

JAK ZAPISOVAT ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ V PÍSEMCE (NA CVIČENÍCH PSA)

MICHAL FRIESL

2002-10-14

Řešení by mělo být podáno ve formě souvislých vět, všechny kroky vysvětleny (uvedena používaná tvrzení, ověřeny jejich předpoklady). Rozsah vysvětlení pochopitelně závisí na typu příkladu — jde-li o příklad, kde se vyšetřuje kovariance mezi součtem a rozdílem 2 hodů kostkou, není potřeba výpočet pravděpodobnosti, že součet bude 2, zdůvodňovat tak podrobně, jako v příkladu, kde hledání této pravděpodobnosti je jediným úkolem (a kdy nestačí jen prohlásit, že to je $1/36$).

Příklad. Jaká je pravděpodobnost, že součet bodů při 2 hodech kostkou bude menší než 4?

Nedostatečné řešení. Všech možností 36

$$\begin{array}{lcl} & 1,1 & \\ \text{příznivé} & 1,2 & P(A) = \frac{3}{36} = 0,83 \\ & 2,1 & \end{array}$$

Postačující řešení. Jako množinu výsledků (elementárních jevů) uvažujeme množinu uspořádaných dvojic

$$\Omega = \{(i, j); i, j \in \{1, \dots, 6\}\},$$

kde první (resp. druhá) složka představuje počet bodů při prvním (druhém) hodu, jev

$$\begin{aligned} A &= \{(i, j) \in \Omega; i + j < 4\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\} \subset \Omega \end{aligned}$$

reprezentuje ty výsledky, kde součet hodů je menší než 4.

Předpokládáme, že všechny dvojice $(i, j) \in \Omega$ (je jich $6 \cdot 6 = 36$) nastávají se stejnou pravděpodobností. Podle klasické definice pravděpodobnosti pak

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Pravděpodobnost, že součet hodů bude menší než 4, je $1/12$.

Příklad. Nevytáhne-li se letadlu podvozek, kontrolka se rozbliká s pravděpodobností 0,999, s pravděpodobností 0,005 však signalizuje závadu, i když vše proběhlo v pořádku. K selhání podvozku dochází s pravděpodobností 0,003. Jaká je pravděpodobnost, že blikající kontrolka představuje planý poplach?

Nedostatečné řešení.

R ... rozbliká

Z ... závada

$$p = \frac{0,005 \cdot 0,997}{0,005 \cdot 0,997 + 0,999 \cdot 0,003} = 0,6245.$$

Postačující řešení. Nechť S označuje jev, že kontrolka signalizuje poruchu, a N jev, že podvozek se nevytáhne, dle zadání známe pravděpodobnosti

$$P(S | N) = 0,999, \quad P(S | \bar{N}) = 0,005, \\ P(N) = 0,003.$$

Hledáme podmíněnou pravděpodobnost $P(\bar{N} | S)$.

Jevy N a $\bar{N}$ jsou disjunktní, mají kladné pravděpodobnosti ($P(\bar{N}) = 1 - P(N) = 0,997$), $P(N \cup \bar{N}) = 1$.

1. Podle věty o celkové pravděpodobnosti je

$$P(S) = P(S | \bar{N}) P(\bar{N}) + P(S | N) P(N) \\ = 0,005 \cdot 0,997 + 0,999 \cdot 0,003 \\ \doteq 7,982 \cdot 10^{-3} > 0,$$

a tak podle Bayesovy věty

$$P(\bar{N} | S) = \frac{P(S | \bar{N}) P(\bar{N})}{P(S | \bar{N}) P(\bar{N}) + P(S | N) P(N)} \\ = \frac{0,005 \cdot 0,997}{0,005 \cdot 0,997 + 0,999 \cdot 0,003} \\ \doteq \frac{4,985 \cdot 10^{-3}}{7,982 \cdot 10^{-3}} = 0,6245.$$

Pravděpodobnost, že blikající kontrolka představuje planý poplach, je přibližně 62 %.

Řešení uvedená v příkladech samozřejmě nejsou jediná možná. Doufám však, že názorně naznačují, jak asi by řešení příkladů v písemce měla vypadat.