Verze 2001-09-03
Michal Friesl

Ref: in Robust 2000, Sborník prací 11. letní školy JČMF (J. Antoch a G. Dohnal, eds.), JČMF, Praha, 2001, pp. 65–72.

BAYESOVSKÉ ODHADY V EXPONENCIÁLNÍM MODELU KONKURUJÍCÍCH SI RIZIK

MICHAL FRIESL

KMA FAV ZČU, Plzeň

Abstract. The paper deals with the competing risks model with independent exponential distibutions of risks, conjugate priors are considered for parameters of the model.

Bayes estimators under quadratic loss are explored, the stress is put on Bayes risks (or their asymptotic expansions). The latter are used to measure sensitivity of the estimators to changes in the prior distribution.

Резюме. Автор занимается моделью конкурирующих рисков с независимыми показательными распределениями, для параметров модели предполагает сопряженные априорные функции плотности.

Изучаются байесовские оцениватели параметров при квадратичной функции потерь, прежде всего байесовские риски (или их асимптотические разложения). Показано их применение на анализ чувствительности оценивателей на изменения априорной плотности.

1. Úvod

Model konkurujících si rizik předpokládá, že sledování může být ukončeno z k příčin, které nastávají v časech

$$X_1, \dots, X_k,$$

což jsou nezávislé nezáporné náhodné veličiny pozorovatelné pouze hypoteticky. Ve skutečnosti známe jen dobu sledování a příčinu ukončení

$$W = \min X_j, \qquad (I_1, \dots, I_k) = (I_{[W=X_1]}, \dots, I_{[W=X_k]}). \tag{1.1}$$

S takovým modelem se setkáme v řadě aplikací (zjišťování spolehlivosti součástek v zařízení, zkoumání doby života a příčin smrti, při $k = 2$ dostáváme model pro náhodné cenzorování, např. [2], [3] nebo [11]). Předpoklad nezávislosti dob $X_1, \dots, X_k$ nelze vzhledem k neidentifikovatelnosti sdružené funkce $\mathrm{P}[X_1 > x_1, \dots, X_k > x_k]$ z pozorování (1.1) testovat.

Jsou-li rozdělení veličin X_j spojitá, můžeme je, kromě distribučních funkcí F_j a hustot f_j, charakterizovat také intenzitami

$$\lambda_j(x) = \lim_{h \to 0} \mathrm{P}[X_j \in (x, x+h) \mid X_j > x]/h, \qquad x > 0,$$

tedy $\lambda_j(x) = f_j(x)/(1 - F_j(x))$, $F_j(x) = 1 - \exp(-\int_0^x \lambda_j(t)\,\mathrm{d}t)$. Můžeme potom psát $\mathrm{P}[I_j = 1 \mid W] = \lambda_j(W)/\sum_i \lambda_i(W)$, nezávislost W a $(I_1, \dots, I_k)$ odpovídá modelu proporcionálních rizik.

V tomto příspěvku se budeme zabývat modelem s nezávislými exponenciálně rozdělenými dobami $X_1, \dots, X_k$. Vycházíme z autorovy dizertační práce [4], kde lze nalézt podrobnější důkazy, zobecnění pro doby s intenzitami $\lambda_j(x) = \theta_j \mu_j(x)$, $\mu_j(x)$

známé, a aplikaci ve vícestavovém modelu. Modelem náhodného cenzorování se zabývá [7], odhadům v exponenciálním rozdělení se věnují [1] a [9].

2. Model

Předpokládáme náhodný výběr $(X_1^i, \dots, X_k^i)$, $i = 1, \dots, n$, k-tic nezávislých exponenciálně rozdělených náhodných veličin, $X_j^i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_j)$. Z každé k-tice je pozorováno jen její minimum, včetně jeho identifikace,

$$W^i = \min_{j=1,\dots,k} X_j^i, \quad (I_1^i, \dots, I_k^i) = (I^i_{[W^i = X_1^i]}, \dots, I^i_{[W^i = X_k^i]}), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Označíme-li dále

$$W = \sum_{i=1}^n W^i \qquad \text{a} \qquad I_j = \sum_{i=1}^n I_j^i, \qquad j = 1, \dots, k,$$

celkovou dobu pozorování a počet pozorování ukončený z příčiny j (veličina W má gama rozdělení a je nezávislá s multinomicky rozděleným vektorem $(I_1, \dots, I_k)$), věrohodnostní funkce pro $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ má tvar

$$L = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \Big(\lambda_j \mathrm{e}^{-\lambda_j W^i} \prod_{\ell \neq j} \mathrm{e}^{-\lambda_\ell W^i} \Big)^{I_j^i} = \mathrm{e}^{-\sum \lambda_j W} \prod_{j=1}^k \lambda_j^{I_j}. \tag{2.1}$$

Při i-tém pozorování, ukončeném v čase W^i, právě jedna z příčin nastala jako první (ta pro níž je $I_j^i \neq 0$). O té tedy víme, že nastala v čase W^i, zatímco o ostatních máme jen informaci, že nastaly někdy později.

Kromě intenzit λ_j, $j = 1, \dots, k$, se budeme zajímat také o další parametry modelu: střední hodnoty a funkce spolehlivosti zkoumaných dob, parametr exponenciálního rozdělení W^1 (tj. celkovou intenzitu) a pravděpodobnosti výskytu jednotlivých příčin,

$$\theta_j = 1/\lambda_j, \quad R_j(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_j t}, \quad \lambda = \sum \lambda_j, \quad p_j = \lambda_j / \lambda, \tag{2.2}$$

případně o poměr $\gamma_j = (\lambda - \lambda_j)/\lambda_j = 1/p_j - 1$.

Pro parametry modelu budeme předpokládat konjugovaná apriorní rozdělení a budeme studovat jejich bayesovské odhady.

3. Apriorní hustoty a odhady

Začněme s přirozeným konjugovaným systémem $\{\pi_{a,q_1,\dots,q_k};\ a > 0, q_j > 0\}$ pro věrohodnostní funkci (2.1) tvořeným hustotami

$$\pi_{a,q_1,\dots,q_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \propto \prod \lambda_j^{q_j - 1} \exp\big(- a \sum \lambda_j \big), \quad \lambda_j > 0, \tag{3.1}$$

tedy nezávislými gama rozděleními $\lambda_j \sim \mathrm{G}(a, q_j)$, $j = 1, \dots, k$. Ekvivalentně jsou nezávislé $\lambda \sim \mathrm{G}(a, q)$ a $(p_1, \dots, p_k)$ s Dirichletovým rozdělením $\mathrm{D}(q_1, \dots, q_k)$, kde značíme (a to v celém příspěvku) $q = \sum q_j$. Rozdělení veličin z (2.2) jsou postupně inverzní a logaritmické gama, gama a beta, konkrétně $\theta_j \sim \mathrm{IG}(a, q_j)$, $R_j(t) \sim \mathrm{LG}(a, q_j)$, $\lambda \sim \mathrm{G}(a, q)$ a $p_j \sim \mathrm{B}(q_j, q - q_j)$. Parametr γ_j má beta rozdělení druhého řádu.

Aposteriorní rozdělení má hustotu (3.1) s parametry $a + W, q_1 + I_1 \dots, q_k + I_k$, ihned také dostáváme bayesovské odhady při kvadratické ztrátové funkci.

Tvrzení 3.1. *Předpokládáme-li apriorní hustotu* (3.1), *bayesovské odhady při kvadratické ztrátové funkci jsou*

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{I_j + q_j}{W + a}, \quad \widehat{\theta}_j = \frac{W + a}{I_j + q_j - 1}, \quad \widehat{R_j(t)} = \Big(1 + \frac{t}{W + a}\Big)^{-(I_j + q_j)},$$
$$\widehat{\lambda} = \frac{n + q}{W + a}, \quad \widehat{p}_j = \frac{I_j + q_j}{n + q}, \quad \widehat{\gamma}_j = \frac{n + q - q_j - I_j}{I_j + q_j - 1},$$

pro $\widehat{\theta}_j$ *a* $\widehat{\gamma}_j$ *požadujeme* $I_j + q_j > 1$.

Důkaz. Bayesovské odhady při kvadratické ztrátové funkce jsou střední hodnoty aposteriorních rozdělení parametrů. □

V dalším se uplatní, že při apriorní hustotě (3.1) jsou veličiny $(I_1, \dots, I_k)$ a W nezávislé i nepodmíněně a že veličina $1/(W + a)$ má až na násobek beta rozdělení, $1/(W + a) \sim (1/a)\,\mathrm{B}(q, n)$.

V hustotách (3.1) z přirozeného konjugovaného systému je parametr q apriorního gama rozdělení pro λ součtem parametrů Dirichletova rozdělení pro pravděpodobnosti $(p_1, \dots, p_k)$. Uvažme jako apriorní rozdělení pro λ obecněji $\lambda \sim \mathrm{G}(a, q + r)$ nezávislé s $(p_1, \dots, p_k) \sim \mathrm{D}(q_1, \dots, q_k)$, přičemž stále značíme $q = \sum_j q_j$, což znamená

$$\pi_{a,q_1,\dots,q_k,r}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \propto \prod \lambda_j^{q_j - 1} (\sum \lambda_j)^r \exp\big(-a \sum \lambda_j\big), \quad \lambda_j > 0. \tag{3.2}$$

Zde máme závislost mezi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Systém $\{\pi_{a,q_1,\dots,q_k,r};\ a > 0, q_j > 0, r + q > 0\}$ je konjugovaný s (2.1), aposteriorní rozdělení rozdělení má parametry $a + W, q_1 + I_1, \dots, q_k + I_k, r$.

Tvrzení 3.2. *Předpokládáme-li apriorní hustotu* (3.2), *bayesovské odhady jsou*

$$\widehat{\lambda} = \frac{n + q + r}{W + a}, \quad \widehat{p}_j = \frac{I_j + q_j}{n + q}, \quad \widehat{\gamma}_j = \frac{n + q - q_j - I_j}{I_j + q_j - 1},$$
$$\widehat{\lambda}_j = \frac{n + q + r}{n + q} \frac{I_j + q_j}{W + a}, \quad \widehat{\theta}_j = \frac{n + q - 1}{n + q + r - 1} \frac{W + a}{I_j + q_j - 1},$$

pro $\widehat{\gamma}_j$ *za předpokladu* $I_j + q_j > 1$ *a pro* $\widehat{\theta}_j$ *v případě* $n + q + r > 1$.

Důkaz. Při výpočtu aposteriorních středních hodnot využijeme $\widehat{\lambda} = \sum_j \widehat{\lambda}_j$, díky nezávislosti v apriorním (aposteriorním) rozdělení také $\widehat{\lambda}_j = \widehat{\lambda}\widehat{p}_j$ a $\widehat{\theta}_j = \widehat{(1/\lambda)}\widehat{(1/p_j)}$. □

I v tomto případě známe rozdělení $1/(W + a) \sim (1/a)\,\mathrm{B}(q + r, n)$.

Hodnoty $a = 0, q_j = 1/2, r = -k/2$ v (3.2) odpovídají Jeffreysově (nevlastní) apriorní hustotě.

Jiné zobecnění (3.1) počítá s různými hodnotami parametru a pro jednotlivá gama rozdělení veličin λ_j, $j = 1, \dots, k$. Vezmeme-li apriorní hustotu

$$\pi_{a_1,\dots,a_k,q_1,\dots,q_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \propto \prod \lambda_j^{q_j - 1} \exp\big(-\sum a_j \lambda_j\big), \quad \lambda_j > 0, \tag{3.3}$$

ze systému $\{\pi_{a_1,\dots,a_k,q_1,\dots,q_k};\ a_j > 0, q_j > 0\}$, který je konjugovaný s (2.1), máme nezávislá $\lambda_j \sim \mathrm{G}(a_j, q_j)$, $j = 1, \dots, k$. Veličiny λ a $(p_1, \dots, p_k)$ jsou závislé, $(\lambda \mid p_1, \dots, p_k) \sim \mathrm{G}(\sum a_j p_j, q)$, navíc $(p_1, \dots, p_k)$ nyní nemají Dirichletovo rozdělení, ale hustotu $\pi(p_1, \dots, p_k) \propto (\prod p_j^{q_j - 1})/(\sum a_j p_j)^q$ na $\sum p_j = 1$.

Tvrzení 3.3. *Předpokládáme-li apriorní hustotu (3.3), bayesovské odhady jsou*

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{I_j + q_j}{W + a_j}, \quad \widehat{\theta}_j = \frac{W + a_j}{I_j + q_j - 1}, \quad \widehat{R_j(t)} = \Big(1 + \frac{t}{W + a_j}\Big)^{-(I_j+q_j)},$$
$$\widehat{\lambda} = \sum \frac{I_j + q_j}{W + a_j}, \quad \widehat{\gamma}_j = \frac{W + a_j}{I_j + q_j - 1} \sum_{\ell \neq j} \frac{I_\ell + q_\ell}{W + a_\ell},$$

pro $\widehat{\theta}_j$ a $\widehat{\gamma}_j$ předpokládáme $I_j + q_j > 1$.

Důkaz. Tvrzení uvádí aposteriorní střední hodnoty parametrů, využíváme $\widehat{\lambda} = \sum \widehat{\lambda}_j$ a $\widehat{\gamma}_j = \widehat{\theta}_j \sum_{\ell \neq j} \widehat{\lambda}_\ell$. □

Chybí nám odhad pro $\widehat{p}_j$, což je dáno složitým tvarem hustot v tomto případě. Pokud bychom se omezili na $k = 2$ (2 příčiny smrti), bylo by možno jej vyjádřit pomocí hypergeometrické funkce jako

$$\widehat{p}_1 = \frac{n + q}{I_1 + q_1} {}_2F_1(1, I_2 + q_2, n + q + 1, 1 - (W + a_1)/(W + a_2)),$$

kde

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \qquad (x)_k = x(x+1)\dots(x+k-1).$$

Všechny tři uvedené apriorní hustoty spadají pod společné zobecnění představované hustotou

$$\pi_{a_1,\dots,a_k,q_1,\dots,q_k,r} \propto \prod \lambda_j^{q_j - 1} (\sum \lambda_j)^r \exp\big(-\sum a_j \lambda_j\big).$$

Při hledání odhadů odpovídajících této hustotě však docházíme k integrálům

$$I_{q_1,\dots,q_k,m} = \int\limits_{\substack{p_1,\dots,p_k \geq 0 \\ \sum p_j = 1}} \cdots \int \frac{\prod p_j^{q_j - 1}}{(\sum a_j p_j)^{q+m}},$$

jejichž vyjádření pro $m \neq 0$ představuje problém. S ním se lze vyrovnat v případě $m \in \mathbf{N}$, kdy je můžeme explicitně vyjádřit, v jiném speciálním případě, $k = 2$, opět docházíme k ${}_2F_1$.

4. Konvergence

Zákon velkých čísel a centrální limitní věta pro posloupnosti nezávislých a stejně rozdělených veličin $W^1, W^2, \dots$ a $(I_1^1, \dots, I_k^1), (I_1^2, \dots, I_k^2), \dots$ poskytují při rostoucím počtu pozorování $n \to \infty$ konvergenci skoro jistě a v distribuci také pro naše odhady.

Tvrzení 4.1. *Pro odhady z tvrzení 3.1, 3.2, 3.3 platí*

$$\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_j - \lambda_j) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \lambda_j^2/p_j), \quad \sqrt{n}(\widehat{\theta}_j - \theta_j) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \theta_j^2/p_j),$$
$$\sqrt{n}(\widehat{R_j(t)} - R_j(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, t^2 \mathrm{e}^{-2\lambda_j t} \lambda_j^2/p_j), \quad \sqrt{n}(\widehat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \lambda^2),$$
$$\sqrt{n}(\widehat{\gamma}_j - \gamma_j) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \gamma_j(1 + \gamma_j^2)), \quad \sqrt{n}(\widehat{p}_j - p_j) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, p_j(1 - p_j)).$$

Důkaz. Např. pro $\widehat{\lambda}_j$ z Tvrzení 3.1 je asymptoticky pro $n \to \infty$

$$\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_j - \lambda_j) = \sqrt{n}\Big(\frac{I_j + q_j}{W + a} - \lambda_j\Big)$$
$$\sim \frac{1}{W/n}\left[\sqrt{n}\Big(\frac{I_j}{n} - p_j\Big) - \lambda_j\sqrt{n}\Big(\frac{W}{n} - \frac{1}{\lambda}\Big)\right] \sim \lambda\,\mathrm{N}(0, p_j).$$

Podobně naložíme s ostatními odhady, přičemž tvar $\widehat{R_j(t)}$ vyžaduje jemnější zacházení. □

Uvažujeme-li o odhadu funkce spolehlivosti $\widehat{R}_j(t) = (\frac{W+a_j}{W+a_j+t})^{I_j+q_j}$ jako o náhodném procesu v $C([0,\infty])$, můžeme ukázat následující slabou konvergenci.

Tvrzení 4.2. *Pro odhad $\widehat{R}_j(t) = (\frac{W+a_j}{W+a_j+t})^{I_j+q_j}$ funkce spolehlivosti $R_j(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_j t}$, $t > 0$, platí*

$$\sqrt{n}(\widehat{R}_j - R_j) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Z \qquad \text{na } C([0,\infty]),$$

kde Z je Gaussovský proces s $\mathrm{E}\,Z(t) = 0$ a $\mathrm{cov}(Z(s), Z(t)) = st\mathrm{e}^{-\lambda_j(s+t)}\lambda_j^2/p_j$.

Důkaz. Uplatníme stejné argumenty jako [6]. Nejdříve se Taylorovými rozvoji dopracujeme k procesu $\mathrm{e}^{-\lambda_j t}\sqrt{n}(\frac{I_j+q_j}{W+a_j}t - \lambda_j t)$. Ten se od $\sqrt{n}(\widehat{R}_j - R_j)$ liší o člen, který podle pravděpodobnosti konverguje k 0, a jeho konečněrozměrná rozdělení konvergují k odpovídajícím rozdělením Z. Že Z je jeho limitou na $C([0,\infty])$, plyne po ověření podmínek těsnosti. □

5. Bayesovská rizika

Při kvadratické ztrátové funkci je bayesovským rizikem bayesovského odhadu střední hodnota aposteriorního rozptylu odhadované veličiny. Aposteriorní rozptyl v našem případě známe, zbývá tedy spočítat střední hodnotu. Pro konkrétnost počítáme s přirozenou konjugovanou apriorní hustotou (3.1) (podobným způsobem bychom postupovali při (3.2), (3.3), či v případě dalších odhadů, viz [4]).

Pro některé z odhadů z Tvrzení 3.1 umíme bayesovské riziko explicitně spočítat, jako příklad zvolme $\widehat{\lambda}_j$.

Tvrzení 5.1. *Při apriorní hustotě (3.1) je bayesovské riziko bayesovského odhadu*

$$\mathrm{BR}\,\widehat{\lambda}_j = \frac{1}{n+q+1}\frac{q_j(q+1)}{a^2} = \frac{q_j(q+1)}{a^2}\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \tag{5.1}$$

při $n \to \infty$.

Důkaz. Využijeme (nepodmíněné) nezávislosti I_j a W, znalosti rozdělení $1/(W + a) \sim (1/a)\,\mathrm{B}(q, n)$ a podmíněného $(I_j \mid p_j) \sim \mathrm{Bi}(n, p_j)$,

$$\mathrm{BR}\,\widehat{\lambda}_j = \mathrm{E}(I_j + q_j)(W + a)^{-2} = (n\frac{q_j}{q} + q_j)\frac{q(q+1)}{a^2(n+q)(n+q+1)}.$$

□

Pro jiné odhady však nejsme schopni bayesovské riziko explicitně vyjádřit, a proto se uchýlíme k jeho asymptotickému rozvoji pro $n \to \infty$. Máme vyjádřit rozvoje středních hodnot funkcí veličin W/n a I_j/n, když W a I_j jsou součtem podmíněně nezávislých a stejně rozdělených veličin. Právě kvůli podmíněné nezávislosti je třeba postupovat opatrně. Naše rozvoje využívají tvrzení z [5], založená na rozvojích z [10], viz Dodatek.

Jako příklad uveďme riziko odhadu $\widehat{\theta}_j$.

Tvrzení 5.2. *Při apriorní hustotě* (3.1) *je bayesovské riziko bayesovského odhadu*

$$\mathrm{BR}\,\widehat{\theta}_j = \frac{a^2(q-3)}{(q_j-1)(q_j-2)(q_j-3)}\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

za předpokladu $q_j > 7$.

Důkaz. Pro θ_j s aposteriorním inverzním gama rozdělením máme

$$\mathrm{var}(\theta_j \mid W, I) = \frac{(W+a)^2}{(I_j+q_j-1)^2(I_j+q_j-2)},$$

když $I_j + q_j > 2$. Využijeme opět nezávislosti W a I_j a píšeme

$$\mathrm{BR}\,\widehat{\theta}_j = \frac{1}{n^3}\,\mathrm{E}(W+a)^2\,\mathrm{E}\,g_n(I_j/n),$$

kde funkce g_n je dána vztahem

$$g_n(x) = (x + (q_j-1)/n)^{-2}(x + (q_j-2)/n)^{-1}, \qquad x \in [0,1].$$

První ze středních hodnot nepůsobí vzhledem k příhodnému rozdělení $W + a$ problémy, ve druhé rozvíjíme při daném p_j kolem $\mathrm{E}(I_j/n \mid p_j) = p_j$. V Tvrzení 7.1 počítáme s $q = 1$, $k = 3$, máme $g_n(x) \le const \cdot (q_j-2)^{-3}n^3$. Vidíme, že $g_n(p_j)$ $g_n'(p_j)$ a g_n'' na $(p_j/2, 3p_j/2)$ jsou pro všechna n omezené násobkem p_j^{-3}, resp. p_j^{-4} a p_j^{-5}. Při $q_j > 7$ jsou střední hodnoty $\mathrm{E}\,p_j^i$ pro $i = -7,\dots,8$, $\mathrm{E}\,p_j^{-3}p_j^i$ pro $i = -1, 0$, $\mathrm{E}\,p_j^{-4}p_j^i$ pro $i = 0, 1$ a $\mathrm{E}\,p_j^{-5}p_j^i$ pro $i = 1, 2$ konečné a můžeme psát $\mathrm{E}\,g_n(I_j/n) = \mathrm{E}\,g_n(p_j) + O(1/n)$, což vede k výsledku

$$\begin{aligned}\mathrm{BR}\,\widehat{\theta}_j &= \frac{1}{n}\,\mathrm{E}\,\lambda^{-2}\,\mathrm{E}\,p_j^{-3} + O(1/n^2)\\ &= \frac{1}{n}\frac{a^2}{(q-1)(q-2)}\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{(q_j-1)(q_j-2)(q_j-3)} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).\end{aligned}$$

□

Ještě komplikovanější je případ rizika odhadu $\widehat{R_j(t)}$, kde je třeba použít dalších Taylorových rozvojů. Výsledkem je, že pro $q > 6$ je možno psát

$$\begin{aligned}\mathrm{BR}\,\widehat{R_j(t)} &= \mathrm{E}\Big[\Big(1+\frac{2t}{W+a}\Big)^{-(I_j+q_j)} - \Big(1+\frac{t}{W+a}\Big)^{-2(I_j+q_j)}\Big]\\ &= \mathrm{E}\Big(t^2\mathrm{e}^{-2t(I_j+q_j)/(W+a)}\frac{I_j+q_j}{(W+a)^2}\Big) + O(1/n^2)\\ &= \frac{1}{n}t^2\,\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-2t\lambda_j}p_j\lambda^2 + O(1/n^2),\end{aligned}$$

podrobnosti a rizika dalších odhadů v [4].

6. Citlivost

Nakonec se podíváme, jak je bayesovské riziko citlivé na nepřesnost předpokladu o apriorní hustotě, jako příklad poslouží odhad parametru λ_j. Použijeme-li místo bayesovského odhadu $\widehat{\lambda}_j$ jiný odhad $\widetilde{\lambda}_j$, je

$$\mathrm{BR}\,\widetilde{\lambda}_j = \mathrm{E}(\lambda_j - \widetilde{\lambda}_j)^2 = \mathrm{BR}\,\widehat{\lambda}_j + \mathrm{E}(\widehat{\lambda}_j - \widetilde{\lambda}_j)^2.$$

Mají-li rizika těchto odhadů rozvoje pro $n \to \infty$

$$\mathrm{BR}\,\widehat{\lambda}_j = \frac{c}{n} + \frac{a}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}), \quad \mathrm{BR}\,\widetilde{\lambda}_j = \frac{c}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}), \tag{6.1}$$

definujeme (dle [8]) asymptotickou deficienci $\widetilde{\lambda}_j$ vzhledem k $\widehat{\lambda}_j$ jako $(b-a)/c$.

Příkladem jiného odhadu může být takové $\widetilde{\lambda}_j$, které bychom dostali jako bayesovský odhad při (nesprávném) předpokladu, že apriorní hustotou je (3.1) s parametry $\widetilde{a}, \widetilde{q}_1, \dots, \widetilde{q}_k$.

Tvrzení 6.1. *Deficience odhadu $\widetilde{\lambda}_j = (I_j+\widetilde{q}_j)/(W+\widetilde{a})$ vzhledem k $\widehat{\lambda}_j$ je při apriorní hustotě (3.1)*

$$\frac{q}{q_j}(q_j-\widetilde{q}_j)^2 - 2\frac{q+2}{a}(q_j-\widetilde{q}_j)(a-\widetilde{a}) + \frac{1}{a^2}\frac{q_j}{q+1}(q+2)(q+3)(a-\widetilde{a})^2.$$

Důkaz. Rozdíl koeficientů $b-a$ v (6.1) získáme z rozvoje

$$\begin{aligned}\mathrm{BR}\,\widetilde{\lambda}_j - \mathrm{BR}\,\widehat{\lambda}_j = \mathrm{E}(\widehat{\lambda}_j-\widetilde{\lambda}_j)^2 &= \mathrm{E}\left(\frac{W(q_j-\widetilde{q}_j)-I_j(a-\widetilde{a})+q_j\widetilde{a}-\widetilde{q}_j a}{(W+a)(W+\widetilde{a})}\right)^2\\ &= \mathrm{E}\Big(\frac{(W+a)(q_j-\widetilde{q}_j)-I_j(a-\widetilde{a})}{(W+a)^2}\Big)^2 + O(1/n^3)\\ &= \frac{1}{n^2}\,\mathrm{E}\left[(q_j-\widetilde{q}_j)^2\lambda^2 - 2(q_j-\widetilde{q}_j)(a-\widetilde{a})p_j\lambda^3 + (a-\widetilde{a})^2p_j^2\lambda^4\right] + O(1/n^3),\end{aligned}$$

kde jsme nakonec postupovali podobně jako v důkazu Tvrzení 5.1. Koeficient c čteme v (5.1). □

7. Dodatek

V důkazu Tvrzení 5.2 (i dále) bylo pro asymptotické rozvoje středních hodnot použito tvrzení z [5], které se hodí pro náhodné veličiny s momenty omezenými mocninami střední hodnoty.

Tvrzení 7.1. *Nechť náhodné veličiny $Y_1, Y_2, \dots$ jsou při daném θ nezávislé a stejně rozdělené, veličiny $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$, $n = 1, 2, \dots$, mají hodnoty v intervalu $A \subset \mathbf{R}$ a $\mu_\theta = \mathrm{E}[Y_1 \mid \theta] \in A$ je kladné. Nechť funkce $g_n\colon A \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, mají spojité derivace řádu $(q+1)$ na $M_\theta = (\mu_\theta/2, 3\mu_\theta/2) \cap A$. Nechť $k \geq 0$ je celé a pro momenty Y_1 platí $\mathrm{E}[|Y_1^j|\,|\theta] \leq \sum_{i=1}^j c_i\mu_\theta^i$ s nějakými konstantami $c_1, \dots, c_j > 0$, $j = 1, \dots, q+\delta+1+2k$ (kde $\delta = 0$ pro q liché a $\delta = 1$ pro q sudé). Jestliže existuje $0 \leq u \leq k$ a dále pro každé θ konstanty $a_\theta, a_{0\theta}, a_{1\theta}, \dots, a_{q+1,\theta} \geq 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$*

$$|g_n^{(j)}(\mu_\theta)| \leq a_{j\theta}, \quad j = 0, \dots, q,$$

$$|g_n^{(q+1)}(x)| \leq a_{q+1,\theta} \quad \text{na } M_\theta, \qquad |g_n(x)| \leq a_\theta|x|^u n^k \quad \text{na } M_\theta^c = A \setminus M_\theta,$$

a jsou-li střední hodnoty $\mathrm{E}\,a_\theta\mu_\theta^i$ pro $i = -(q+\delta+2k), \dots, q+\delta+1+2k$ a $\mathrm{E}\,a_{j\theta}\mu_\theta^i$ pro $i = j-q-\delta, \dots, j+\delta$ $(j = 0, \dots, q+1)$ konečné, pak

$$\mathrm{E}\,g_n(X_n) = \mathrm{E}\sum_{j=0}^q \frac{g_n^{(j)}(\mu_\theta)}{j!}\,\mathrm{E}[(X_n-\mu_\theta)^j \mid \theta] + O(1/n^{(q+1)/2}) \qquad \text{při } n \to \infty.$$

Důkaz. Viz [5], Proposition 2.3. □

Literatura

1. J. Antoch, M. Brzezina a A. Linka, *Asymptotic approximation of Bayes risk of estimators of reliability for exponentially distributed data*, Statist. Decisions **15** (1997), no. 3, 241–253.
2. M. J. Crowder, A. C. Kimber, R. L. Smith, and T. J. Sweeting, *Statistical analysis of reliability data*, Chapman & Hall, London, 1991.
3. H. A. David and M. L. Moeschberger, *The theory of competing risks*, Griffin, London, 1978.
4. M. Friesl, *Bayesian estimation in exponential competing risks and related models, with applications to insurance*, Dizertační práce, MFF UK, Praha, 2000.

5. M. Friesl, *An asymptotic expansion for expectations of functions of sums via conditional moments*, to appear in Proceedings. University of West Bohemia, vol. 1, ZČU, Plzeň, 2000.
6. M. Friesl, *Weak asymptotics of Bayes estimator of the reliability function in the Koziol-Green model*, Statist. Decisions **19** (2001), 83–87.
7. M. Friesl and J. Hurt, *On Bayesian estimation in an exponential distribution under random censorship*, submitted.
8. J. L. Hodges, jr. and E. L. Lehman, *Deficiency*, Ann. Math. Statist. **41** (1970), 783–801.
9. J. Hurt, *On estimation of reliability in the exponential case*, Apl. Mat. **21** (1976), no. 4, 263–272.
10. J. Hurt, *Asymptotic expansions for moments of functions of stochastic processes and their applications*, Statist. Decisions **4** (1986), no. 2–3, 251–271.
11. H. F. Martz and R. A. Waller, *Bayesian Reliability Analysis*, Wiley, New York, 1982.