Statické a dynamické charakteristiky

1) Úvod : Základy Laplaceovy transformace dále LT: viz lit. 1

hlavní užití: - převádí diferenciální rovnice na algebraické (nehomogenní s konstantními koeficienty)
- usnadňuje řešení technických problémů.

Předpis:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt}\, dt, \quad p = c + j\omega$$ nejsou zde uvedeny všechny vlastnosti viz lit.

Tento předpis převádí časovou funkci f(t) do operátorové oblasti p – funkce F(p)
f(t) se nazývá originál a F(p) se nazývá obraz funkce f(t).

Základní vlastností: násobení konstantou a součet funkcí ponechává.

Derivace v originále se v obraze násobí operátorem p $y'(t) \Rightarrow p \cdot Y(p) - f(+0)$
a obdobně při integraci $\int y(t)\, dt \Rightarrow \frac{Y(p)}{p}$
Při řešení úkolů $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$ používá se slovník (originál $\Leftrightarrow$ obraz)

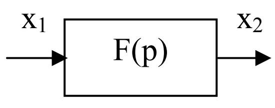
př: Vstupní jednotkový skok: y(t) = K má obraz $\Rightarrow \frac{K}{p}$,

polopřímka (pro $0 < t < \infty$): y(t) = a*t má obraz $\Rightarrow \frac{a}{p^2}$

a další funkce viz operátorový slovník.
Obraz existuje jen pro kladný čas, čili LT řeší problémy od současna do budoucna.

2) Přenos

Definice přenosu: Obecně je přenos podíl výstupní veličiny (signálu) ke vstupní.
U členu na obr. x_1 a x_2 jsou signály (v příslušném druhu transformace).



$$F(p) = \frac{x_2}{x_1}$$

Při řešení technického problému pro lineární systémy získáme diferenciální rovnici:

$$a_n \overset{n}{x_2} + \ldots + a_1 \dot{x}_2 + a_0 x_2 = b_m \overset{m}{x_1} + \ldots b_0 x_1$$ kde

x_2 je výstupní veličina a její derivace a
x_1 je vstupní veličina a její derivace. S využitím LT přejde rovnice na tvar:
$(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0) x_2 = (b_m p^m + \ldots + b_0 p) x_1$
a nyní lze velmi snadno napsat přenos v oblasti p (podíl polynomů):

$$F(p) = \frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0}$$

Pro získávání charakteristik (vlastností) členu se snažíme operátorový přenos převést do frekvenčního tak, že dosadíme za p veličinu jω .

$$F(p) = \frac{x_2\ (p)}{x_1\ (p)} \quad \Rightarrow F(j\omega) = \frac{x_2(j\omega)}{x_1(j\omega)} =$$

operátorový přenos	frekvenční přenos
Komplexní funkce	Komplexní funkce
s komplexním parametrem p	s reálným parametrem ω

Různé vyjádření komplexního přenosu (komplexní funkce) – kartézské, polární,…

$$= A(\omega) + jB(\omega) = R(\omega).e^{\,j\varphi(\omega)} = \mathrm{Re}\,((Fj\omega)) + jI_m(F(j\omega)) = \left|F(j\omega)\right| \quad e^{j\,\mathrm{argument}F(j\omega)}$$

Máme-li frekvenční přenos, můžeme jej nakreslit do grafu jako frekvenční charakteristiku.

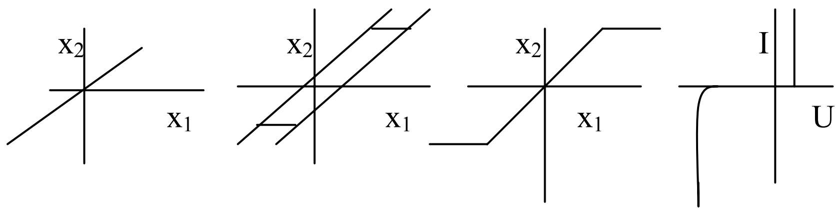
3) Druhy charakteristik: 1**. statické** : závislost výstupní veličiny na vstupní v ustáleném stavu

2. **dynamické**: v časové / ve frekvenční oblasti- závislost veličiny (vstupní i výstupní) na čase / frekvenci

Příklady :

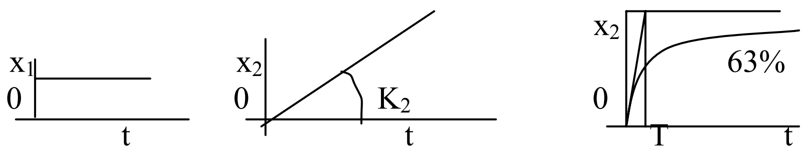
statické

lineární zubová vůle omezení (nasycení) dioda



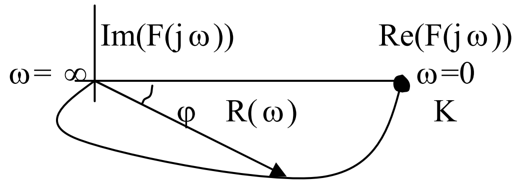
:

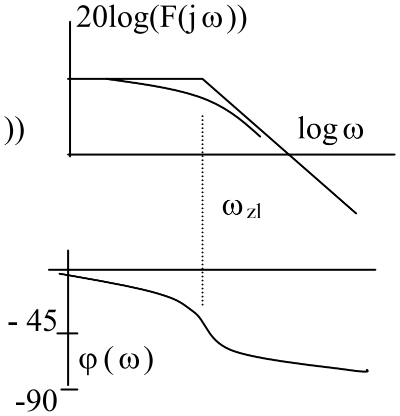
a) v časové oblasti



jednotkový skok odezva integr. členu odezva prop. členu se zpož. 1. řádu

b) ve frekvenční oblasti





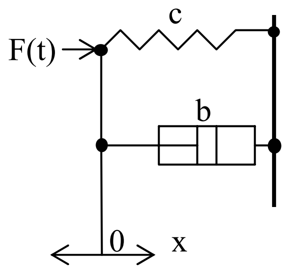
Kreslení charakteristik

Nejčastěji používaný způsob kreslení je:

- do komplexní roviny
- amplituda a fáze do logaritmických souřadnic v závislosti na frekvenci (Boodeho křivky)

Nejsnáze si vysvětlíme kreslení charakteristik různých druhů na jednoduchém příkladu:

Mějme sestavu nehmotná pružina a nehmotný viskózní tlumič (hydraulický tlumič s pružinou). Vypočítejte průběh polohy x jako odezvu na jednotkový vstupní skok síly. Provedeme-li řešení v LT získáme:



F (t) - síla [N]

c - tuhost pružiny $\left[\frac{N}{m}\right]$

b - viskózní tlumení $\left[\frac{N}{\frac{m}{s}}\right]$

F = c x + b x′ ⇒ do LT = (pb + c) X(p) = F(p)

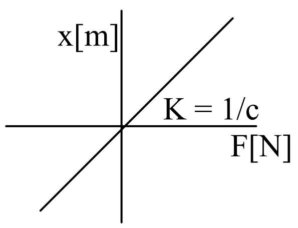
Přenos: $$\frac{x}{F} = \frac{1}{pb+c} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{b}{c}\,.\,p+1} = \frac{K}{Tp+1} \text{ obecně}$$

obecně se jedná o proporcionální člen se zpožděním prvního řádu.

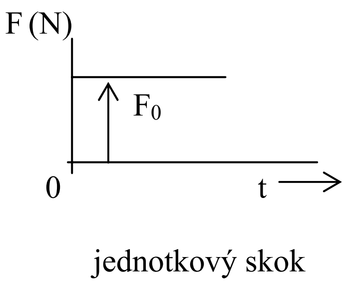
K = zesílení - rozměr v našem případě je $K = \frac{1}{c}\left[\frac{m}{N}\right]$

T = časová konstanta – rozměr (s) $T = \frac{b}{c}[s]$

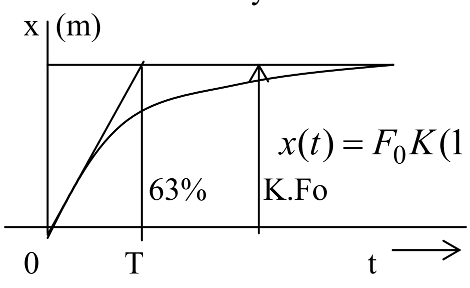
Jedná se o lineární prvek (soustava).
statická charakteristika je závislost výstupní veličiny na vstupní v ustáleném stavu:



Přivedeme-li na vstup jednotkový skok síly (v automobilu nájezd na chodník) získáme řešením tohoto příkladu odezvu:
závislost dráhy x na čase. Toto jsou časové charakteristiky



jednotkový skok



$$x(t) = F_0 K (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

odezva na jednotkový skok členu

Řešením vypočítáme z přenosu x = F.F(p). S použitím slovníku najdeme:

obraz jedn. skoku $F(t) = F_0 \Leftrightarrow F(p) = \dfrac{F_0}{p}$ a dosadíme do výsledné rovnice

$x(p) = \dfrac{F_0}{p}\dfrac{K}{Tp+1}$ a opět s využitím slovníku převedeme x(p) do x(t): $\dfrac{a}{p(p+a)} \Leftrightarrow 1 - e^{-at}$

viz vzorec u obrázku odezvy (přechodové charakteristiky).

Odezva je dynamická charakteristika v našem případě členu 1. řádu (velikost K a T). Můžeme-li změřit odezvu můžeme získat dynamické vlastnosti soustavy (dlužno říci, že pro vyšší řády získávání těchto vlastností se ztěžuje, je mnoho programů, metod jež toto řeší.)

Odezva 1. řádu je prakticky ustálená za dobu 3 až 5T, podle požadavku přesnosti (5% až 1%).

Ve **frekvenční oblasti** si musíme uvědomit, že velikost přenosu je závislá na frekvenci :
pro $\omega \Rightarrow 0$ jedná se o statické stavy a při vyšších frekvencích se řeší dynamika.

Provedeme-li převod signálu z časové oblasti do frekvenční a znázorníme-li velikost signálu na frekvenci získáme **frekvenční spektrum** – vlastnost signálu.

Provedeme-li převod přenosu členu z časové oblasti do frekvenční získáme **frekvenční charakteristiku členu** – vlastnost členu.

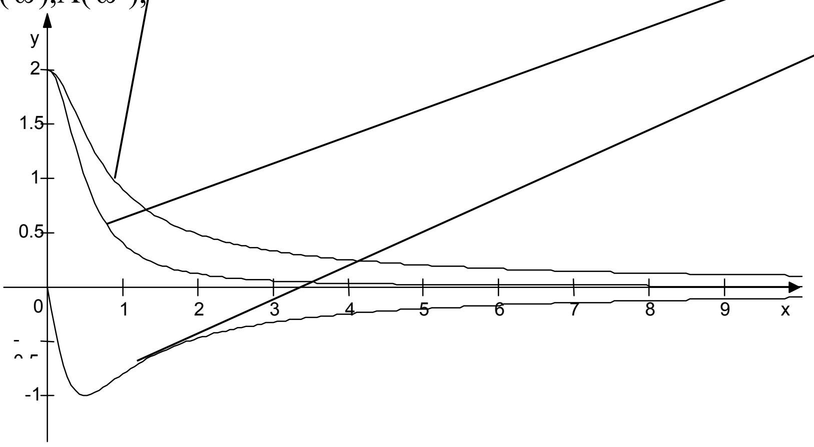
Pro převod signálu z časové do frekvenční oblasti slouží zejména Fourierovy řady, Fourierova transformace (FFT), Laplaceova transformace (v operátorovém přenosu nahradíme p parametrem jω.)

$$F(p) = \frac{K}{T\,p+1} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{K}{j\omega T+1} = \frac{K(1-j\omega T)}{1+\omega^2 T^2} = \frac{K}{1+\omega^2 T^2} - j\frac{K\omega T}{1+\omega^2 T^2} =$$

$$= \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot e^{-j\,arctg\,\omega T}$$

R(ω) φ(ω) =-arctgωT A(ω)

B(ω),A(ω),

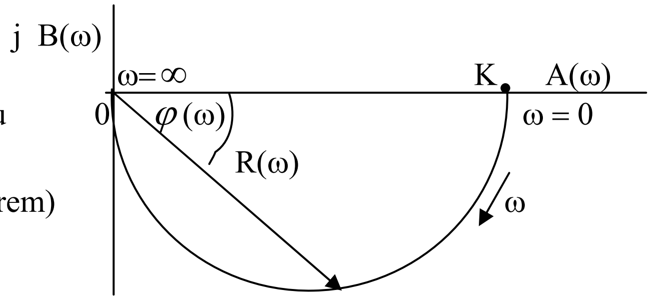


Průběhy amplitudových charakteristik našeho příkladu v závislosti na frekvenci v lineárních souřadnicích

kde $R(\omega) = |F(j\omega)|; A(\omega) = \mathrm{Re}\{F(j\omega)\}; B(\omega) = \mathrm{Im}\{F(j\omega)\}$

Znázorníme-li velikost vektoru R (ω), A(ω) a B(ω) do grafu získáme amplitudovou charakteristiku a obdobně φ(ω) získáme fázovou charakteristiku.

Překreslením výše uvedeného obrázku do komplexní roviny získáme frekvenční charakteristiku v komplexní rovině : křivka je určena parametricky (ω je parametrem)



Jisté potíže při kreslení frekvenčních charakteristik jsou při použití logaritmických souřadnic. Tyto charakteristiky jsou v praxi velmi oblíbené, protože je zde dobrá rozlišitelnost ve více dekádách a jednoduché sestrojování.

Princip : provedeme logaritmus frekvenčního přenosu ve tvaru $F(j\omega) = R \cdot e^{j\varphi}$

$$\ln F(j\omega) = \ln |F(j\omega)| \quad + \quad j\,\varphi(\omega) = \ln R(\omega) + j \operatorname{artg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$

Na svislou osu nejčastěji vynášíme decibely (dB) , což je 20 . log $|F(j\omega)|$ - amplitudová charakteristika.

Na vodorovnou osu vynášíme log ω, úhel φ(ω) se vynáší na svislou lineární osu,

v našem případě je $|F(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$, φ(ω) = - arctg ω T

Při kreslení amplitudové charakteristiky do log. souřadnic používáme často decibely. (Definice decibelu dB = $10\log\dfrac{P_2}{P_1} \Rightarrow$ kde P_1 a P_2 jsou vstupní a výstupní výkony. Ale používají se základní signály – U, I, p, aj., kde se výkon vypočítá např. pro I je $P = R.I^2$ po dosazení do vzorce pro decibely pozmění se vzorec na dB = 20 log U_2/U_1.)

Amplitudová charakteristika má tvar: viz. následující obrázek

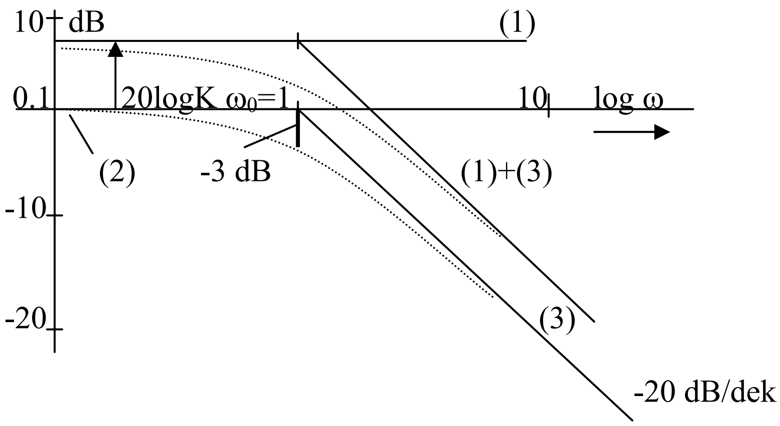
$$20\log|F(j\omega)| = 20\log\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} = 20\log K - 20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

skládá se ze dvou složek: z konstanty : 20log K (1), tato vytváří posun po svislé ose, a funkce:

- $20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$ – tvoří průběh charakteristiky v log. souřadnicích. Průběh funkce si pro vysvětlení rozdělíme na dva úseky (dělící bod se nazývá bod zlomu) : $\omega^2T^2 \gg 1$ a $\omega^2T^2 \ll 1$.

$$-20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} = \begin{cases} \omega^2T^2 \gg 1 \ \ldots -20\log \omega T & (2) \\ \omega^2T^2 = 1 \ \ldots \omega_z = 1/T \quad \text{bod zlomu} & \\ \omega^2T^2 \ll 1 \ \ldots -20\log 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Bod, který jsme neuvažovali je $\omega^2T^2 = 1 \Rightarrow$ -20log $\sqrt{1+1}$ = - 3 dB. Tomuto bodu se říká bod zlomu, kde $\omega = 1/T$ a protože polopřímky (2) a (3) jsou vlastně asymptotami amplitudové charakteristiky (čárkovaná čára), můžeme nakreslit graf.



Výsledná char. je dána součtem přímky (1) a polopřímky (3); asymptota (2) je stále nulová, asymptota (3) je polopřímka se sklonem –20dB/dekádu.(Důkaz, že je (3) přímka je patrné z následujícího: y= -20log ωT = -20log ω - 20log T …= Kx+q.)

Výsledný průběh (přesný) se nahrazuje přímkovými úseky – maximální nepřesnost je 3 dB v bodě zlomu. Stačí tedy zjistit z přenosu body zlomu a výsledná amplitudová charakteristika se narýsuje z částí přímek. Fázová frekvenční char. v log. souřadnicích se dá z amplitudové odvodit proto ji často nekreslíme (!! platí jen pro lineární systémy – obvody s minimální fází!!).