdot 2\pi}{T}t + ... \right)$$

Z něho je patrno, že funkce y(t) obsahuje absolutní člen $\frac{a_0}{2} = \frac{a}{2}$ a záporné členy b_n o velikosti $b_n = -\frac{a}{\pi n}$. Náhrada funkce obsahuje jen členy sinové, proto se tato funkce nazývá lichá (souměrná kolem počátku) a je posunutá v ose y. Uvedený příklad funkce je funkce časově omezená, neperiodická, zápis pomocí FŘ jí vnutí základní periodicitu. Z tohoto důvodu nás zajímá oblast jen v základním intervalu. Harmonický signál $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ je obecně určen parametry A, ω,φ a proměnnou t. Tyto parametry FŘ určí jen pro diskrétní hodnoty n (přirozená řada). Parametry $\frac{a_0}{2}$, a_n, b_n můžeme vyjádřit v závislosti na frekvencích: sledujte náš příklad:

Nechť a = 1 pak



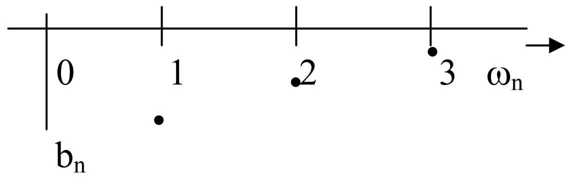
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2},$$

kde $\omega_1 = \frac{2*\pi}{T}$

$$b_1 = -\frac{1}{\pi} = -0.318;$$

$$b_2 = -\frac{1}{2\pi} = -0.159;$$

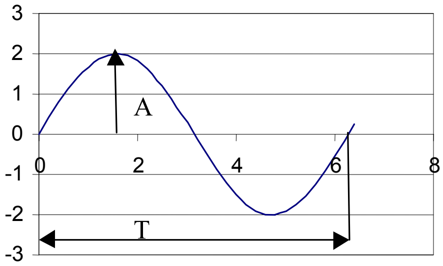
$$b_3 = -\frac{1}{3\pi} = -0.106$$



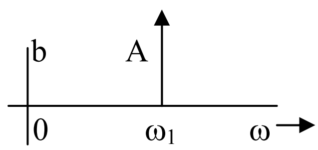
Tyto grafy se nazývají amplitudové spektrum. Spektrum signálu je rozložení amplitud jednotlivých složek podél frekvenční osy. Toto spektrum je jedno a je vyjádřeno obecně dvěma grafy $a_n(\omega)$, $b_n(\omega)$. FŘ. vytváří diskrétní spektrum – (nespojité). Tento myšlenkový postup je třeba dobře pochopit, funkce znázorněná v časové oblasti je zcela rovnocenně znázorněna ve frekvenční oblasti:

Zjednodušeně řečeno spektrum sinusovky je bod.

$$y = A\sin\omega t$$



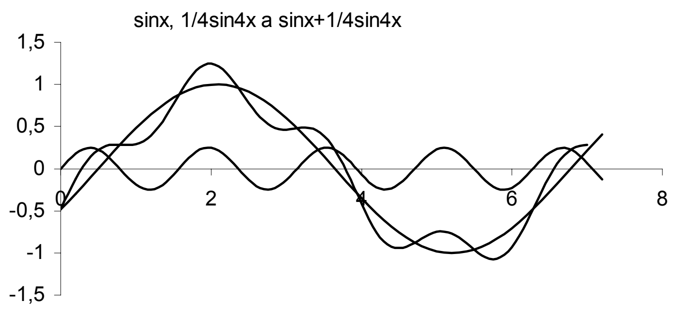
↔



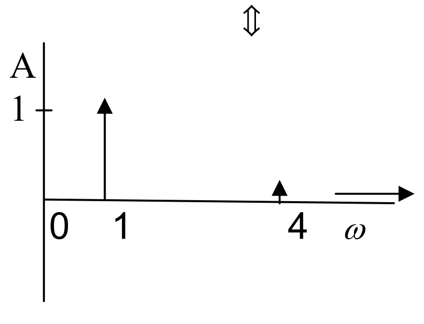
ω_1...se nazývá první harmonická

FŘ vytvoří diskrétní spektra (nespojité). V technické praxi nahrazujeme časové funkce jen do konečného čísla n. Velikost čísla n závisí na přesnosti nahrazení časové funkce a je vždy nutné o tomto uvažovat. Jak je patrno v příkladu některé koeficienty zde chybí (a_n), to je dle charakteru funkce y(t), obsahuje-li či neobsahuje tyto frekvenční složky. Další důležitou vlastností koeficientů je jejich klesající velikost (konvergence).
Grafické vyjádření spektra pomocí a(ω) a b(ω) je jeden z možných způsobů. Snad v praxi více používaný je způsob vyjádření spektra pomocí $A_n(\omega)$ a $\varphi_n(\omega)$.

Spektra ...... a_n, b_n, A_n – se nazývají amplitudová frekvenční spektra
Spektrum ... φ_n se nazývá fázové frekvenční spektrum
vztahy mezi těmito spektry jsou obecně známy; jen pro oživení $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ a $\varphi_n = arctg\dfrac{b_n}{a_n}$ pro n = 1, 2, . . . Toto spektrum je též diskrétní má složku A_n a φ_n
Nejčastěji se používá v praxi jen složka spektra A_n, složku φ_n je u obvodů (členů) s minimální fází možno z A_n odvodit. Značný požadavek z praxe nahrazovat časovou funkci frekvenčním spektrem spočívá v tom, že názornost, rozlišitelnost a velká informační kapacita při analýze signálu právě vynikne z grafů frekvenčních spekter oproti záznamů z časové oblasti. Velmi zjednodušeně řečeno: značně proměnný časový signál převedením do frekvenční oblasti jakoby se zastaví.
V časové oblasti: $y = A_1 \sin\omega_1 t + A_2 \sin\omega_2 t$ se transformuje do frekvenční oblasti takto:

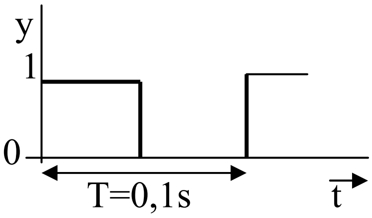


$\Updownarrow$



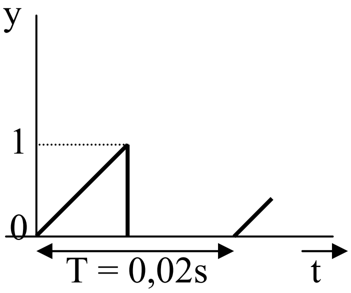
Cvičení: Namalujte frekvenční spektrum časové periodické funkce pro n = 1…10

1)



Pomůcka řešení: y(x) = $\frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}$(sinx + $\frac{1}{3}$sin3x + $\frac{1}{5}$sin5x + …)

2)



Pomůcka řešení: y(x) = $\frac{h}{4} + \frac{h}{\pi}(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - ...)$

$-\frac{2h}{\pi^2}(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + ...)$