MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Bayesovské metody v cenzorovaných výběrech

Diplomová práce

1995

Michal Friesl

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.,
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, MFF UK v Praze
Obor: Matematika
Zaměření: Teorie pravděpodobnosti a náhodné procesy

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a nepoužil jsem jiné než uvedené literatury. Se zapůjčováním diplomové práce souhlasím.

Programové vybavení vytvořené v rámci diplomové práce mají pracovníci katedry právo volně používat pro svou další nekomerční práci.

Praha, duben 1995.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

OBSAH

1. Úvod **4**

2. Základní poznatky **6**

2. 1. Některá rozdělení 6

2. 2. Pojmy z teorie spolehlivosti 8

2. 3. Bayesovské metody 11

2. 4. Bayesovské odhady 14

3. Exponenciální rozdělení **16**

3. 1. Konjugované apriorní rozdělení pro λ a γ 17

3. 2. Nezávislá gama rozdělení pro λ a γ 24

3. 3. Jeffreysova hustota 27

3. 4. Asymptotické chování odhadů 33

3. 5. Simulace 37

Literatura **42**

1. ÚVOD

Při klasickém řešení statistického problému máme k dispozici výsledky úplného náhodného výběru z nějakého rozdělení. V některých situacích ale potřebujeme vyhodnotit experiment ještě předtím, než nastanou všechny sledované události; dostáváme tak neúplný výběr. Podle toho, jaká pravidla si určíme pro ukončení sledování, pracujeme s různými modely cenzorování. Máme-li ještě k dispozici nějaké apriorní informace o charakteristikách zkoumaného rozdělení, pokusíme se jich využít a aplikujeme bayesovské metody.

V této diplomové práci se budeme zabývat aplikací bayesovských metod v Koziol-Greenově modelu náhodného cenzorování při exponenciálním rozdělení, to znamená: budeme hledat odhady střední hodnoty tohoto exponenciálního rozdělení (případně jejích ekvivalentů) a odhady parametru Koziol-Greenova modelu.

Po seznámení se s použitým označením některých rozdělení uvedeme pojmy, se kterými pracuje teorie spolehlivosti, popíšeme základní modely cenzorování (věnovat se pak ale budeme pouze Koziol-Greenovu modelu náhodného cenzorování), z bayesovských metod se budeme věnovat volbě apriorní hustoty (dané často spíše našimi výpočetními možnostmi) a určení odhadu. Základem pro tuto část práce mi byly přednášky, které jsem navštěvoval, věnované daným tématům a příslušná literatura.

Poznatky z první části budeme aplikovat na výběr z exponenciálního rozdělení. I při takovémto poměrně jednoduchém rozdělení však nebudou výpočty nejsnazší. Tvar věrohodnostní funkce v Koziol-Greenově modelu nedává mnoho možností volby apriorní hustoty tak, abychom dostali jednoduchou aposteriorní hustotu. Samozřejmě by se vše mohlo zjednodušit, kdybychom ustoupili od náhodného cenzorování k cenzorování časem nebo poruchou. O tom se lze dočíst např. v [7]. Nicméně řadu prakticky použitelných odhadů je možné vyjádřit v explicitním tvaru.

Budeme se věnovat několika typům apriorních hustot. Dvě z nich vyplývají z obecné teorie bayesovských metod — hustota získaná metodou konjugovaného systému, kde uvedeme také limitní chování bayesovských rizik, a hustota získaná podle Jeffreysova principu, která však vyjde nevlastní (a proto můžeme těžko hovořit o bayesovském riziku). Dokonce i při jejím zobecnění ještě dospějeme k rozumným tvarům odhadů.

U obou těchto typů apriorních hustot dokážeme asymptotickou normalitu odhadů.

Při volbě nezávislých gama rozdělení pro parametry exponenciálního rozdělení a Koziol-Greenova modelu sice k odhadům dospějeme, jejich složitost však umožní pouze ukázat konvergenci ke „správným“ hodnotám. (Tu dokážeme také pro předchozí dva typy hustot.) O chování bayesovských rizik si můžeme udělat představu ze simulací při vybraných hodnotách parametrů apriorních rozdělení.

Závěrem bych chtěl poděkovat doc. J. Hurtovi za vedení diplomové práce, za jeho náměty, rady a připomínky, a také všem ostatním vyučujícím za vše, co jsem se díky jejich přednáškám a cvičením naučil.

2. ZÁKLADNÍ POZNATKY

2.1. Některá rozdělení

V této kapitole pouze uvedeme rozdělení použitá v dalším — jejich označení, hustotu, střední hodnotu a rozptyl.

Gama rozdělení $G(a,q)$**.** Gama rozdělení s parametry $a > 0$, $p > 0$ má hustotu

$$\frac{a^q}{\Gamma(q)} x^{q-1} e^{-ax} \ , x > 0.$$

Jeho střední hodnota je

$$EG(a,q) = \int_0^\infty \frac{a^q}{\Gamma(q)} x^q e^{-ax} dx = \frac{a^q}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(q+1)}{a^{q+1}} = \frac{q}{a};$$

$$E(G(a,q))^2 = \int_0^\infty \frac{a^q}{\Gamma(q)} x^{q+1} e^{-ax} dx = \frac{a^q}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(q+2)}{a^{q+2}} = \frac{(q+1)q}{a^2},$$

a tedy rozptyl je

$$\text{var } G(a,q) = \frac{(q+1)q}{a^2} - \left(\frac{q}{a}\right)^2 = \frac{q}{a^2}.$$

Logaritmické gama rozdělení $LG(a,q)$**.** Pokud má náhodná veličina X rozdělení $G(a,q)$, pak rozdělení náhodné veličiny $Y = e^{-X}$ je logaritmické gama rozdělení s parametry $a > 0$, $q > 0$, značme ho $LG(a,q)$. To má hustotu

$$\frac{a^q}{\Gamma(q)} (-\ln y)^{q-1} y^a \frac{1}{y} \ , y \in (0,1),$$

střední hodnotu

$$ELG(a,q) = \int_0^1 \frac{a^q}{\Gamma(q)} (-\ln y)^{q-1} y^a dy = \frac{a^q}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(q)}{(a+1)^q} = \left(\frac{a}{a+1}\right)^q;$$

$$E(LG(a,q))^2 = \int_0^1 \frac{a^q}{\Gamma(q)} (-\ln y)^{q-1} y^{a+1} dy = \frac{a^q}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(q)}{(a+2)^q} = \left(\frac{a}{a+2}\right)^q,$$

a tedy

$$\text{var } LG(a,q) = \left(\frac{a}{a+2}\right)^q - \left(\frac{a}{a+1}\right)^{2q}.$$

Inverzní gama rozdělení $IG(a,q)$**.** Pokud má náhodná veličina X rozdělení $G(a,q)$, pak rozdělení náhodné veličiny $Z = 1/X$ je inverzní gama rozdělení s parametry $a > 0$, $q > 0$, značme ho $IG(a,q)$. To má hustotu

$$\frac{a^q}{\Gamma(q)} \frac{1}{z^{q-1}} \frac{1}{z^2} e^{-a/z} \ , z > 0,$$

při $q > 1$ střední hodnotu

$$EIG(a,q) = \int_0^\infty \frac{a^q}{\Gamma(q)} \frac{1}{z^q} e^{-a/z} dz = \frac{a^q}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(q-1)}{a^{q-1}} = \frac{a}{q-1};$$

při $q > 2$ existuje také druhý moment

$$E(IG(a,q))^2 = \int_0^\infty \frac{a^q}{\Gamma(q)} \frac{1}{z^{q-1}} e^{-a/z} dz = \frac{a^q}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(q-2)}{a^{q-2}} = \frac{a^2}{(q-1)(q-2)},$$

a tudíž také rozptyl

$$\text{var } IG(a,q) = \frac{a^2}{(q-1)(q-2)} - \frac{a^2}{(q-1)^2} = \frac{a^2}{(q-1)^2(q-2)}.$$

Beta rozdělení $B(r,s)$**.** Beta rozdělení s parametry $r > 0$, $s > 0$ má hustotu

$$\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1} \ , x \in (0,1).$$

Jeho střední hodnota je

$$EB(a,q) = \int_0^1 \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^r (1-x)^{s-1} dx = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s+1)} = \frac{r}{r+s};$$

$$\begin{aligned} E(B(a,q))^2 &= \int_0^1 \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^{r+1}(1-x)^{s-1} dx = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \frac{\Gamma(r+2)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s+2)} = \\ &= \frac{(r+1)r}{(r+s+1)(r+s)}, \end{aligned}$$

a tedy rozptyl je

$$\text{var } B(a,q) = \frac{(r+1)r}{(r+s+1)(r+s)} - \left(\frac{r}{r+s}\right)^2 = \frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}.$$

Beta rozdělení druhého řádu $B2(r,s)$**.** Pokud má náhodná veličina X rozdělení $B(r,s)$, pak rozdělení náhodné veličiny $V = 1/X - 1$ je beta rozdělení druhého řádu s parametry $r > 0$, $s > 0$, značme ho $B2(r,s)$. To má hustotu

$$\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \frac{v^{s-1}}{(1+v)^{r+s}} \quad , v > 0,$$

při $r > 1$ střední hodnotu

$$EB2(r,s) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \frac{v^s}{(1+v)^{r+s}} dv = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \frac{\Gamma(r-1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s)} = \frac{s}{r-1};$$

při $r > 2$ existuje také druhý moment

$$E(B2(r,s))^2 = \int_0^\infty \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \frac{v^{s+1}}{(1+v)^{r+s}} dv = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \frac{\Gamma(r-2)\Gamma(s+2)}{\Gamma(r+s)} =$$
$$= \frac{(s+1)s}{(r-1)(r-2)},$$

a tedy rozptyl je

$$\text{var } B2(r,s) = \frac{(s+1)s}{(r-1)(r-2)} - \left(\frac{s}{r-1}\right)^2 = \frac{s(r+s-1)}{(r-1)^2(r-2)}.$$

2.2. Pojmy z teorie spolehlivosti

Uvažujme nezápornou náhodnou veličinu X, představující dobu do poruchy, s distribuční funkcí $F(x) = P[X < x]$ a s hustotou $f(x)$. Funkci

$$R(x) = 1 - F(x)$$

nazýváme funkcí spolehlivosti. Těmito a dalšími funkcemi se budeme zabývat jen na intervalu $(0, \infty)$, protože jejich hodnoty na $(-\infty, 0)$ jsou zřejmé díky nezápornosti náhodné veličiny X (např. $F(x) = 0$, $R(x) = 1$ pro $x < 0$).

Dále definujme intenzitu poruch

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \text{ pro } x \in \{t; F(t) < 1\},$$

která vyjadřuje pravděpodobnost poruchy v následujícím okamžiku, nenastala-li dosud porucha, jako $r(x)h + o(h)$ při $h \to 0$:

$$P[X \in \langle x, x+h) | X \geq x] = \frac{P([X \in \langle x, x+h)] \cap [X \geq x])}{P[X \geq x]} =$$
$$= \frac{P[X \in \langle x, x+h)]}{1 - F(x)} = \frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x)} =$$
$$= \frac{1}{1 - F(x)} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} h =$$
$$= \frac{f(x)}{1 - F(x)} h + o(h) \text{ při } h \to 0,$$

neboť $f(x) = dF(x)/dx$.

Mezi spolehlivostí $R(x)$ a intenzitou $r(x)$ platí vztah

$$R(x) = e^{-\int_0^x r(t)dt}, x \in \{t; F(t) < 1\},$$

neboť z definice spolehlivosti $r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{-dR(x)}{dx}\frac{1}{R(x)}$ a vyřešením této diferenciální rovnice pro funkci $R(x)$ dostaneme $\ln R(x) = C_1 - \int_0^x r(t)dt$, kde $C_1 = \lim_{x\to 0} \ln R(x) = \ln 1 = 0$; pro hustotu doby do poruchy platí

$$f(x) = r(x)e^{-\int_0^x r(t)dt},$$

neboť $f(x) = r(x)R(x)$.

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělění nezáporné náhodné veličiny X s distribuční funkcí $F_{\boldsymbol{\theta}}$ a hustotou $f_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ parametr. Při rozhodování o parametrech jejího rozdělení nemáme vždy k dispozici hodnoty všech veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$, můžeme znát pouze některé a o dalších mít jen částečnou informaci — došlo-li k cenzorování dat (např. že přesahují nějakou hodnotu — když byl experiment ukončen dříve než došlo k poruše). Rozlišujeme několik modelů cenzorování.

Cenzorování typu I. Při cenzorování typu I — časem — je pozorování ukončeno v čase T, který je pevně dán. Pokud $r = \sum_{j=1}^n \chi_{[X_j \le T]}$ označíme náhodnou veličinu udávající počet hodnot z $X_1, X_2, \ldots, X_n$, které jsou menší nebo rovny T, tj. počet poruch, které nastaly nejpozději v okamžiku T, známe prvních r hodnot $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(r)}$, kde $X_{(j)}$ označuje j-tou pořádkovou statistiku, a o ostatních víme pouze to, že jsou větší než T — $X_{(j)} \ge T$, $j > r$. Rozdělení náhodné veličiny r je binomické s parametry n a $F_{\boldsymbol{\theta}}(T)$:

$$\begin{aligned} P[r = k] &= P[\sum_{j=1}^n \chi_{[X_j \le T]} = k] = \\ &= P[\text{právě } k \text{ hodnot z } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ je menších nebo rovno } T] = \\ &= \binom{n}{k} P[X \le T]^k (1 - P[X \le T])^{n-k}, \end{aligned}$$

neboť $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ byly nezavislé a se stejným rozdělením jako X. Věrohodnostní funkce má tvar

$$L(\boldsymbol{\theta}|r, X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(r)}) = \prod_{j=1}^r f_{\boldsymbol{\theta}}(X_{(j)})(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(T))^{n-r}.$$

Cenzorování typu II. Při cenzorování typu II — poruchou — je naopak pevně dán počet poruch r. O hodnoty $X_{(r+1)} \le \cdots \le X_{(n)}$, které jsou větší než čas r-té poruchy $X_{(r)}$, se už nezajímáme. Máme tedy informace o prvních r hodnotách $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(r)}$, o ostatních víme, že jsou větší než $X_{(r)}$. Věrohodnostní funkce má tvar

$$L(\boldsymbol{\theta}|X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(r)}) = \prod_{j=1}^r f_{\boldsymbol{\theta}}(X_{(j)})(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(X_{(r)}))^{n-r}.$$

Náhodné cenzorování. V případě náhodného cenzorování sledujeme kromě doby do poruchy X ještě další nezápornou náhodnou veličinu T nezávislou na X, s distribuční funkcí $G_{\boldsymbol{\tau}}(t) = P[T < t]$ a hustotou $g_{\boldsymbol{\tau}}(t)$, představující časový cenzor. Náhodná veličina

$$W = \min\,(X, T)$$

nechť má hodnotu prvního z okamžiků poruchy, nebo cenzorování a

$$I = \chi_{[X \le T]}$$

nechť rozlišuje, zda okamžik W byl časem poruchy nebo časem cenzorování.

Vektor (W, I) má hustotu

$$h_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\tau}}(w,i) = \left[f_{\boldsymbol{\theta}}(w)\big(1 - G_{\boldsymbol{\tau}}(w)\big)\right]^i \left[g_{\boldsymbol{\tau}}(w)\big(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w)\big)\right]^{1-i}, w > 0, i \in \{0,1\}$$

vzhledem k součinové míře Lebesgueova $\times$ čítací:

$$\begin{aligned} P[W < w, I = 1] &= P[\min(X,T) < w, X \le T] = P[X < w, X \le T] = \\ &= \iint_{x \le t, x < w} dF_{\boldsymbol{\theta}}(x) dG_{\boldsymbol{\tau}}(t) = \int_{0<x<w} \left(\int_x^\infty dG_{\boldsymbol{\tau}}(t) \right) dF_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \\ &= \int_0^w (1 - G_{\boldsymbol{\tau}}(x)) dF_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \int_0^w (1 - G_{\boldsymbol{\tau}}(x)) f_{\boldsymbol{\theta}}(x) dx, \end{aligned}$$

tedy $h_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\tau}}(x,1) = (1 - G_{\boldsymbol{\tau}}(x)) f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$. Podobně $P[W < w, I = 0] = \int_0^w (1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(x)) g_{\boldsymbol{\tau}}(x) dx$, a tedy $h_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\tau}}(x,0) = (1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(x)) g_{\boldsymbol{\tau}}(x)$.

Označíme-li (W_j, I_j) náhodný vektor, který vznikne z (X_j, T_j) stejně jako (W, I) z (X, T), kde $(X_1, T_1), \ldots, (X_n, T_n)$ je náhodný výběr z rozdělení náhodného vektoru (X, T) a tedy $(W_1, I_1), \ldots, (W_n, I_n)$ je náhodný výběr z rozdělení náhodného vektoru (W, I), má věrohodnostní funkce tvar

$$\begin{aligned} &L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau} | (W_1, I_1), \ldots, (W_n, I_n)) = \\ &\quad = \prod_{j=1}^n \left[\big(1 - G_{\boldsymbol{\tau}}(W_j)\big) f_{\boldsymbol{\theta}}(W_j)\right]^{I_j} \left[\big(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(W_j)\big) g_{\boldsymbol{\tau}}(W_j)\right]^{1-I_j} = \\ &\quad = \prod_{\{j; I_j = 1\}} \left[\big(1 - G_{\boldsymbol{\tau}}(W_j)\big) f_{\boldsymbol{\theta}}(W_j)\right] \prod_{\{j; I_j = 0\}} \left[\big(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(W_j)\big) g_{\boldsymbol{\tau}}(W_j)\right]. \end{aligned}$$

Není-li závislost mezi parametry $\boldsymbol{\theta}$ doby do poruchy a $\boldsymbol{\tau}$ časového cenzoru, lze při značení

$$L_1(\boldsymbol{\theta} | (W_1, I_1), \ldots, (W_n, I_n)) = \prod_{j=1}^n [f_{\boldsymbol{\theta}}(W_j)^{I_j} (1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(W_j))^{1-I_j}],$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta} | (W_1, I_1), \ldots, (W_n, I_n)) = \prod_{j=1}^n [g_{\boldsymbol{\tau}}(W_j)^{1-I_j} (1 - G_{\boldsymbol{\tau}}(W_j))^{I_j}]$$

psát

$$\begin{aligned} &L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau} | (W_1, I_1), \ldots, (W_n, I_n)) = \\ &\qquad = L_1(\boldsymbol{\theta} | (W_1, I_1), \ldots, (W_n, I_n)) L_2(\boldsymbol{\theta} | (W_1, I_1), \ldots, (W_n, I_n)). \end{aligned}$$

Koziol-Greenův model. Speciálním případem modelu náhodného cenzorování je Koziol-Greenův model, který předpokládá, že existuje číslo $\gamma > 0$ takové, že pro funkci spolehlivosti časového cenzoru T platí (zapsáno pomocí distribučních funkcí)

$$1 - G_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(t) = (1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(t))^{\gamma}.$$

Místo parametru γ lze uvažovat parametr

$$p = P[X \leq T] \in (0, 1),$$

podíl necenzorovaných pozorování, neboť je mezi nimi jednoznačný vztah:

$$\begin{aligned} p = P[X \leq T] &= \iint_{x<t} dF_{\boldsymbol{\theta}}(x) dG_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(t) = \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} dG_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(t) \right) dF_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \\ &= \int_0^{\infty} (1 - G_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(x)) dF_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \int_0^{\infty} (1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(x))^{\gamma} dF_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \int_0^1 (1-y)^{\gamma} dy = \\ &= \frac{1}{1+\gamma}, \end{aligned}$$

kde jsme použili substituci $F_{\boldsymbol{\theta}}(x) = y$. Hustotu (W, I) lze pak psát jako

$$\begin{aligned} h_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(w, i) &= [f_{\boldsymbol{\theta}}(w)(1 - G_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(w))]^i [g_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(w)(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))]^{1-i} = \\ &= [f_{\boldsymbol{\theta}}(w)(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))^{\gamma}]^i [\gamma(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))^{\gamma-1} f_{\boldsymbol{\theta}}(w)(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))]^{1-i} = \\ &= f_{\boldsymbol{\theta}}(w)(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))^{\gamma} \gamma^{1-i}, \end{aligned}$$

neboť hustota T je

$$\begin{aligned} g_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(w) &= \frac{dG_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(w)}{dw} = -\frac{d(1 - G_{\boldsymbol{\theta},\gamma}(w))}{dw} = -\frac{(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))^{\gamma}}{dw} = \\ &= -\gamma(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))^{\gamma-1} \frac{d(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))}{dw} = -\gamma(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))^{\gamma-1}(-f_{\boldsymbol{\theta}}(w)) = \\ &= \gamma(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(w))^{\gamma-1} f_{\boldsymbol{\theta}}(w), \ w \in \{t; F_{\boldsymbol{\theta}}(t) < 1\}. \end{aligned}$$

Věrohodnostní funkce má tedy tvar

$$L(\boldsymbol{\theta}, \gamma | (W_1, I_1), \ldots, (W_n, I_n)) = \prod_{j=1}^{n} f_{\boldsymbol{\theta}}(W_j)(1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(W_j))^{\gamma} \gamma^{n - \sum_{j=1}^{n} I_j}.$$

2.3. Bayesovské metody

V bayesovském přístupu předpokládáme, že odhadovaný parametr $\boldsymbol{\theta}$ je náhodná veličina. Apriorní informace o něm je obsažena v apriorní hustotě $q(\boldsymbol{\theta})$. Na základě pozorovaných dat, přičemž pro bayesovskou analýzu je postačující znalost sdružené hustoty výsledku experimentu $f((*)|\boldsymbol{\theta})$ (kde $(*)$ může být

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, nebo $\{ X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(r)}, X_{(r+1)} > T\}$ v případě cenzorování typu I atd.), pak sestrojíme aposteriorní hustotu užitím bayesovského principu

$$q(\boldsymbol{\theta}|(*)) = \frac{q(\boldsymbol{\theta})f((*)|\boldsymbol{\theta})}{\int q(\boldsymbol{t})f((*)|\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}} \text{ tam, kde } \int q(\boldsymbol{t})f((*)|\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t} \neq 0,$$

jak se lze dozvědět např. v [4].

Z tohoto vzorce je vidět, že v průběhu počítání aposteriorní hustoty $\boldsymbol{\theta}$ při daném $(*)$ můžeme opominout činitele v $q(\boldsymbol{\theta})$ a $f((*)|\boldsymbol{\theta})$, které nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$ (tj. případně mohou záviset na $(*)$), neboť se stejně pokrátí. Ale i při práci s jinými hustotami lze pracovat pouze s činiteli závisejícími na proměnné a až v závěru dopočítat normovací konstantu tak, aby integrál z dané funkce byl roven jedné. Navíc se v bayesovských metodách používají i nevlastní hustoty — nezáporné funkce, jejichž integrál je nekonečný — které mohou poskytnout vlastní aposteriorní hustotu. Rovnost dvou nezáporných funkcí, které se až na násobení kladnou konstantou nezávislou na proměnné neliší, budeme značit „$\sim$“ (např hustota exponenciálního rozdělení $f(x|\lambda) = \lambda e^{-x\lambda} \sim e^{-x\lambda}, x > 0$).

Apriorní hustota by měla odrážet naše dosavadní znalosti o $\boldsymbol{\theta}$. Při nedostatku informací o $\boldsymbol{\theta}$ nebo pro usnadnění výpočtu se používají i jiné volby apriorní hustoty a to i takové, které vlastními hustotami nejsou. I přesto pro tyto nevlastní hustoty použijeme Bayesův vzorec, pokud $0 < \int q(\boldsymbol{\theta})f((*)|\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} < \infty$.

Konjugovaný systém. Jedním z možných způsobů volby apriorní hustoty je metoda systému konjugovaného s $f((*)|\boldsymbol{\theta})$. Je to systém hustot, který splňuje požadavek, že při apriorní hustotě z tohoto systému dostaneme aposteriorní hustotu, která do něj také náleží. Pro hustoty tvaru

$$f_n(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} r(x_i|\boldsymbol{\theta}) = q_n(\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta})h_n(\boldsymbol{x}),$$

kde $\boldsymbol{x}$ je n-rozměrný vektor a $\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{x})$ p-rozměrná postačující statistika, q_n, h_n nezáporné funkce, je takovým systémem

$$\boldsymbol{Q} = \{q_n(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\theta});\ \text{existuje } \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}_n, \text{ že } \boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{t}, n \in \mathbf{N}\}.$$

(Zvolíme-li za apriorní hustotu $q_m(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\theta})$, existuje $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}_m$, že $\boldsymbol{T}_m(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{t}$ a aposteriorní hustota je

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) &\sim q_m(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\theta})f_n(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}) = q_m(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\theta})q_n(\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta})h_n(\boldsymbol{x}) \sim \\ &\sim q_m(\boldsymbol{T}_m(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{\theta})h_m(\boldsymbol{y})q_n(\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta})h_n(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{m+n} r((\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})|\boldsymbol{\theta}) \sim \\ &\sim q_{m+n}(\boldsymbol{T}_{m+n}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta}) \in \boldsymbol{Q}.) \end{aligned}$$

Často však použijeme širší systém získaný přechodem od případných diskrétních hodnot parametrů apriorní hustoty $n, \boldsymbol{t}$ ke spojitým.

Princip neurčitosti. Jinou možnost poskytuje princip neurčitosti, který přisuzuje všem možným hodnotám parametru $\boldsymbol{\theta}$ tutéž pravděpodobnost

$$q(\boldsymbol{\theta}) = 1, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta},$$

kde $\boldsymbol{\Theta}$ je množina možných hodnot parametru $\boldsymbol{\theta}$. Při jeho aplikaci je však třeba postupovat opatrně, protože po provedení transformace parametru a následném použití principu neurčitosti vyjde obecně jiná hustota než při transformování hustoty z principu neurčitosti u původního parametru — je třeba si vybrat, který parametr je ten, o němž předpokládáme rovnoměrné rozložení pravděpodobnosti.

Jeffreysova hustota. Možnost zvolit apriorní hustotu tak, aby se při transformaci parametru rovnala té, kterou bychom zvolili pro transformovaný parametr, dává Jeffreysova hustota. Pro regulární systém hustot $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ volíme

$$q(\boldsymbol{\theta}) \sim \sqrt{\det \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})},$$

kde $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informační matice:

Při regulárním prostém zobrazení H je mezi informačními maticemi $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$ systému $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ a $\boldsymbol{J}^\star(\boldsymbol{\lambda})$ systému $f^\star(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}|H^{-1}(\boldsymbol{\lambda}))$ vztah

$$\boldsymbol{J}^\star(\boldsymbol{\lambda}) = (H^{-1\bullet}(\boldsymbol{\lambda}))' \boldsymbol{J}(H^{-1}(\boldsymbol{\lambda})) H^{-1\bullet}(\boldsymbol{\lambda}) = (H^{-1\bullet}(\boldsymbol{\lambda}))' \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) H^{-1\bullet}(\boldsymbol{\lambda}).$$

(Platí totiž $\boldsymbol{J} = E(\ln f)^{\bullet\prime}(\ln f)^\bullet$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}^\star &= E(\ln f^\star)^{\bullet\prime}(\ln f^\star)^\bullet = E(\ln(f \circ H^{-1}))^{\bullet\prime} \ln (f \circ H^{-1}))^\bullet = \\
&= E\Big[\left((\ln f)^\bullet \circ H^{-1}\right) H^{-1\bullet}\Big]' \Big[\left((\ln f)^\bullet \circ H^{-1}\right) H^{-1\bullet}\Big] = \\
&= E H^{-1\bullet\prime} \left[(\ln f)^\bullet \circ H^{-1}\right]' \left[(\ln f)^\bullet \circ H^{-1}\right] H^{-1\bullet} = \\
&= H^{-1\bullet\prime} E\left(\left[(\ln f)^\bullet \circ H^{-1}\right]' \left[(\ln f)^\bullet \circ H^{-1}\right]\right) H^{-1\bullet} = \\
&= H^{-1\bullet\prime} (\boldsymbol{J}^\star \circ H^{-1}) H^{-1\bullet} \ .)
\end{aligned}$$

Má-li tedy $\boldsymbol{\theta}$ hustotu $\sqrt{\det \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})}$, pak $\boldsymbol{\lambda} = H(\boldsymbol{\theta})$ má hustotu

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det \boldsymbol{J}(H^{-1}(\boldsymbol{\lambda}))} \left|\det H^{-1\bullet}(\boldsymbol{\lambda})\right| &= \sqrt{\det\left(H^{-1\bullet}(\boldsymbol{\lambda})' \boldsymbol{J}(H^{-1}(\boldsymbol{\lambda})) H^{-1\bullet}(\boldsymbol{\lambda})\right)} = \\
&= \sqrt{\det \boldsymbol{J}^\star(\boldsymbol{\lambda})}.
\end{aligned}$$

(Symbolem $g^\bullet$ se rozumí derivace funkce g, nepovažuje-li se $\boldsymbol{x}$ za proměnnou, $(\ )'$ značí transpozici.)

2.4. Bayesovské odhady

Při konstrukci bayesovských odhadů (při znalosti aposteriorní hustoty) se používá aparátu teorie rozhodovacích funkcí. Ztrátová funkce

$$L(\boldsymbol{\theta}, d),$$

kde $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ parametr a $d \in \boldsymbol{D}$ rozhodnutí (z množiny možných rozhodnutí $\boldsymbol{D}$), vyjadřuje ztrátu vzniklou rozhodnutím d, při hodnotě parametru $\boldsymbol{\theta}$. Přitom rozhodnutí d se činí na základě hodnoty náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$, který má hustotu $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$, prostřednictvím rozhodovací funkce δ. Dochází tedy ke ztrátě $L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\boldsymbol{X}))$. Podmíněná střední hodnota $E[L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{\theta}]$ se nazývá riziko. Cílem je najít bayesovskou rozhodovací funkci $\delta^\star$, tj. rozhodovací funkci, pro kterou bude střední hodnota rizika $E[L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{\theta}]$ minimální. Tato střední hodnota $\varrho^\star = E(E[L(\boldsymbol{\theta}, \delta^\star(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{\theta}])$ se pak nazývá bayesovské riziko.

Vzhledem k tomu, že

$$E(E[L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{\theta}]) = EL(\boldsymbol{\theta}, \delta(\boldsymbol{X})) = E(E[L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}]),$$

můžeme zjišťovat hodnotu $\delta^\star(\boldsymbol{X})$ bayesovské rozhodovací funkce v bodě $\boldsymbol{X}$ jako tu, která minimalizuje $E[L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}]$. To vyhovuje situaci, kdy budeme chtít určit rozhodnutí $\delta(\boldsymbol{X})$ na základě konkrétní realizace experimentu.

Na úkol odhadnout parametr $\boldsymbol{\theta}$ pak můžeme pohlížet jako na úlohu učinit rozhodnutí o jeho hodnotě. V případě jednorozměrného parametru můžeme zvolit kvadratickou ztrátovou funkci

$$L(\theta, \delta(\boldsymbol{X})) = (\theta - \delta(\boldsymbol{X}))^2,$$

v případě vektorového parametru $\boldsymbol{\theta}$ ztrátovou funkci

$$L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\boldsymbol{X})) = (\boldsymbol{\theta} - \delta(\boldsymbol{X}))' \boldsymbol{A} (\boldsymbol{\theta} - \delta(\boldsymbol{X}))$$

pro nějakou pozitivně semidefinitní matici odpovídajících rozměrů. Bayesovskou rozhodovací funkcí pak může být

$$\delta^\star(\boldsymbol{X}) = E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] :$$

$$\begin{aligned}
&E[(\boldsymbol{\theta} - \delta(\boldsymbol{X}))' \boldsymbol{A} (\boldsymbol{\theta} - \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}] = \\
&\quad = E[(\boldsymbol{\theta} - E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] + E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] - \delta(\boldsymbol{X}))' \boldsymbol{A} (\boldsymbol{\theta} - E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] + E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] - \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}] = \\
&\quad = E[(\boldsymbol{\theta} - E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}])' \boldsymbol{A} (\boldsymbol{\theta} - E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}])|\boldsymbol{X}] + \\
&\quad + 2E[(\boldsymbol{\theta} - E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}])' \boldsymbol{A} (E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] - \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}] + \\
&\quad + E[(E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] - \delta(\boldsymbol{X}))' \boldsymbol{A} (E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] - \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}] = \\
&\quad = E[L(\boldsymbol{\theta}, \delta^\star(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}] + 2 \cdot 0 + E[(E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] - \delta(\boldsymbol{X}))' \boldsymbol{A} (E[\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}] - \delta(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}] \\
&\quad \geq E[L(\boldsymbol{\theta}, \delta^\star(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}],
\end{aligned}$$

přičemž rovnosti je při $\delta = \delta^\star$ dosaženo (v případě singulární matice $\boldsymbol{A}$ může být i jiné řešení). Pokud takovýto odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$ označíme $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, můžeme jeho i-tou složku zapsat pomocí hustot jako

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i = \int \boldsymbol{\theta}_i \left(\int \frac{q(\boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})}{\int q(\boldsymbol{t}) f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}} \; d\, {}^{i}\boldsymbol{\theta} \right) d\boldsymbol{\theta}_i,$$

kde jsme integrací podle ${}^{i}\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_r)$ nejdříve získali marginální hustotu θ_i (r nechť je počet složek $\boldsymbol{\theta}$).

Při jednorozměrném parametru θ je pak bayesovské riziko

$$\begin{aligned} \varrho^\star &= E(E[L(\theta, \delta^\star(\boldsymbol{X}))|\boldsymbol{X}]) = E(E[(\theta - E[\theta|\boldsymbol{X}])^2|\boldsymbol{X}]) = \\ &= E \operatorname{var}(\theta|\boldsymbol{X}) = \operatorname{var}\theta - \operatorname{var}(E[\theta|\boldsymbol{X}]) = \operatorname{var}\theta - \operatorname{var}\widehat{\theta} \end{aligned}$$

Jinou možností, jak volit odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$, je taková hodnota $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, která maximalizuje aposteriorní hustotu parametru $\boldsymbol{\theta}$. Tento odhad se nazývá zobecněný maximálně věrohodný odhad nebo bayesovský odhad maximálně věrohodného typu a nemusí odpovídat žádné ztrátové funkci.

3. EXPONENCIÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Má-li doba do poruchy X exponenciální rozdělení s parametrem λ, tj. s hustotou

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0,$$

je věrohodnostní funkce v Koziol - Greenově modelu náhodného cenzorování

$$\begin{aligned} L(\lambda, \gamma|(W_1, I_1), \ldots, (W_n, I_n)) &= \prod_{j=1}^{n} (\lambda e^{-\lambda W_j} (e^{-\lambda W_j})^\gamma) \gamma^{n - \sum_{j=1}^n I_j} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{j=1}^n W_j} e^{-\lambda\gamma \sum_{j=1}^n W_j} \gamma^{n - \sum_{j=1}^n I_j}, \end{aligned}$$

což můžeme při značení

$$W = \sum_{j=1}^{n} W_j, \ I = \sum_{j=1}^{n} I_j$$

přepsat jako

$$L(\lambda, \gamma|W, I) = \lambda^n e^{-\lambda W} e^{-\lambda\gamma W} \gamma^{n-I}, \lambda, \gamma > 0.$$

Budeme se snažit získat odhady pro intenzitu poruch λ, střední hodnotu doby do poruchy $\theta = 1/\lambda$, hodnotu funkce spolehlivosti v bodě 1 $R = e^{-\lambda}$ (hodnoty v jiných bodech můžeme zjistit změnou časového měřítka tak, aby se zkoumaný čas ocitl v bodě 1), dále pak odhady pro γ nebo $p = 1/(1 + \gamma)$, parametry Koziol - Greenova modelu.

Při daných parametrech λ a p (případně γ) máme střední hodnoty a rozptyly podmíněných rozdělení I_1 a W_1 (pokud existují nepodmíněné)

$$E[I_1|\lambda, p] = p, \ \text{var}\ [I_1|\lambda, p] = p(1 - p)$$

(I_1 má při daném p alternativní rozdělení s parametrem p);

$$\begin{aligned} E[W_1|\lambda, \gamma] &= \int_0^\infty w \left(\int_{\{0,1\}} \lambda e^{-\lambda w} e^{-\lambda\gamma w} \gamma^{1-i} di \right) dw = \\ &= \lambda(\gamma + 1) \frac{1}{(\lambda(1 + \gamma))^2} = p/\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[W_1^2|\lambda, \gamma] &= \int_0^\infty w^2 \left(\int_{\{0,1\}} \lambda e^{-\lambda w} e^{-\lambda\gamma w} \gamma^{1-i} di \right) dw = \\ &= \lambda(\gamma + 1) \frac{2}{(\lambda(\gamma + 1))^3} = 2p^2/\lambda^2, \end{aligned}$$

a tedy

$$\text{var } [W_1|\lambda,p] = E[W_1^2|\lambda,p] - (E[W_1|\lambda,p])^2 = p^2/\lambda^2.$$

To využijeme k určování nepodmíněných středních hodnot náhodných veličin I a W (které jsou součtem nezávislých veličin s rozděleními stejnými jako I_1 a W_1) při znalosti apriorních rozdělení parmetrů a také při uplatnění zákonu velkých čísel v konkrétních situacích.

3.1. Konjugované apriorní rozdělení pro λ, γ

Systémem hustot konjugovaným s hustotou $L(\lambda,\gamma|W,I)$ je (jak zjistíme postupem uvedeným v odstavci 2.3.) systém

$$\left\{\frac{a^{c+1}}{\Gamma(c-b+1)\Gamma(b)}\lambda^c e^{-\lambda a}e^{-\lambda\gamma a}\gamma^{c-b}; a>0, b>0, c>b-1\right\},$$

po změně parametrů $a=a$, $b=r$ a $c=s+r-1$ systém

$$\boldsymbol{K}_{\lambda,\gamma} = \{\frac{a^{r+s}}{\Gamma(s)\Gamma(r)}\lambda^{r+s-1}e^{-\lambda(1+\gamma)a}\gamma^{s-1}; a>0, r>0, s>0\}.$$

Označme jeho prvek

$$K_{a,r,s}(\lambda,\gamma) = \frac{a^{r+s}}{\Gamma(s)\Gamma(r)}\lambda^{r+s-1}e^{-\lambda(1+\gamma)a}\gamma^{s-1}$$

a zabývejme se tímto rozdělením.

Tvrzení. *Systém*

$$\boldsymbol{K}_{\lambda,\gamma} = \left\{\frac{a^{r+s}}{\Gamma(s)\Gamma(r)}\lambda^{r+s-1}e^{-\lambda(1+\gamma)a}\gamma^{s-1}; a>0, r>0, s>0\right\}$$

je konjugovaný s hustotou $L(\lambda,\gamma|W,I)$, marginálními rozděleními prvku tohoto systému jsou $G(a,r)$ pro λ a $B2(r,s)$ pro γ.

Důkaz. Marginální rozdělění λ je

$$K_{a,r,s}(\lambda) = \int_0^\infty K_{a,r,s}(\lambda,\gamma)d\gamma \sim \lambda^{r+s-1}e^{-\lambda a}\int_0^\infty \gamma^{s-1}e^{-\gamma\lambda a}d\gamma =$$
$$= \lambda^{r+s-1}e^{-\lambda a}\frac{\Gamma(s)}{(\lambda a)^s} \sim \lambda^{r-1}e^{-\lambda a} \sim G(a,r).$$

Marginální rozdělení γ je

$$K_{a,r,s}(\gamma) = \int_0^\infty K_{a,r,s}(\lambda,\gamma)d\lambda \sim \gamma^{s-1}\int_0^\infty \lambda^{r+s-1}e^{-\lambda(1+\gamma)a}d\lambda =$$
$$= \gamma^{s-1}\frac{\Gamma(r+s)}{((1+\gamma)a)^{r+s}} \sim \frac{\gamma^{s-1}}{(1+\gamma)^{r+s}} \sim B2(r,s). \quad \square$$

To znamená, že střední hodnota λ je $E\lambda = r/a$ a při $r>1$ je střední hodnota γ rovna $E\gamma = s/(r-1)$. Pro úplnost podmíněná rozdělení jsou

$$K_{a,r,s}(\lambda|\gamma) \sim \lambda^{r+s-1}e^{-\lambda(1+\gamma)a} \sim G((1+\gamma)a, r+s),$$
$$K_{a,r,s}(\gamma|\lambda) \sim \gamma^{s-1}e^{-\gamma\lambda a} \sim G(\lambda a, s),$$

při $r>1$ je $\text{cov }(\lambda,\gamma) = -\frac{s}{a}\frac{1}{r-1}$ a při $r>2$ je $\text{cor }(\lambda,\gamma) = -\sqrt{\frac{s(r-2)}{r(r+s-1)}}$.

Tvrzení. *Zvolíme-li* $q(\lambda,\gamma) = K_{a,r,s}(\lambda,\gamma) \in \boldsymbol{K}_{\lambda,\gamma}$ *jako apriorní hustotu, potom aposteriorní hustotou je* $q(\lambda,\gamma|W,I) = K_{a+W,r+I,s+n-I}(\lambda,\gamma) \in \boldsymbol{K}_{\lambda,\gamma}$ *a odhady při kvadratické ztrátové funkci jsou*

$$\widehat{\lambda} = \frac{I+r}{W+b} \quad a \quad \widehat{\gamma} = \frac{n-I+s}{I+r-1}.$$

Důkaz. Tvar aposteriorní hustoty je zřejmý z principu konstrukce konjugovaného systému, odhady při kvadratické ztrátové funkci určujeme jako aposteriorní střední hodnoty. □

Můžeme také určit odhady parametrů $R = e^{-\lambda}$, $\theta = \lambda^{-1}$ a $p = (1+\gamma)^{-1}$. Transformujeme-li hustotu $K_{a,r,s}(\lambda,\gamma)$, pak marginální rozdělění R je

$$K_{a,r,s}(R) \sim LG(a,r), \text{ marginální rozdělění } \theta \text{ je}$$

$$K_{a,r,s}(\theta) \sim IG(a,r) \text{ a marginální rozdělění } p \text{ je}$$

$$K_{a,r,s}(p) \sim \frac{(\frac{1}{p}-1)^{s-1}}{(1+\frac{1}{p}-1)^{r+s}} \frac{1}{p^2} = p^{r-1}(1-p)^{s-1} \sim B(r,s),$$

přičemž λ, R, nebo θ nejsou nezávislé s γ, nebo p. To vede k aposteriorním rozdělením $K_{a+W,r+I,s+n-I}(R)$, $K_{a+W,r+I,s+n-I}(\theta)$, $K_{a+W,r+I,s+n-I}(p)$, a tedy

$$\widehat{R} = \left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{I+r}, \quad \widehat{\theta} = \frac{W+a}{I+r-1} \text{ při } r>1, \quad \widehat{p} = \frac{I+r}{n+r+s}.$$

Spočtěme také střední hodnoty EI_1, EW_1, když teď známe konkrétní apriorní rozdělení:

$$\begin{aligned}
EI_1 &= Ep = r/(r+s),\\
EW_1 &= Ep/\lambda = \frac{a^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} = \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{r+s-2} e^{-\lambda(1+\gamma)a} d\lambda \frac{\gamma^{s-1}}{1+\gamma} d\gamma =\\
&= \frac{a^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \frac{\Gamma(r+s-1)}{a^{r+s-1}} \int_0^\infty \frac{\gamma^{s-1}}{(1+\gamma)^{r+s}} d\gamma =\\
&= \frac{a}{r+s-1}, \quad \text{je-li } r+s>1.
\end{aligned}$$

Bayesovská rizika odhadů. Odvodíme limitní vlastnosti bayesovských rizik odhadů užitím speciálního případu věty 6.3.4. uvedené v [2] na straně 155 s tím, že se omezujeme na nezáporné náhodné veličiny, tedy že:

Pro 2-rozměrný náhodný proces $\{(\overline{W}_n, \overline{I}_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *a reálnou funkci* $g = g(w,i,n)$ *definovanou na* $\langle 0,\infty)\times\langle 0,\infty)\times\mathbf{N}$ *za předpokladu, že*

pro všechna $n \in \mathbf{N}$ *má* g *druhý totální diferenciál vzhledem k* (w,i) *v intervalu* $K = \langle EW_1-\delta, EW_1+\delta\rangle \times \langle EI_1-\delta, EI_1+\delta\rangle$, *kde* $\delta > 0$ *nezávisí na* n,

existuje $0 \le u \le 4$ *celé, pro něž*

$$|g(w,i,n)| \le C_1 + C_2 \frac{\max(var\,(\overline{W}_n), var\,(\overline{I}_n))}{\max(E|\overline{W}_n - EW_1|^4, E|\overline{I}_n - EI_1|^4)}(w^u + i^u)$$

pro všechna w, i, n, *kde konstanty* C_1, C_2 *nezávisí na* w, i, n,

všechny derivace g *až do řádu 2 včetně jsou omezené na* $K \times \mathbf{N}$, *platí*

$$Eg(\overline{W}_n, \overline{I}_n, n) = g(EW_1, EI_1, n) + O(\frac{1}{n}) \quad \textit{při } n \to \infty.$$

Tvrzení. *Pro bayesovská rizika odhadů získaných v tomto odstavci platí (je-li* $r + s > 4$*)*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\varrho^\star_\lambda &= \frac{r}{r+s}\frac{(r+s-1)^2}{a^2} \\
\lim_{n\to\infty} n\varrho^\star_\theta &= \frac{a^2}{(r+s-1)^2}\frac{(r+s)^3}{r^3} \\
\lim_{n\to\infty} n\varrho^\star_R &= \frac{(r)(r+s-1)^2}{(r+s)a^2} e^{-2r(r+s-1)/((r+s)a)} \\
\lim_{n\to\infty} n\varrho^\star_\gamma &= \frac{s(r+s)^2}{r^3} \\
\lim_{n\to\infty} n\varrho^\star_p &= \frac{rs}{(r+s)^2}
\end{aligned}$$

Důkaz. Ukažme jen na jednom vztahu podrobně, jak aplikujeme převzaté tvrzení na náš případ. V odstavci 2.4 jsme viděli, že bayesovské riziko bayesovského odhadu parametru θ při kvadratické ztrátové funkci lze vyjádřit $\varrho^\star = E\big(\mathrm{var}\,(\theta|(*))\big)$ (a aposteriorní rozptyl známe). Můžeme tedy upravovat

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\varrho^\star_\lambda &= \lim_{n\to\infty} nE\frac{I+r}{(W+a)^2} = \lim_{n\to\infty} E\frac{\overline{I}_n + r/n}{(\overline{W}_n + a/n)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\overline{I}_n + r/n}{(\overline{W}_n + a/n + n^{-1/4})^2}\frac{(\overline{W}_n + a/n + n^{-1/4})^2}{(\overline{W}_n + a/n)^2}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} E\frac{\overline{I}_n + r/n}{(\overline{W}_n + a/n + n^{-1/4})^2} + \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{2n^{-1/4}(\overline{I}_n + r/n)}{\overline{W}_n + a/n} + \frac{n^{-2/4}(\overline{I}_n + r/n)}{(\overline{W}_n + a/n + n^{-1/4})^2}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{EI_1 + r/n}{(EW_1 + a/n + n^{-1/4})^2} + O(\frac{1}{n}) = \frac{r}{r+s}\frac{(r+s-1)^2}{a^2}
\end{aligned}$$

Zvolili jsme totiž δ tak malé, aby interval K ležel celý v 1. kvadrantu a

$$g(w,i,n) = \frac{i + r/n}{(w + a/n + n^{-1/4})^2} \le C_1 + C_2 n^{2/4} i \le C_1 + C_2 n(w+i),$$

která požadavky převzatého tvrzení splňuje (např. si uvědomíme, že $E|\overline{X}_n - EX_1|^4 \le C^* n^{-2}$). Podobně můžeme počítat

$$\lim_{n\to\infty} n\varrho_\theta^\star = \lim_{n\to\infty} nE\frac{(W+a)^2}{(I+r-1)^2(I+r-2)} = \frac{a^2}{(r+s-1)^2}\frac{(r+s)^3}{r^3}.$$

Při výpočtu bayesovského rizika odhadu R si nejdříve uvědomíme, že náhodné veličiny $n\mathrm{var}\,(R|W,I), n>2$, jsou stejnoměrně integrovatelné:

$$\begin{aligned}
&n\left(\left(\frac{W+a}{W+a+2}\right)^{I+r} - \left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{2(I+r)}\right) \le \\
&\le n\left(\frac{W+a+2}{W+a}\right)^{1+[r]-r}\left(\left(\frac{W+a}{W+a+2}\right)^{I+[r]+1} - \left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{2(I+[r]+1)}\right) \le \\
&\le n\frac{W+a+2}{W+a}\left(\frac{W+a}{W+a+2} - \frac{(W+a)^2}{(W+a+1)^2}\right)(I+[r]+1) \le \\
&\le n\frac{W+a+2}{W+a}\frac{W+a}{(W+a+2)(W+a+1)}(n+[r]+1) \le 3n^2\frac{1}{W^2}
\end{aligned}$$

(využili jsme $(W+a)/(W+a+2) > (W+a)^2/(W+a+1)^2$ a vzorec typu $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$), a tedy

$$\begin{aligned}
E(n\mathrm{var}\,(R|W,I))^{3/2} &\le E\left(3\frac{n^2}{W^2}\right)^{3/2} \le 3^{3/2}E\frac{n^3}{W^3} = 3^{3/2}E\frac{n^3\lambda^3(1+\gamma)^3}{n(n-1)(n-2)} \le \\
&\le 30\frac{(r+s)(r+s+1)(r+s+2)}{a^3} \qquad \text{pro } n>2
\end{aligned}$$

(při daných λ, γ je $1/W \sim IG(n, \lambda(1+\gamma))$, neboť $W \sim G(n, \lambda(1+\gamma))$ jakožto součet n nezávislých náhodných veličin W_j s exponenciálním rozdělením o parametru $\lambda(1+\gamma)$.)

Ukážeme ještě, že

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{var}\,(R|W,I) = \frac{r(r+s-1)^2}{(r+s)a^2}e^{-2r(r+s-1)/((r+s)a)} \qquad \text{s. j.}$$

Pak totiž můžeme počítat

$$\begin{aligned}
\varrho_R^\star &= \lim_{n\to\infty} En\mathrm{var}\,(R|W,I) = E\lim_{n\to\infty} n\mathrm{var}\,(R|W,I) = \\
&= \frac{r(r+s-1)^2}{(r+s)a^2}e^{-2r(r+s-1)/((r+s)a)}.
\end{aligned}$$

K důkazu s. j. konvergence použijeme Taylorových rozvojů funkce $\ln(1-x)$ při $x \to 0$ a funkce e^x. Při značení

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{2^m}{(a+2+n\overline{W}_n)^m}, \\
Q_2 &= \sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1^m}{(a+1+n\overline{W}_n)^m}
\end{aligned}$$

(závislost Q_1 a Q_2 na n opět neznačíme) a při znalosti

$$I/n \overset{\text{s. j.}}{\underset{n\to\infty}{\to}} EI_1, \quad W/n \overset{\text{s. j.}}{\underset{n\to\infty}{\to}} EW_1$$

(ze zákona velkých čísel) je vidět, že s pravděpodobností 1 existují čísla $K > 0$ a $n_0 > 0$ taková, že pro $n > n_0$ platí

$$Q_1 < \frac{K}{n^3}\ ,\ Q_2 < \frac{K}{n^3}\ ,\ \frac{1}{a+1+n\overline{W}_n} < \frac{K}{n}\ ,\ n\overline{I}_n + r < Kn.$$

(Existuje totiž $K_1 > 0$ a $\delta \in (0,1)$, že pro $x \in (0,\delta)$ je $\sum_{k=3}^{\infty} x^k/k < K_1 x^3$, dále s pravděpodobností 1 existuje $K_2 > 0$ a $n_2 \in \mathbf{N}$, že pro $n > n_2$ je $(a+1+n\overline{W}_n)^{-1} < K_2/n$, existuje také $n_1 \geq n_2$, že $K_2/n_1 < \delta$. Tedy pro $n > n_1$ je

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{(a+1+n\overline{W}_n)^k} < K_1 \left(\frac{1}{(a+1+n\overline{W}_n)^k} \right)^3 < \frac{K_1 K_2^3}{n^3}.$$

S pravděpodobností 1 také existuje $K_3 > 0$ a n_3, že pro $n > n_3$ je $n\overline{I}_n + r < K_3 n$. Volíme $K = \max(K_1, K_2, K_3)$, $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$.)

Upravíme

$$\begin{aligned}
n \text{ var } (R|W,I) &= n\left(\left(\frac{W+a}{W+a+2} \right)^{I+r} - \left(\frac{W+a}{W+a+1} \right)^{2(I+r)} \right) = \\
&= n\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\overline{I}_n + r)^k \ln^k(1 - \frac{2}{a+2+n\overline{W}_n})}{k!} - \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\overline{I}_n + r)^k 2^k \ln^k(1 - \frac{1}{a+1+n\overline{W}_n})}{k!} \right) = \\
&= n\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n\overline{I}_n + r)^k}{k!} \left[\left(-\frac{2^1}{a+2+n\overline{W}_n} - \frac{2^2}{2(a+2+n\overline{W}_n)^2} - Q_1 \right)^k - \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. - 2^k \left(-\frac{1^1}{a+1+n\overline{W}_n} - \frac{1^2}{2(a+1+n\overline{W}_n)^2} - Q_2 \right)^k \right] \right) = \\
&= n\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n\overline{I}_n + r)^k}{k!} (-1)^k \left[\left(\frac{2^1}{a+2+n\overline{W}_n} \right)^k + \right. \right. \\
&\qquad + k \left(\frac{2^1}{a+2+n\overline{W}_n} \right)^{k-1} \frac{2^2}{2(a+2+n\overline{W}_n)^2} + Q_{1,k}^* - \\
&\qquad - 2^k \left(\frac{1^1}{a+1+n\overline{W}_n} \right)^k - \\
&\qquad \left. \left. -2^k k \left(\frac{1^1}{a+1+n\overline{W}_n} \right)^{k-1} \frac{1^2}{2(a+1+n\overline{W}_n)^2} - Q_{2,k}^* \right] \right)\ ,
\end{aligned}$$

kde jsme použili multinomickou větu s tím, že většinu sčítanců jsme zahrnuli do

$$Q^*_{1,k} = \sum_{[\ell,j]\in\boldsymbol{M}}\sum \frac{k!}{\ell!j!(k-\ell-j)!}\left(\frac{2^1}{a+2+n\overline{W}_n}\right)^\ell\left(\frac{2^2}{2(a+2+n\overline{W}_n)^2}\right)^j Q_1^{k-\ell-j},$$

$$Q^*_{2,k} = 2^k\sum_{[\ell,j]\in\boldsymbol{M}}\sum \frac{k!}{\ell!j!(k-\ell-j)!}\left(\frac{1^1}{a+1+n\overline{W}_n}\right)^\ell\left(\frac{1^2}{2(a+1+n\overline{W}_n)^2}\right)^j Q_1^{k-\ell-j};$$

$$\boldsymbol{M} = \{[\ell,j];[\ell,j]\in\{0,1,\ldots,k\}^2, \ell+j\le k\} - \{[k,0],[k-1,1]\}.$$

Spolu s nerovností

$$\begin{aligned}
&\left|n^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\overline{I}_n+r)^k}{k!}(-1)^k\left(Q^*_{1,k}-Q^*_{2,k}\right)\right| \le \\
&\qquad\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^k n^{2+k}}{k!}\sum_{[\ell,j]\in\boldsymbol{M}}\sum\frac{k!}{\ell!j!(k-\ell-j)!}\cdot \\
&\qquad\quad\cdot\left(\frac{2^\ell K^\ell}{n^\ell}\frac{2^j K^{2j}}{n^{2j}}\frac{K^{k-\ell-j}}{n^{3(k-\ell-j)}}+2^k\frac{K^\ell}{n^\ell}\frac{2^{-j}K^{2j}}{n^{2j}}\frac{K^{k-\ell-j}}{n^{3(k-\ell-j)}}\right) = \\
&\qquad= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^k}{k!}\sum_{[\ell,j]\in\boldsymbol{M}}\sum\frac{k!}{\ell!j!(k-\ell-j)!}2\cdot 2^k\frac{K^\ell (K^2)^j K^{k-\ell-j}}{n^{2k-2\ell-j-2}} \le \\
&\qquad\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^k}{k!}2\cdot 2^k(K+K^2+K)^k = C_1 < \infty
\end{aligned}$$

(poslední nerovnost je možná díky $2k-2\ell-j-2\ge 0$ v každém členu dvojité sumy — rozepíšeme-li $2k-2\ell-j-2 = (k-\ell-j)+(k-\ell-2)$, je druhá závorka větší než -2 (při $k=\ell$ by bylo $j=0$ a přes dvojici $[k,0]$ jsme nesčítali); nabývá-li hodnoty -1 (tj. $\ell=k-1$), pak $j=0$ (přes dvojici $[k-1,1]$ jsme nesčítali), takže první závorka je rovna 1 a součet je nezáporný; v ostatních případech jsou obě závorky nezáporné) tak dospějeme ke vztahu

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\mathrm{var}\,(R|W,I) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n\overline{I}_n+r)^k}{k!}(-1)^k\cdot\right. \\
&\qquad\cdot\left[2^k\left(\frac{1}{(a+2+n\overline{W}_n)^k}-\frac{1}{(a+1+n\overline{W}_n)^k}\right)+\right. \\
&\qquad\left.\left.+k2^{k-1}\left(\frac{2}{(a+2+n\overline{W}_n)^{k+1}}-\frac{1}{(a+1+n\overline{W}_n)^{k+1}}\right)\right]\right)+0 = \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n\overline{I}_n+r)^k}{k!}(-1)^k\cdot\right. \\
&\qquad\left.\cdot 2^k\frac{(a+1+n\overline{W}_n)^k-\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}(a+1+n\overline{W}_n)^{k-\ell}1^\ell}{(a+2+n\overline{W}_n)^k(a+1+n\overline{W}_n)^k}\right)-
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n\overline{I}_n+r)}{(a+2+n\overline{W}_n)^2}2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\overline{I}_n+r)^k}{k!}\left(\frac{-2}{a+2+n\overline{W}_n}\right)^k\right)+\\
&+ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n\overline{I}_n+r)}{(a+1+n\overline{W}_n)^2}2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\overline{I}_n+r)^k}{k!}\left(\frac{-1}{a+1+n\overline{W}_n}\right)^k\right)=\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n\overline{I}_n+r)^k}{k!}(-2)^k\cdot\right.\\
&\qquad\left.\cdot\frac{-k(a+1+n\overline{W}_n)^{k-1}-\sum_{\ell=2}^{k}\binom{k}{\ell}(a+1+n\overline{W}_n)^{k-\ell}}{(a+2+n\overline{W}_n)^k(a+1+n\overline{W}_n)^k}\right)-\\
&- 2\frac{EI_1}{(EW_1)^2}e^{-2EI_1/EW_1}+\frac{EI_1}{(EW_1)^2}e^{-2EI_1/EW_1}=\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n\overline{I}_n+r)}{(a+1+n\overline{W}_n)(a+2+n\overline{W}_n)}2\cdot\right.\\
&\qquad\left.\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n\overline{I}_n+r)^k}{k!}\left(\frac{-2}{a+2+n\overline{W}_n}\right)^k\right)+\\
&+0-\frac{EI_1}{(EW_1)^2}e^{-2EI_1/EW_1}=\\
&= 2\frac{EI_1}{(EW_1)^2}e^{-2EI_1/EW_1}-\frac{EI_1}{(EW_1)^2}e^{-2EI_1/EW_1}=\\
&= \frac{r(r+s-1)^2}{(r+s)a^2}e^{-2r(r+s-1)/((r+s)a)} \qquad \text{s. j.},
\end{aligned}
$$

neboť podobně jako už v předchozím

$$
\begin{aligned}
&\left|n^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n\overline{I}_n+r)^k}{k!}(-2)^k\frac{\sum_{\ell=2}^{k}\binom{k}{\ell}(a+1+n\overline{W}_n)^{k-\ell}}{(a+2+n\overline{W}_n)^k(a+1+n\overline{W}_n)^k}\right|\le\\
&\qquad\le n^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^kK^k}{k!}(-2)^k\sum_{\ell=2}^{k}\binom{k}{\ell}(Kn)^{k-\ell-k-k}\le\\
&\qquad\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{K^k(-2)^k(K+K)^k}{k!}(-2)^k=C_2<\infty.
\end{aligned}
$$

K důkazu zbývajících vztahů opět použijeme převzaté tvrzení:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\varrho^{\star}_{\gamma} &= \lim_{n\to\infty} nE\frac{(n-I+s)(n+r+s-1)}{(I+r-1)^2(I+r-2)}=\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-E\overline{I}_n+(s/n))(1+(r+s-1)/n)}{(E\overline{I}_n+(r-1)/n)^2(E\overline{I}_n+(r-2)/n)}+O(\frac{1}{n})\right)=\\
&= \frac{s(r+s)^2}{r^3},
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty} n\varrho_p^\star = \lim_{n\to\infty} nE\frac{(I+r)(n-I+s)}{(n+r+s)^2(n+r+s+1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(E\overline{I}_n+r/n)(1-E\overline{I}_n+s/n)}{(1+(r+s)/n)^2(1+(r+s+1)/n)}+O(\frac{1}{n})\right) =$$
$$= \frac{rs}{(r+s)^2}. \quad \square$$

3.2. Nezávislá gama rozdělení pro λ a γ

Zvolíme-li za apriorní hustotu

$$q(\lambda,\gamma) = \frac{a^r}{\Gamma(r)}\lambda^{r-1}e^{-a\lambda}\frac{b^s}{\Gamma(s)}\gamma^{s-1}e^{-b\gamma},\ a,r,b,s>0,$$

tj λ a γ nezávislé s rozděleními $G(a,r)$ a $G(b,s)$, má aposteriorní hustota tvar

$$q(\lambda,\gamma|W,I) \sim \lambda^{n+r-1}e^{-\lambda(a+w)}e^{-\lambda\gamma w}e^{-b\gamma}\gamma^{n-i+s-1}.$$

Zjistíme, kde tato hustota nabývá maxima, čímž získáme odhady λ a γ.

Tvrzení. *Jsou-li apriorními rozděleními pro λ a γ nezávislá gama rozdělení $G(a,r)$ a $G(b,s)$ a předpokládáme-li $n+r>1$ a $n-I+s-1>1$, potom*

$$\widetilde{\lambda} = \frac{1}{2}\left[\frac{I+r-s}{a+W}-\frac{b}{W}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{(I+r-s)^2}{(a+W)^2}+\frac{b^2}{W^2}+\frac{2b\,(2(n+r-1)-(I+r-s))}{W(a+W)}}\ \right]$$

a

$$\widetilde{\gamma} = \frac{1}{2}\left[-\frac{I+r-s}{b}-\frac{a+W}{W}+\right.$$
$$+\sqrt{\frac{(I+r-s)^2}{b^2}+\frac{(a+W)^2}{W^2}+}$$
$$\left.\overline{+2\frac{I+r-s}{b}\frac{a+W}{W}+\frac{4(n-I+s-1)(a+W)}{Wb}}\right]$$

jsou zobecnými maximálně věrohodnými odhady.

Důkaz. Zkoumejme logaritmus vyšetřované apoteriorní hustoty

$$\ell(\lambda,\gamma) = \ln q(\lambda,\gamma|W,I) = (n+r-1)\ln\lambda-\lambda(a+w)-\lambda\gamma W-b\gamma+(n-I+s-1)\ln\gamma.$$

Toto je při $\lambda>0$, $\gamma>0$ funkce se všemi derivacemi. Při pevném λ nabývá $\ell(\lambda,\gamma)$ maxima v bodě

$$\gamma(\lambda) = \frac{n-I+s-1}{b+W\lambda},$$

neboť

$$\frac{\partial \ell(\lambda,\gamma)}{\partial \gamma} = -W\lambda - b + \frac{n-I+s-1}{\gamma} = 0$$

právě v bodě $\gamma(\lambda)$ a

$$\frac{\partial^2 \ell(\lambda,\gamma)}{\partial \gamma^2} = -\frac{n-I+s-1}{\gamma^2} < 0.$$

Sledujme chování $\ell(\lambda,\gamma)$ v těchto bodech při měnících se λ.

$$\begin{aligned}\frac{d\ell(\lambda,\frac{n-I+s-1}{b+W\lambda})}{d\lambda} &= \frac{n+r-1}{\lambda} - (a+W) - \\ &\quad - W\left(\frac{n-I+s-1}{b+W\lambda} - \lambda\frac{n-I+s-1}{(b+W\lambda)^2}W\right) + \\ &\quad + b\frac{n-I+s-1}{(b+W\lambda)^2}W - \frac{n-I+s-1}{b+W\lambda}W = \\ &= \frac{n+r-1}{\lambda} - (a+W) - W\frac{n-I+s-1}{b+W\lambda} = \left.\frac{\partial \ell(\lambda,\gamma)}{\partial \lambda}\right|_{\gamma=\gamma(\lambda)}\end{aligned}$$

Položíme-li tuto derivaci rovnu nule a vynásobíme výrazem $\lambda(b+W\lambda)$, dostaneme kvadratickou rovnici

$$-\lambda^2\left(W(a+W)\right) + \lambda\left(W(I+r-s) - b(a+W)\right) + b(n+r-1) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že $-W(a+W) < 0$ a $b(n+r-1) > 0$, má tato rovnice dva kořeny s opačnými znaménky a díky tomu, že jsme násobili kladným výrazem $\lambda(b+W\lambda)$, nabývá $\ell(\lambda,\frac{n-I+s-1}{b+W\lambda})$ maxima na $(0,\infty)$ právě v kladném kořenu zmíněné kvadratické rovnice, tj. v

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda} = \frac{1}{2}\Bigg[&\frac{I+r-s}{a+W} - \frac{b}{W} + \\ &+ \sqrt{\frac{(I+r-s)^2}{(a+W)^2} + \frac{b^2}{W^2} + \frac{2b\left(2(n+r-1) - (I+r-s)\right)}{W(a+W)}}\Bigg].\end{aligned}$$

Při značení $\widetilde{\gamma} = \gamma(\widetilde{\lambda})$ (tedy i $\widetilde{\gamma} > 0$) platí

$$\left.\frac{\partial \ell(\lambda,\gamma)}{\partial \gamma}\right|_{\lambda=\widetilde{\lambda},\gamma=\widetilde{\gamma}} = 0, \quad \left.\frac{\partial \ell(\lambda,\gamma)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\widetilde{\lambda},\gamma=\widetilde{\gamma}} = 0.$$

Po vyjádření

$$\widetilde{\lambda} = \frac{n+r-1}{a+W+W\widetilde{\gamma}}$$

z druhé rovnice, dosazení do první a po úpravě zjistíme, že

$$\widetilde{\gamma} = \frac{1}{2}\Bigg[-\frac{I+r-s}{b} - \frac{a+W}{W} + \\ + \sqrt{\frac{(I+r-s)^2}{b^2} + \frac{(a+W)^2}{W^2} + \\ + 2\frac{I+r-s}{b}\frac{a+W}{W} + \frac{4(n-I+s-1)(a+W)}{Wb}}\Bigg].$$

$q(\lambda, \gamma | W, I)$ tedy nabývá maxima v bodě $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\gamma})$, tyto body jsou pak zobecněnými maximálně věrohodnými odhady. □

Limitní chování odhadů. Označme

$$\overline{W_n} = \frac{W}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} W_j}{n},\ \overline{I}_n = \frac{I}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} I_j}{n},\ \widetilde{\lambda}_n,\ \widetilde{\gamma}_n$$

veličiny vztahující se k n pozorováním.

Tvrzení. *Při nezávislých gama apriorních rozděleních pro λ a γ platí pro zobecněné maximálně věrohodné odhady učiněné z n pozorování*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\lambda}_n = \lambda \text{ s.j.},$$
$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\gamma}_n = \gamma \text{ s.j.}$$

Důkaz. Na základě zákona velkých čísel nerovnosti potřebné v předchozím tvrzení nastanou při n dostatečně velkém s pravděpodobností 1 a také

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\lambda}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Bigg[\frac{\overline{I}_n}{\overline{W_n} + \frac{a}{n}} + \frac{r-s}{\overline{W_n}n + a} - \frac{b}{\overline{W_n}n} + \\ + \sqrt{\left(\frac{\overline{I}_n}{\frac{a}{n} + \overline{W_n}}\right)^2 + \left(\frac{r-s}{a + \overline{W_n}n}\right)^2 + \frac{2\overline{I}_n(r-s)}{n\left(\frac{a}{n} + \overline{W_n}\right)^2} + \\ + \frac{b^2}{\overline{W_n}^2 n^2} + \frac{4b(n+r-1)}{\overline{W_n}(a+\overline{W_n}n)n} - 2\frac{\overline{I}_n + \frac{r-s}{n}}{\overline{W_n}(a+\overline{W_n}n)}}\Bigg] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{\overline{I}_n}{\overline{W_n} + \frac{a}{n}} + \sqrt{\left(\frac{\overline{I}_n}{\frac{a}{n} + \overline{W_n}}\right)^2}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} 2\frac{\overline{I}_n}{\overline{W_n}} = \lambda \text{ s.j.},$$

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{\gamma}_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{\overline{I}_n}{b}n - \frac{r-s}{b} - \frac{a}{\overline{W}_n n} - 1 + \sqrt{\frac{\overline{I}_n^2}{b^2}n^2 + \frac{(r-s)^2}{b^2} + \right.$$
$$+2\frac{\overline{I}_n}{b^2}n(r-s) + \left(1+\frac{a}{\overline{W}_n n}\right)^2 + 2\frac{\overline{I}_n}{b}n\left(1+\frac{a}{\overline{W}_n n}\right) +$$
$$+2\frac{r-s}{b}\left(1+\frac{a}{\overline{W}_n n}\right) + 4\frac{1-\overline{I}_n}{\overline{W}_n b}(a+\overline{W}_n n) +$$
$$\left.+4\frac{s-1}{b}\left(1+\frac{a}{\overline{W}_n n}\right)}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[-1-\frac{r-s}{b} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\frac{\overline{I}_n^2}{b^2}n^2 + 2\frac{\overline{I}_n}{b^2}(r-s)n + 2\frac{\overline{I}_n}{b}n + 4\frac{1-\overline{I}_n}{\overline{W}_n b}\overline{W}_n n} - \sqrt{\left(\frac{\overline{I}_n}{b}n\right)^2}}{\sqrt{\frac{\overline{I}_n^2}{b^2}n^2 + 2\frac{\overline{I}_n}{b^2}(r-s)n + 2\frac{\overline{I}_n}{b}n + 4\frac{1-\overline{I}_n}{\overline{W}_n b}\overline{W}_n n} + \sqrt{\left(\frac{\overline{I}_n}{b}n\right)^2}}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[-1-\frac{r-s}{b} + \frac{2\frac{\overline{I}_n}{b^2}(r-s) + 2\frac{\overline{I}_n}{b} + 4\frac{1-\overline{I}_n}{b}}{\frac{\overline{I}_n}{b}+\frac{\overline{I}_n}{b}}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[2\frac{1-\overline{I}_n}{\overline{I}_n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\overline{I}_n}{\overline{I}_n} = \frac{1-p}{p} = \gamma \text{ s.j.} \quad \square$$

3.3. Jeffreysova hustota

Další možností volby apriorní hustoty je Jeffreysova hustota. Při hustotách $L(w,i|\lambda,\gamma) = e^{-\lambda w}e^{-\lambda\gamma w}\lambda\gamma^{1-i}$, $\lambda,\gamma>0$ můžeme počítat Fisherovu informační matici jako

$$\boldsymbol{J}(\lambda,\gamma) = E\left[-\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\gamma\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\lambda\partial\gamma} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\gamma^2}\end{pmatrix}\right].$$

$\ln L(\lambda,\gamma|w,i) = -\lambda w - \lambda\gamma w + \ln\lambda + (1-i)\ln\gamma$ má derivace $-w-\gamma w+1/\lambda$ podle λ a $-\lambda w + (1-i)/\gamma$ podle γ. Matice druhých parciálních derivací je

$$\begin{pmatrix} -1/\lambda^2 & -w \\ -w & -(1-i)/\gamma^2\end{pmatrix}$$

a tudíž

$$\boldsymbol{J}(\lambda,\gamma) = E\left[-\begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda^2} & -w \\ -w & -\frac{1-i}{\gamma^2}\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2}\cdot 1 & \frac{\lambda}{p} \\ \frac{\lambda}{p} & \frac{1-p}{\gamma^2}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda(1+\gamma)} \\ \frac{1}{\lambda(1+\gamma)} & \frac{1}{\gamma(1+\gamma)}\end{pmatrix}.$$

Jeffreysova apriorní hustota pro λ a γ je

$$q(\lambda,\gamma) \sim |\det \boldsymbol{J}(\lambda,\gamma)|^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2\gamma(1+\gamma)} - \frac{1}{\lambda^2(1+\gamma)^2}} = \frac{1}{\lambda(1+\gamma)\sqrt{\gamma}},$$

to znamená marginální hustoty

$$q(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda},\ q(\gamma) \sim \frac{1}{(1+\gamma)\sqrt{\gamma}},\ \lambda \text{ a } \gamma \text{ nezávislé.}$$

Transformacemi $R = e^{-\lambda}$, $\theta = \lambda^{-1}$ a $p = (1+\gamma)^{-1}$ získáme marginální hustoty Jeffreysovy hustoty

$$q(R) = \frac{1}{(-\ln R)R}, \quad q(\theta) = \frac{1}{\theta} \quad \text{a} \quad q(p) \sim \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}},$$

($R \in (0,1)$, $\theta > 0$, $p \in (0,1)$), přičemž vždy R, θ nebo λ je nezávislá s γ nebo p.

Tvrzení. *Při Jeffreysově apriorní hustotě jsou bayesovskými odhady při kvadratické ztrátové funkci*

$$\widehat{\lambda} = \frac{I+\frac{1}{2}}{W}\frac{n}{n+1},\ \widehat{\theta} = \frac{W}{I-\frac{1}{2}}\frac{n}{n-1},\ \widehat{p} = \frac{I+\frac{1}{2}}{n+1},\ \widehat{\gamma} = \frac{n-I+\frac{1}{2}}{I-\frac{1}{2}}.$$

Důkaz. Jeffreysova hustota je speciálním případem apriorní hustoty popsané dále v tomto odstavci. Tam je také příslušné tvrzení o odhadech. □

Obecnější případ. Uvažujme ještě obecnější případ apriorní hustoty (při zachování nezávislosti)

$$q(\lambda,p) \sim \lambda^{q-1}e^{-\lambda}p^{r-1}(1-p)^{s-1},\ \lambda > 0,\ p \in (0,1).$$

V případě $a > 0, q > 0, r > 0, s > 0$ (tj. $\lambda \sim G(a,q)$, $p \sim B(r,s)$) máme apriorní hustotu

$$q(\lambda,\gamma) = \lambda^{q-1}e^{-a\lambda}\frac{\gamma^{s-1}}{(1+\gamma)^{r+s}},$$

aposteriorní hustotu

$$q(\lambda,\gamma|W,I) = \lambda^{n+q-1}e^{-a\lambda}e^{-\lambda W}e^{-\lambda\gamma W}\frac{\gamma^{n-I+s-1}}{(1+\gamma)^{r+s}},$$

to znamená marginální a podmíněné hustoty

$$q(\gamma|W,I) \sim \frac{\gamma^{n-I+s-1}}{(1+\gamma)^{r+s}}\int_0^\infty e^{-\lambda(\gamma W+W+a)}\lambda^{n+q-1}d\lambda \sim$$
$$\sim \frac{\gamma^{n-I+s-1}}{(1+\gamma)^{r+s}(\gamma W+W+a)^{n+q}},$$

$$q(\lambda|\gamma,W,I) \sim \lambda^{n+q-1}e^{-\lambda[W(1+\gamma)+a]} \sim G(\gamma W+W+a, n+q).$$

Poznámka. *Při těchto apriorních hustotách ($\lambda \sim G(a,q)$ a $p \sim B(r,s)$ nezávislé) by odhady při kvadratické ztrátové funkci mohly vyjít jako*

$$\widehat{\lambda} = \frac{(I+q+r)(n+q)}{W(n+q+r+s)} \frac{{}_1F_2(I+q+r+1, n+q+1, n+q+r+s+1, -a/W)}{{}_1F_2(I+q+r, n+q, n+q+r+s, -a/W)},$$
$$\widehat{\gamma} = \frac{n-I+s}{I+q+r-1} \cdot \frac{{}_1F_2(I+q+r-1, n+q, n+q+r+s, -a/W)}{{}_1F_2(I+q+r, n+q, n+q+r+s, -a/W)},$$
$$\widehat{p} = \frac{I+q+r}{n+q+r+s} \cdot \frac{{}_1F_2(I+q+r+1, n+q, n+q+r+s+1, -a/W)}{{}_1F_2(I+q+r, n+q, n+q+r+s, -a/W)},$$

kde

$${}_1F_2(e,f,g,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e)_k (f)_k z^k}{(g)_k k!}$$

je hypergeometrická funkce; značíme $(e)_k = \Gamma(e+k)/\Gamma(e)$.

Heuristické odvození. Nejdříve naznačme, jak spočítat integrál

$$J(b,c,d,z) = \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-1}}{(1+zt)^d} dt, \ b,c,d>0, \ z \in (0,1).$$

Použijeme rozvoj $(1+x)^v = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} x^k$, $x \in \langle -1, 1)$. To znamená integrand

$$t^{b-1}(1-t)^{c-1}(1+zt)^{-d} = t^{b-1} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{c-1}{\ell} (-1)^\ell t^\ell \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \binom{-d}{m} z^m t^m \right].$$

U t^{0+b-1} máme koeficient 1, u t^{k+b-1} $(k>0)$ koeficient

$$\frac{(c-k)_k}{k!}(-1)^k z^0 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(c-k+i)_{k-i}}{(k-i)!} \frac{(d)_i}{i!} (-1)^k z^i + \frac{(d)_k}{k!}(-1)^k z^k.$$

Po integrování od 0 do 1 podle t člen po členu dostáváme řadu

$$\frac{1}{b} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+b} \frac{(c-k)_k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{(-1)^k}{k+b} z^i \frac{(c-k+i)_{k-i}}{(k-i)!} \frac{(d)_i}{i!} \right) + \frac{(-1)^k}{k+b} z^k \frac{(d)_k}{k!}.$$

Integrujme ještě od 0 do 1 podle x člen po členu řadu odpovídající funkci $x^{b-1}(1-x)^{c-1}$ (jejímž integrálem je $B(b,c)$). U x^{k+b-1} byl koeficient $\binom{c-1}{k}(-1)^k$; po zintegrování máme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+b} \frac{(c-k)_k}{k!}.$$

Mysleme si, že výsledky obou integrací člen po členu se rovnají integrálům příslušných funkcí. Potom vidíme, že první dva sčítanci ve vyjádření $J(b,c,d,z)$

dávají řadu odpovídající $B(b,c)$, a po přeindexování tak, abychom dostali řadu mocnin z, můžeme využít podobné vlastnosti k vyjádření

$$\begin{aligned}
J(b,c,d,z) &= B(b,c) + \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell \left(\frac{(-1)^\ell}{\ell+b}\frac{(d)_\ell}{\ell!} + \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+b}\frac{(c-j+\ell)_{j-\ell}}{(j-\ell)!}\frac{(d)_\ell}{\ell!} \right) = \\
&= B(b,c) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell z^\ell \frac{(d)_\ell}{\ell!} \left(\frac{1}{\ell+b} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+\ell+b}\frac{(c-i)_i}{i!} \right) = \\
&= B(b,c) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell z^\ell \frac{(d)_\ell}{\ell!} B(\ell+b,c) = \\
&= B(b,c) \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(d)_\ell}{\ell!} \frac{\Gamma(\ell+b)}{\Gamma(\ell+b+c)} \frac{\Gamma(b+c)}{\Gamma(b)} (-z)^\ell \right) = \\
&= B(b,c)\ {}_2F_1(b,d,b+c,-z).
\end{aligned}$$

Teď už můžeme počítat odhady coby aposteriorní střední hodnoty. Aposteriorní hustota p je (vycházíme z hustoty γ a substituujeme $\gamma = 1/p - 1$)

$$q(p|W,I) \sim \frac{p^{r+s}(1/p-1)^{n-I+s-1}}{(1/p-1+(W+a)/W)^{n+q}} \frac{1}{p^2} \sim \frac{p^{I+q+r-1}(1-p)^{n-I+s-1}}{(1+\frac{a}{W}p)^{n+q}},$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\widehat{p} &= \frac{J(I+q+r+1, n-I+s, n+q, a/W)}{J(I+q+r, n-I+s, n+q, a/W)} = \\
&= \frac{I+q+r}{n+q+r+s} \cdot \frac{{}_1F_2(I+q+r+1, n+q, n+q+r+s+1, -a/W)}{{}_1F_2(I+q+r, n+q, n+q+r+s, -a/W)}.
\end{aligned}$$

Podobnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma} &= \left(\int_0^\infty \frac{\gamma^{n-I+s}}{(1+\gamma)^{r+s}(\gamma+(W+a)/W)^{n+q}} d\gamma \right) \cdot \\
&\qquad \cdot \left(\int_0^\infty \frac{\gamma^{n-I+s-1}}{(1+\gamma)^{r+s}(\gamma+(W+a)/W)^{n+q}} d\gamma \right)^{-1} = \\
&= \frac{J(I+q+r-1, n-I+s+1, n+q, a/W)}{J(I+q+r, n-I+s, n+q, a/W)} = \\
&= \frac{n-I+s}{I+q+r-1} \cdot \frac{{}_1F_2(I+q+r-1, n+q, n+q+r+s, -a/W)}{{}_1F_2(I+q+r, n+q, n+q+r+s, -a/W)}
\end{aligned}$$

a také

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda} &= E\left[\frac{n+q}{\gamma W + W + a} \middle| W, I \right] = \frac{n+q}{W} E\left[(\gamma + (W+a)/W)^{-1} \middle| W, I \right] = \\
&= \frac{n+q}{W} \frac{J(I+q+r+1, n-I+s, n+q+1, a/W)}{J(I+q+r, n-I+s, n+q, a/W)} = \\
&= \frac{(n+q)(I+q+r)}{W(n+q+r+s)} \frac{{}_1F_2(I+q+r+1, n+q+1, n+q+r+s+1, -a/W)}{{}_1F_2(I+q+r, n+q, n+q+r+s, -a/W)}.
\end{aligned}$$

□

Při speciální volbě apriorního rozdělení však můžeme odhady vyjádřit explicitně.

Tvrzení. *Při* $a = 0, q > -n, q > -r, r > 0, s > 0$, *tj. při apriorní hustotě*

$$q(\lambda, p) \sim \lambda^{q-1} p^{r-1} (1-p)^{s-1},$$

jsou

$$\widehat{\lambda} = \frac{I+r+q}{W} \frac{n+q}{n+q+r+s}, \quad \widehat{p} = \frac{I+r+q}{n+r+q+s},$$

je-li navíc $I + r + q > 1$, *potom také*

$$\widehat{\theta} = \frac{W}{I+r+q-1} \frac{n+q+s+r-1}{n+q-1} \quad a \quad \widehat{\gamma} = \frac{n-I+s}{I+r+q-1},$$

odhady při kvadratické ztrátové funkci.

Důkaz. Aposteriorní hustota je

$$q(\lambda, p|W, I) \sim \lambda^{n+q-1} e^{-\lambda W/p} p^{-n+I+r-1} (1-p)^{n-I+s-1},$$

to znamená

$$q(p|W, I) \sim p^{-n+I+r-1} (1-p)^{n-I+s-1} \int_0^\infty \lambda^{n+q-1} e^{-\lambda W/p} d\lambda \sim$$
$$\sim p^{-n+I+r-1+n+q} (1-p)^{n-I+s-1} \sim B(I+r+q, n-I+s),$$

$$q(\lambda|p, W, I) \sim \lambda^{n+q-1} e^{-\lambda W/p} \sim G(W/p, n+q).$$

Dostáváme tak odhady

$$\widehat{p} = E(p|W, I) = \frac{I+r+q}{n+r+q+s},$$

$$\widehat{\lambda} = E(\lambda|W, I) = E(E[\lambda|p, W, I]|W, I) = E(\frac{n+q}{W} p|W, I) =$$
$$= \frac{n+q}{W} \frac{I+r+q}{n+r+q+s} = \frac{I+r+q}{W} \frac{n+q}{n+q+r+s}.$$

Dále spočítejme odhad $\gamma = 1/p - 1$ a $\theta = 1/\lambda$. Veličina γ má aposteriorní rozdělení

$$q(\gamma|W, I) \sim \frac{\gamma^{n-I+s-1}}{(1+\gamma)^{r+s} (\gamma W + W)^{n+q}} \sim \frac{\gamma^{n-I+s-1}}{(1+\gamma)^{n+r+s+q}} \sim$$
$$\sim B2(I+r+q, n-I+s)$$

(apriorní rozdělení bylo $q(\gamma) \sim B2(r+1, s)$), a tedy

$$\widehat{\gamma} = E(\gamma|W, I) = \frac{n-I+s}{I+r+q-1}.$$

θ má podmíněné aposteriorní rozdělení

$$q(\theta|p,W,I) \sim IG(W/p, n+q),$$

a tedy

$$\begin{aligned}\widehat{\theta} &= E(\theta|W,I) = E\left(E[\theta|p,W,I]|W,I\right) = E\left(\frac{W}{(n+q-1)p}\middle| W,I\right) = \\ &= \frac{W}{n+q-1}\left(1+E(\frac{1}{p}-1)\right) = \frac{W}{n+q-1}\left(1+E\gamma\right) = \\ &= \frac{W}{n+q-1}\left(1+\frac{n-I+s}{I+r+q-1}\right) = \frac{W}{n+q-1}\left(\frac{n+s+r+q-1}{I+r+q-1}\right) = \\ &= \frac{W}{I+r+q-1}\frac{n+q+s+r-1}{n+q-1}. \quad \square\end{aligned}$$

Volbou $q=0, r=s=1/2$ v předchozím případě dostáváme Jeffreysovu hustotu s příslušnými odhady (pro odhady θ a γ navíc požadujeme $I>0$)

$$\widehat{\lambda} = \frac{I+\frac{1}{2}}{W}\frac{n}{n+1}, \quad \widehat{\theta} = \frac{W}{I-\frac{1}{2}}\frac{n}{n-1}, \quad \widehat{p} = \frac{I+\frac{1}{2}}{n+1}, \quad \widehat{\gamma} = \frac{n-I+\frac{1}{2}}{I-\frac{1}{2}}.$$

Při $r=-s, s<q, s>0, a>0$ je apriorní hustota

$$q(\lambda,\gamma|W,I) \sim \lambda^{q-1}e^{-a\lambda}\gamma^{s-1},$$

aposteriorní hustoty

$$\begin{aligned}q(\lambda|W,I) &\sim \lambda^{n+q-1}e^{-\lambda(a+W)}\int_0^\infty \gamma^{n-I+s-1}e^{-\lambda\gamma W}d\gamma \sim \\ &\sim \lambda^{n+q-1-n+I-s}e^{-\lambda(a+W)} \sim G(W+a, I+q-s),\end{aligned}$$

a tedy

$$q(R|W,I) \sim LG(W+a, I+q-s),\ q(\theta|W,I) \sim IG(W+a, I+q-s);$$

$$\begin{aligned}q(\gamma|W,I) &\sim \gamma^{n-I+s-1}\int_0^\infty \lambda^{n+q-1}e^{-\lambda(a+W+W\gamma)} \sim \frac{\gamma^{n-I+s-1}}{(\gamma W+W+a)^{n+q}} \sim \\ &\sim \frac{\gamma^{n-I+s-1}}{(1+\gamma\frac{W}{W+a})^{n+q}}.\end{aligned}$$

Tvrzení. *V případě $r = -s$, $s < q$, (pro odhady θ, γ ještě $I + q - s > 1$), $s > 0$, $a > 0$ jsou bayesovskými odhady při kvadratické ztrátové funkci*

$$\widehat{\lambda} = \frac{I + q - s}{W + a}, \quad \widehat{\theta} = \frac{W + a}{I + q - s - 1},$$
$$\widehat{R} = \left(\frac{W + a}{W + a + 1}\right)^{I+q-s}, \quad \widehat{\gamma} = \frac{W + a}{W}\frac{n - I + s}{I + q - s - 1}.$$

Důkaz. Za odhady opět bereme aposteriorní střední hodnoty, které jsou kromě střední hodnoty veličiny γ zřejmé.

$$\widehat{\gamma} = E(\gamma|W, I) = \left(\int_0^\infty \frac{\gamma^{n-I+s}}{\left(1 + \gamma\frac{W}{W+a}\right)^{n+q}} d\gamma\right)\left(\int_0^\infty \frac{\gamma^{n-I+s-1}}{\left(1 + \gamma\frac{W}{W+a}\right)^{n+q}} d\gamma\right)^{-1} =$$
$$= \frac{W + a}{W}\frac{\int_0^\infty \frac{\gamma^{n-I+s}}{(1+\gamma)^{n+q}} d\gamma}{\int_0^\infty \frac{\gamma^{n-I+s-1}}{(1+\gamma)^{n+q}} d\gamma} = \frac{W + a}{W} E\left[B2(I + q - s, n - I + s)\right] =$$
$$= \frac{W + a}{W}\frac{n - I + s}{I + q - s - 1}. \quad \square$$

3.4. Asymptotické chování odhadů

Při skutečných hodnotách $\lambda, \gamma, p = 1/(1 + \gamma), R = e^{-\lambda}, \theta = 1/\lambda$ parametrů Koziol-Greenova modelu je

$$EI_1 = p, \quad \text{var } I_1 = p(1 - p), \quad EW_1 = p/\lambda, \quad \text{var } W_1 = p^2/\lambda^2,$$

jak bylo uvedeno na začátku této kapitoly. Následující tvrzení ukazují limitní vlastnosti odhadů odvozených v odstavcích 3.1 a 3.3, které měly vždy pro daný parametr podobný tvar.

Tvrzení. *Jestliže a, c_1, c_2, c jsou kladné konstanty, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - I + c_1}{I + c_2} = \gamma \text{ s. j.}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{I + c_1}{n + c_2} = p \text{ s. j.},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{I + c_1}{W + c_2} = \lambda \text{ s. j.}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{W + c_2}{I + c_1} = \theta \text{ s. j.},$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{W + a}{W + a + 1}\right)^{I+c} = R \text{ s. j.}$$

Důkaz. Ze zákona velkých čísel vyplývá, že

$$\frac{I}{n} = \overline{I}_n \underset{n\to\infty}{\to} p \text{ s. j.}, \quad \frac{W}{n} = \overline{W_n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{p}{\lambda} \text{ s. j.}$$

Díky tomu je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-I+c_1}{I+c_2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\overline{I}_n+c_1/n}{\overline{I}_n+c_2/n}=\frac{1-p}{p}=\gamma \text{ s. j.},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I+c_1}{n+c_2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{I}_n+c_1/n}{1+c_2/n}=p \text{ s. j.},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I+c_1}{W+c_2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{I}_n+c_1/n}{\overline{W}_n+c_2/n}=\frac{p}{p/\lambda}=\lambda \text{ s. j.},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W+c_2}{I+c_1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{W}_n+c_2/n}{\overline{I}_n+c_1/n}=\frac{p/\lambda}{p}=\frac{1}{\lambda}=\theta \text{ s. j. a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{I+c}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\overline{W}_n+a}\right)^{-n\overline{I}_n-c}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}e^{-\overline{I}_n/\overline{W}_n}\cdot 1=e^{-\lambda}=R \text{ s. j.} \quad \square$$

Tvrzení. *Jestliže a, c_1, c_2, c jsou kladné konstanty, potom*

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{I+c_1}{n+c_2}-p)\right)=N\left(0,p(1-p)\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{n-I+c_1}{I+c_2}-\gamma)\right)=N\left(0,\gamma(1+\gamma)^2\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{I+c_1}{W+c_2}-\lambda)\right)=N\left(0,\frac{\lambda^2}{p}\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{W+c_1}{I+c_2}-\theta)\right)=N\left(0,\frac{\theta^2}{p}\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{I+c}-R)\right)=N\left(0,\frac{R^2(\ln R)^2}{p}\right).$$

Důkaz. Centrální limitní věta poskytuje vztahy

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{I}{n}-p)\right)=N\left(0,p(1-p)\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{W}{n}-\frac{p}{\lambda})\right)=N\left(0,p^2/\lambda^2\right).$$

Použitím Cramer-Sluckého a Sverdrupovy věty o vztazích konvergencí můžeme snadno počítat

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{I+c_1}{n+c_2}-p)\right)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}\frac{n}{n+c_2}(\frac{I}{n}-p)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{n}\frac{c_1}{n+c_2}+\sqrt{n}(\frac{n}{n+c_2}-1)p\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{I}{n}-p)\right)=N\left(0,p(1-p)\right),$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{n-I+c_1}{I+c_2}-\gamma)\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}\frac{I}{I+c_2}(\frac{n-I}{I}-\gamma)+\sqrt{n}\frac{c_1}{I+c_2}+\sqrt{n}(\frac{I}{I+c_2}-1)\gamma\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{n-I}{I}-\gamma)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{n}(1-\overline{I}_n-\gamma\overline{I}_n)}{\overline{I}_n}\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{n}(p-\overline{I}_n)}{pp}\right) = N\left(0,\frac{p(1-p)}{p^4}\right) = \\
&\quad = N\left(0,\frac{(1-p)}{p^3}\right) = N\left(0,\gamma(1+\gamma)^2\right).
\end{aligned}$$

Také

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{I+c_1}{W+c_2}-\lambda)\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}\frac{W}{W+c_2}(\frac{I}{W}-\lambda)+\sqrt{n}\frac{c_1}{W+c_2}+\sqrt{n}(\frac{W}{W+c_2}-1)\lambda\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{I}{W}-\lambda)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{I}_n-\lambda\overline{W}_n)}{\overline{W}_n}\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\overline{I}_n-\lambda\overline{W}_n}{p/\lambda}\right) = N\left(0,\frac{1}{p^2/\lambda^2}\left(p(1-p)+\lambda^2\frac{p^2}{\lambda^2}\right)\right) = \\
&\quad = N\left(0,\frac{\lambda^2}{p}\right),
\end{aligned}$$

neboť W_1 a I_1 jsou nezávislé (jak je vidět např. z tvaru jejich sdružené hustoty), takže

$$\begin{pmatrix}\overline{I}_n-p\\ \overline{W}_n-p/\lambda\end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{D}}{\to}} N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p(1-p) & 0\\ 0 & p^2/\lambda^2\end{pmatrix}\right)$$

a $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(\overline{I}_n-\lambda\overline{W}_n)$ je tak lineární kombinací normálních rozdělení s příslušnými středními hodnotami a rozptyly. Podobně

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{W+c_1}{I+c_2}-\theta)\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\frac{W}{I}-\theta)+\sqrt{n}(\frac{W}{I+c_2}-\frac{W}{I})+\sqrt{n}\frac{c_1}{I+c_2}\right) = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}\frac{1}{\overline{I}_n}(\overline{W}_n-\theta\overline{I}_n)\right) = \\
&\quad = N\left(0,\frac{1}{p^2}\left(\frac{p^2}{\lambda^2}+\theta^2p(1-p)\right)\right) = \left(0,\theta^2(1+\frac{1-p}{p})\right) = \\
&\quad = N\left(0,\frac{\theta^2}{p}\right).
\end{aligned}$$

K důkazu posledního vztahu nejdříve pomocí

$$n^{2/3}\frac{I}{(W+a)^2} = n^{-1/3}\frac{\overline{I}_n}{\left(\overline{W}_n+\frac{a}{n}\right)^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ s. j.},$$

a tedy také $I/(W+a)^2 = o(n^{-2/3})$ při $n \to \infty$ s pravděpodobností 1, spolu se vztahem

$$Q_1 = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m(W+a)^m} = O(\frac{1}{(W+a)^2}) \quad \text{při } n \to \infty \text{ s. j.},$$

plynoucím z rozvoje $\ln(1+x)$ při $x \to 0$, zjistíme, že

$$\sqrt{n} I Q_1 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{s. j.}$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}\left(I\ln(1+\frac{1}{W+a}) - \lambda\right)\right) &= \\ = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}\left(\frac{I}{W+a} + IQ_1\right)\right) &= \\ = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}\frac{I}{W+a}\right) &= N\left(0, \frac{\lambda^2}{p}\right).\end{aligned}$$

Z toho nyní vidíme, že

$$n^{1/3}\left(I\ln(1+\frac{1}{W+a}) - \lambda\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} 0$$

a tedy

$$\sqrt{n}\left(I\ln(1+\frac{1}{W+a}) - \lambda\right)^2 \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} 0.$$

Použití Taylorova rozvoje exponenciální funkce nám pomůže k odvození posledního vztahu tvrzení při $c = 0$. Označme

$$Q_2 = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{I\ln(1+\frac{1}{W+a}) - \lambda}{m!}.$$

Protože existují $K > 0$ a $\delta > 0$ taková, že jestliže $|I\ln(1+1/(W+a)) - \lambda| < \delta$, potom $|Q_2| < K(I\ln(1+1/(W+a)) - \lambda)^2$, dostáváme také

$$P\left[|\sqrt{n}e^{-\lambda}Q_2| > \varepsilon\right] \le P\left[\sqrt{n}e^{-\lambda}K(I\ln(1+1/(W+a)) - \lambda)^2 > \varepsilon\right] \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

pro každé $\varepsilon > 0$, neboli

$$\sqrt{n}e^{-\lambda}Q_2 \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} 0.$$

Můžeme tedy upravovat

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^I - R)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}e^{-\lambda}(e^{-I\ln\frac{W+a+1}{W+a}+\lambda}-1)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}e^{-\lambda}(1-\frac{I\ln(1+\frac{1}{W+a})-\lambda}{1!}+Q_2-1)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}e^{-\lambda}(I\ln(1+\frac{1}{W+a})-\lambda)\right) =$$
$$= N\left(0, e^{-2\lambda}\frac{\lambda^2}{p}\right) = N\left(0, \frac{R^2(\ln R)^2}{p}\right),$$

Při $c > 0$ konečně můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{I+c} - R)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{n}\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{c}(\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{I} - R) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{n}R(1-\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{c})\right) =$$
$$= N\left(0, \frac{R^2(\ln R)^2}{p}\right),$$

neboť

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{c} = \left(\frac{\overline{W}_n+\frac{a}{n}}{\overline{W}_n+\frac{a+1}{n}}\right)^{c} = 1 \text{ s. j.},$$

$$\sqrt{n}(\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{I} - R) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{D}}{\to}} N\left(0, \frac{R^2(\ln R)^2}{p}\right) \quad \text{a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}R(1-\left(\frac{W+a}{W+a+1}\right)^{c}) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}R(1-\left(1-\frac{1}{W+a+1}\right)^{c}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}R(1-\left(1+O(\frac{1}{W+a+1})\right)) = 0 \text{ s. j.} \quad \square$$

3.5. Simulace

V odstavci 3.2 — v případě nezávislých gama apriorních rozdělení — se nám nepodařilo spočítat bayesovská rizika odhadů. Můžeme se tedy alespoň podívat na výsledky získané 5 000 simulacemi těchto nezávislých rozdělení.

Parametry apriorních rozdělení byly vybrány tak, aby střední hodnota λ byla rovna jedné, střední hodnota γ aby odpovídala podílům necenzorovaných pozorování $p = (1+\gamma)^{-1}$ rovným 0.5, 0.8 a 0.9 a stupeň přesnosti apriorní informace o hodnotách λ a γ, projevující se prostřednictvím V_λ nebo V_γ — podílu směrodatné odchylky apriorních rozdělení na jejich střední hodnotě (variačního

koeficientu), byl 0.5, 0.3 a 0.1. To vše pro výběry (které jsou pak cenzorovány) rozsahů $n = 20$, 50 a 100.

V následujících dvou tabulkách jsou uvedeny získané výsledky n-násobků bayesovských rizik pro jednotlivé parametry.

$n\cdot\varrho^\star_\lambda$	V_γ = 0.5			n	V_γ = 0.3			n	V_γ = 0.1			
V_λ	1.33	1.12	1.01	20	1.22	1.04	1.05	20	1.06	1.01	0.95	V_λ
=	1.72	1.29	1.16	50	1.60	1.23	1.21	50	1.23	1.12	1.12	=
0.5	2.02	1.39	1.24	100	1.88	1.31	1.21	100	1.42	1.19	1.16	0.5
p	0.5	0.8	0.9		0.5	0.8	0.9		0.5	0.8	0.9	p
V_λ	0.86	0.70	0.69	20	0.80	0.71	0.70	20	0.70	0.69	0.69	V_λ
=	1.30	1.01	0.96	50	1.21	0.94	0.90	50	0.93	0.87	0.90	=
0.3	1.62	1.12	1.04	100	1.47	1.09	0.99	100	1.12	1.04	0.96	0.3
p	0.5	0.8	0.9		0.5	0.8	0.9		0.5	0.8	0.9	p
V_λ	0.18	0.16	0.16	20	0.17	0.16	0.17	20	0.16	0.16	0.17	V_λ
=	0.39	0.34	0.33	50	0.37	0.33	0.34	50	0.34	0.33	0.34	=
0.1	0.63	0.55	0.51	100	0.63	0.53	0.50	100	0.53	0.51	0.49	0.1
	V_γ = 0.5			n	V_γ = 0.3			n	V_γ = 0.1			

$n\cdot\varrho^\star_\gamma$	V_γ = 0.5			n	V_γ = 0.3			n	V_γ = 0.1			
V_λ	2.154	0.193	0.047	20	1.219	0.089	0.020	20	0.184	0.012	0.002	V_λ
=	3.240	0.297	0.085	50	2.154	0.164	0.042	50	0.434	0.028	0.006	=
0.5	4.082	0.346	0.109	100	2.865	0.234	0.062	100	0.783	0.051	0.011	0.5
p	0.5	0.8	0.9		0.5	0.8	0.9		0.5	0.8	0.9	p
V_λ	2.114	0.191	0.048	20	1.134	0.091	0.020	20	0.181	0.011	0.002	V_λ
=	3.227	0.286	0.082	50	2.029	0.172	0.042	50	0.426	0.028	0.006	=
0.3	3.677	0.340	0.109	100	2.755	0.233	0.062	100	0.768	0.052	0.011	0.3
p	0.5	0.8	0.9		0.5	0.8	0.9		0.5	0.8	0.9	p
V_λ	1.712	0.184	0.050	20	1.047	0.087	0.020	20	0.183	0.012	0.002	V_λ
=	2.293	0.259	0.079	50	1.639	0.155	0.041	50	0.389	0.028	0.006	=
0.1	2.812	0.311	0.101	100	2.152	0.237	0.063	100	0.738	0.052	0.011	0.1
	V_γ = 0.5			n	V_γ = 0.3			n	V_γ = 0.1			

Je tedy např. vidět, že při přesné znalosti λ nemá na bayesovské riziko jeho odhadu přesnost znalosti p ani sama hodnota p velký vliv, podobně při přesné znalosti γ není riziko jeho odhadu ovlivňováno přesností λ. Proti tomu však hodnota $\varrho^\star_\gamma$ je podstatně ovlivněna hodnotami p podílu necenzorovaných pozorování. Samozřejmě obě bayesovská rizika s rostoucí přesností apriorních informací a s rostoucím podílem necenzorovaných pozorování (a také s rostoucím rozsahem výběru n — v tabulce jsou n-násobky) klesají.

Text programu, podle kterého byly simulace prováděny:

```
program simulace;

var Soubor:text;

    Sla0,Sla02,Shla,Shla2,Srola,Srola2,
    Sga0,Sga02,Shga,Shga2,Sroga,Sroga2,
    WW,Wj,Xj,Tj,
    la0i,hlai,rolai,Ahla,Ala0,Arola,varhla,varla0,varrola,
```

```
    ga0i,hgai,rogai,Ahga,Aga0,Aroga,varhga,varga0,varroga,
    c1,c2,EP,a,b,X:real;

    VYSLLA,VYSLGA:array[1..3,1..3] of real;
    VYSL:array[1..8,1..4] of real;
    Vc1:array[1..3] of real;
    Vc2:array[1..3] of real;
    Vnn:array[1..3] of integer;
    VEP:array[1..3] of real;

    PS,nn,nc1,nc2,nnn,nEP,CHh1,CHh2,CH01,CH02,
    II,Ij,
    r,s,ic1,ic2,inn,iEP,iPS,i,j,pres:integer;

begin
assign(Soubor,' g:\vysledky.pas' );rewrite(Soubor);
PS:=5000;
nc1:=3;nc2:=3;nnn:=3;nEP:=3;
Vc1[1]:=4;Vc1[2]:=11;Vc1[3]:=100;
Vc2[1]:=4;Vc2[2]:=11;Vc2[3]:=100;
Vnn[1]:=20;Vnn[2]:=50;Vnn[3]:=100;
VEP[1]:=0.5;VEP[2]:=0.8;VEP[3]:=0.9;
pres:=1000;randomize;X:=0.999999999;

for ic1:=1 to nc1 do
  begin c1:=Vc1[ic1];
  for ic2:=1 to nc2 do
    begin c2:=Vc2[ic2];
    for inn:=1 to nnn do
      begin nn :=Vnn[inn];
      for iEP:=1 to nEP do
        begin EP:=VEP[iEP];
        a:=c1;r:=trunc(c1);b:=c2*EP/(1-EP);s:=trunc(c2);
        CHh1:=1;CHh2:=1;CH01:=1;CH02:=1;
        Sla0:=0;Sla02:=0;Shla:=0;Shla2:=0;Srola:=0;Srola2:=0;
        Sga0:=0;Sga02:=0;Shga:=0;Shga2:=0;Sroga:=0;Sroga2:=0;
        for iPS:=1 to PS do
          begin
          la0i:=0;ga0i:=0;
          for i:=1 to r do la0i:=la0i-( ln(Random(pres)+1) - ln(pres+1) )/a;
          for i:=1 to s do ga0i:=ga0i-( ln(Random(pres)+1) - ln(pres+1) )/b;
          II:=0;WW:=0;
          for j:=1 to nn do
            begin
            Xj:=-( ln(Random(pres)+1) - ln(pres+1) )/la0i;
            Tj:=-( ln(Random(pres)+1) - ln(pres+1) )/la0i/ga0i;
            if Xj<Tj
            then begin II:=II+1;WW:=WW+Xj end
            else WW:=WW+Tj ;
            end;
          hlai:=( (II+r-s)/(a+WW) - b/WW +
                  sqrt( ((II+r-s)/(a+WW)-b/WW)*((II+r-s)/(a+WW)-b/WW) +
                  4*b*(nn+r-1)/(WW*(a+WW)) ) )/2 ;
          hgai:=( -(II+r-s)/b - (a+WW)/WW + sqrt( ((II+r-s)/b)*((II+r-s)/b) +
                  ((a+WW)/WW)*((a+WW)/WW) + 2*(II+r-s)*(a+WW)/b/WW +
                  4*(nn-II+s-1)*(a+WW)/WW/b ) )/2;
```

```
      rolai:=(hlai-la0i)*(hlai-la0i); rogai:=(hgai-ga0i)*(hgai-ga0i);
      Sla0:=Sla0+la0i; Sla02:=Sla02+la0i*la0i;
      Shla:=Shla+hlai;Shla2:=Shla2+hlai*hlai;
      Srola:=Srola+rolai; Srola2:=Srola2+rolai*rolai;
      Sga0:=Sga0+ga0i; Sga02:=Sga02+ga0i*ga0i;
      Shga:=Shga+hgai;Shga2:=Shga2+hgai*hgai;
      Sroga:=Sroga+rogai; Sroga2:=Sroga2+rogai*rogai;
      end;
    Ahla:=Shla/PS; varhla:=Shla2/PS-Ahla*Ahla;
    Ala0:=Sla0/PS; varla0:=Sla02/PS-Ala0*Ala0;
    Arola:=Srola/PS; varrola:=Srola2/PS-Arola*Arola;
    Ahga:=Shga/PS; varhga:=Shga2/PS-Ahga*Ahga;
    Aga0:=Sga0/PS; varga0:=Sga02/PS-Aga0*Aga0;
    Aroga:=Sroga/PS; varroga:=Sroga2/PS-Aroga*Aroga;
    if abs(Ala0-r/a) > 2*sqrt(varla0/PS) then CH01:=0 ;
    if abs(Ahla-r/a) > 2*sqrt(varhla/PS) then CHh1:=0 ;
    if abs(Aga0-s/b) > 2*sqrt(varga0/PS) then CH02:=0 ;
    if abs(Ahga-s/b) > 2*sqrt(varhga/PS) then CHh2:=0 ;
    VYSL[1,1]:=PS; VYSL[1,2]:=X ; VYSL[1,3]:=X; VYSL[1,4]:=X;
    VYSL[2,1]:=c1; VYSL[2,2]:=c2; VYSL[2,3]:=nn; VYSL[2,4]:=EP;
    VYSL[3,1]:=a; VYSL[3,2]:= r; VYSL[3,3]:=b; VYSL[3,4]:=s;
    VYSL[4,1]:=r/a; VYSL[4,2]:=s/b; VYSL[4,3]:=Arola; VYSL[4,4]:=Aroga;
    VYSL[5,1]:=r/a/a; VYSL[5,2]:=s/b/b;
    VYSL[5,3]:=sqrt(varrola); VYSL[5,4]:=sqrt(varroga);
    VYSL[6,1]:=CH01; VYSL[6,2]:=CH02; VYSL[6,3]:=CHh1; VYSL[6,4]:=CHh2;
    VYSL[7,1]:=Ala0; VYSL[7,2]:=Aga0; VYSL[7,3]:=Ahla; VYSL[7,4]:=Ahga;
    VYSL[8,1]:=sqrt(varla0); VYSL[8,2]:=sqrt(varga0);
    VYSL[8,3]:=sqrt(varhla); VYSL[8,4]:=sqrt(varhga);
    for i:=1 to 8 do
      begin
      for j:=1 to 4 do write(Soubor,VYSL[i,j]:16:10);
      writeln(Soubor);
      end;
    writeln(Soubor);
    for i:=1 to 8 do
      begin
      for j:=1 to 4 do write(VYSL[i,j]:16:10);
      writeln;
    end;
    writeln(' ____________________________________________________');
    VYSLLA[inn,iEP]:=nn*Arola;
    VYSLGA[inn,iEP]:=nn*Aroga;
    end;
  end;
writeln(' *****************************************************');
for inn:= 1 to nnn do
  begin
  for iEP:=1 to nEP do write(VYSLLA[inn,iEP]:8:6,' ');
  writeln;
  end;
writeln(' ____________________________________________________');
for inn:= 1 to nnn do
  begin
  for iEP:=1 to nEP do write(VYSLGA[inn,iEP]:8:6,' ');
  writeln;
  end;
```

```
    writeln(' ******************************************************');
    writeln(Soubor);
    for inn:= 1 to nnn do
      begin
      for iEP:=1 to nEP do write(Soubor,VYSLLA[inn,iEP]:8:6,' ');
      writeln(Soubor);
      end;
    writeln(Soubor);
    for inn:= 1 to nnn do
      begin
      for iEP:=1 to nEP do write(Soubor,VYSLGA[inn,iEP]:8:6,' ');
      writeln(Soubor);
      end;
    end;
  end;

close(Soubor);
end.
```

LITERATURA

[1] Anděl, J.: *Matematická statistika.* Praha, SNTL 1985.
[2] Hurt, J.: *Teorie spolehlivosti.* Praha, SPN 1984. (Skripta.)
[3] Hurt, J.: *On Statistical Methods for Survival Data Analysis.* Sborník prací letní školy JČMF Robust 92 (Antoch, J. - Dohnal, G., ed.), JČMF 1992, s. 57–74.
[4] Hušková, M.: *Bayesovské metody.* Praha, SPN 1985. (Skripta.)
[5] Kendall, M. G. - Stuart, A.: *The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1.* 2. vydání, London, Griffin 1962.
[6] Lawless, J. F.: *Statistical Models and Methods for Lifetime Data.* New York, Wiley 1982.
[7] Martz, H. F. - Waller, R. A.: *Bayesian Reliability Analysis.* New York, Wiley 1982.
[8] Štepán, J.: *Teorie pravděpodobnosti.* Praha, Academia 1987.