EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Podpora rozvoje digitální gramotnosti

# Slovní úlohy o pohybu

**Motivační úloha:** Vzdálenost mezi Brnem a Prahou je po dálnici 200 kilometrů. Z Brna vyjel směrem na Prahu automobil jedoucí stálou rychlostí 95 km/h. Půl hodiny poté vyrazil stejnou cestou motocyklista na motorce stálou rychlostí 130 km/h. Dokáže motocyklista dohonit automobil ještě před Prahou? Pokud ano, jakou nejmenší rychlostí by musel automobilista jet, aby ho motocykl nedohonil?

**Řešení:** V obrázku máme vyznačeny údaje, které známe. Navíc, předpokládáme-li dostižení automobilu ještě před Prahou, zavedeme neznámou $t$, která odpovídá době, po kterou je automobil na cestě, než jej motocykl dostihne.

Nejprve vypočítejme vzdálenost od Brna, v níž by motocykl dohnal automobil.

Dráha z Brna do Prahy je 200 kilometrů, automobil jede rychlostí $v_1 = 95$ km/h a než jej dojede motorka, je na cestě $t$ hodin. Motorka vyjíždí o půl hodiny později než automobil, proto jede $t - 0{,}5$ hodin, a to rychlostí $v_2 = 130$ km/h.

Obecný vzorec pro výpočet dráhy pomocí rychlosti a času je

$$s = v \cdot t.$$

Vzorec pro výpočet dráhy automobilu je

$$s_1 = v_1 \cdot t,$$

vzorec pro výpočet dráhy motocyklu je

$$s_2 = v_2 \cdot (t - 0{,}5).$$

V okamžiku setkání se obě dráhy rovnají, tedy

$$v_1 \cdot t = v_2 \cdot (t - 0{,}5)$$

$$95 \cdot t = 130 \cdot t - 65$$

$$35 \cdot t = 65$$

$$t = \frac{13}{7} \text{ hodiny}$$

Výsledek $t = \frac{13}{7}$ hodiny, což je přibližně 1,86 h, resp. 1 hodina a 52 minut, odpovídá času, po který je automobil na cestě, než jej motorka dostihne. Použijeme vzorec pro výpočet dráhy, abychom zjistili, kolik za tuto dobu automobil urazil.

$$s = v \cdot t$$

$$s = 95 \cdot \frac{13}{7}$$

$$s = \frac{1235}{7} \doteq 176{,}43 \text{ kilometrů}$$

Motocykl tedy dožene automobil přibližně 176,43 kilometrů od Brna, to je asi 23,57 kilometrů před Prahou.

**Odpověď zní: Ano, motocyklista dožene automobil ještě před Prahou.**

Pro výpočet týkající se druhé otázky uvažujme takto. Nesmí-li motocykl dohnat automobil před Prahou, znamená to, že v okamžiku setkání musí oba dopravní prostředky ujet více než daných 200 kilometrů. V hraničním případě, kdy $s = 200$ kilometrů, dojde k setkání při příjezdu do Prahy a pro motocykl bude platit rovnice

$$s = v_2 \cdot (t - 0{,}5)$$

$$200 = 130 \cdot (t - 0{,}5)$$

$$200 = 130 \cdot t - 65$$

$$130 \cdot t = 265$$

$$t = \frac{53}{26} \text{ hodiny}$$

Za tento čas $t = \frac{53}{26}$ hodiny, což je přibližně 2 hodiny a 2 minuty, dojede automobil z Brna do Prahy (cesta motocyklu je o půl hodiny kratší). Využijeme vypočtený čas ke zjištění rychlosti $v$ automobilu.

$$s = v \cdot t$$

$$200 = \frac{53}{26} \cdot v$$

$$v = \frac{5200}{53} \doteq 98{,}12 \text{ km/h}$$

**Odpověď: Rychlost, kterou musí automobil jet, aby jej motocykl nedostihl před Prahou, je minimálně 98,12 km/h.**

Přestože je početní řešení slovních úloh o pohybu poměrně efektivní, nabízí se i druhá možnost zjištění výsledku, která je v řadě případů více názorná. Jedná se o řešení grafické, kdy daný problém řešíme pomocí konstrukce či náčrtku s užitím základů analytické geometrie.

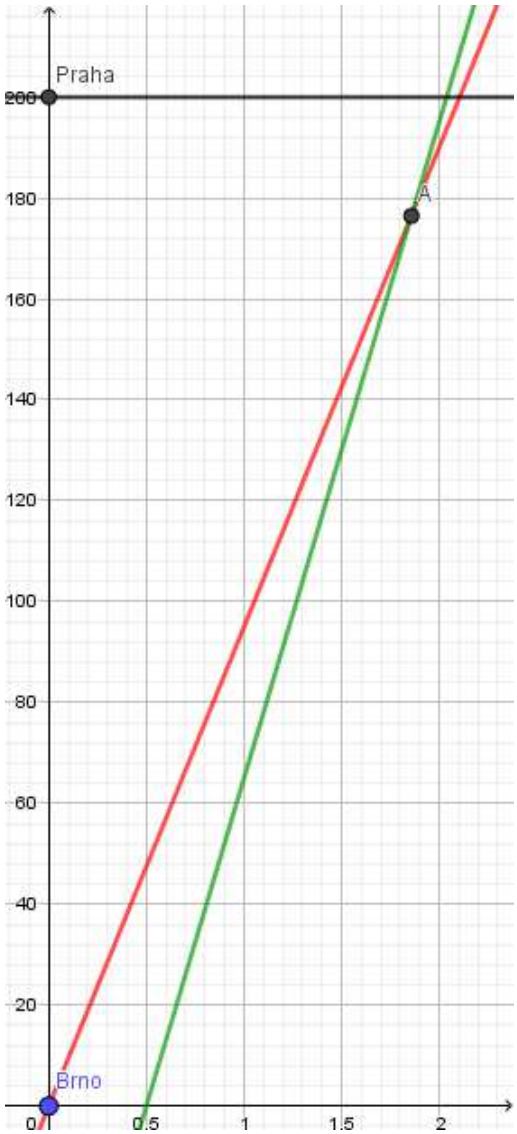
Při použití softwaru dynamické geometrie má tento postup ještě jednu velkou výhodu, a sice můžeme pomocí posuvníků se zadanou situací experimentovat, měnit některé vstupní parametry a sledovat změnu výstupu.

Chceme-li řešit grafickou metodou výše uvedenou úlohu, musíme si nejprve ujasnit a uvědomit několik věcí:

- Čas jako nezávisle proměnnou vynášíme na osu $x$.
- Ujetou vzdálenost jako závisle proměnnou vynášíme na osu $y$.
- „Průběh pohybu“ je znázorněn jako část přímky o rovnici $y = k \cdot x$, kde $y$ odpovídá ujeté dráze, koeficient $k$ odpovídá rychlosti, $x$ je čas, po který se objekt pohybuje.
- Pohyb přímky v horizontálním směru zajistíme zavedením parametru $t$ do rovnice $y = k \cdot (x - t)$, přičemž tento parametr určuje „zpoždění“, se kterým objekt zahájil svůj pohyb.
- Pohyb přímky ve vertikálním směru určuje zavedení parametru $q$ do rovnice $y = k \cdot x + q$, který určuje vzdálenost od startu, ve které objekt zahájil svůj pohyb.

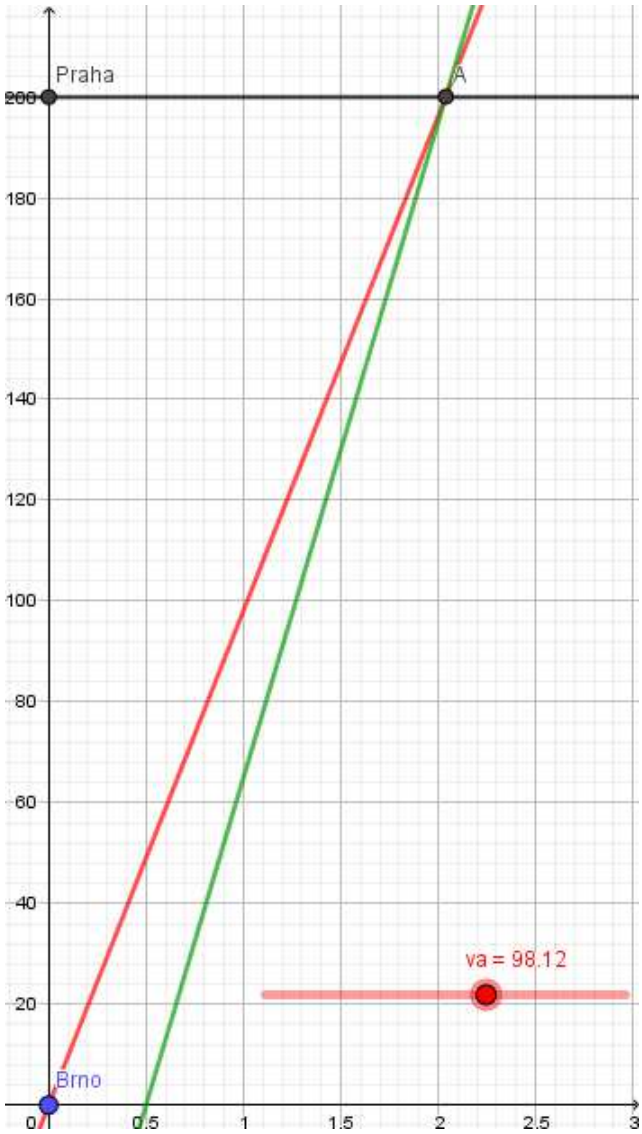
Zadaná úloha je při užití zmíněných pravidel řešitelná následujícím způsobem:

Automobil jede z Brna rychlostí 95 km/h, obrazem jeho jízdy bude příslušná část přímky s rovnicí $y = 95 \cdot x$. Motocykl vyrazil na cestu s půlhodinovým zpožděním rychlostí 130 km/h, jeho jízdu reprezentuje část přímky s rovnicí $y = 130 \cdot (x - 0{,}5)$.




V průsečíku těchto přímek můžeme odečíst hodnoty *x*-ové a *y*-ové souřadnice – *x*-ová je $\frac{13}{7}$ a odpovídá času setkání počítanému od výjezdu automobilu, *y*-ová je $\frac{1235}{7} \doteq 176{,}43$ a jedná se o vzdálenost místa setkání počítanou od Brna. Vzhledem k tomu ,že zjištěná vzdálenost je menší než 200 kilometrů, které měl motocyklista k dispozici na dohnání automobilu, je zřejmé, že to zvládl ještě před Prahou.

Chceme-li zodpovědět i druhou otázku, je vhodné využít posuvník. Nazvěme jej $v_a$ a jeho hodnota bude korespondovat s rychlostí, kterou se pohybuje automobil. Jízda auta pak bude reprezentována přímkou o rovnici $y = v_a \cdot x$.




Pohybem posuvníku měníme rychlost automobilu a tím i směrnici přímky odpovídající jeho ujeté trase. Zároveň je tímto pohybem ovlivňována i poloha průsečíku obou přímek, resp. místo, kde motocykl dožene automobil. Je vidět, že při nastavení jedné konkrétní hodnoty $v_a$, a to $v_a$ = 98,12 km/h, dosáhne *y*-ová souřadnice průsečíku hodnoty 200, což značí, že motocykl dohonil automobil při vjezdu do Prahy. Pro všechny vyšší hodnoty $v_a$ již dojde k setkání za 200. kilometrem.

Užití softwaru dynamické geometrie umožňuje jiný přístup (odlišný od tradičního početního) k řešení podobných typů úloh. Práce s posuvníky nabízí řešiteli široké možnosti experimentování se vstupními hodnotami, jejichž dopad na výsledky je okamžitě vidět. Celé řešení bývá u těchto typů úloh poměrně názorné a dobře pochopitelné.