

Úloha řízení kyvadla pomocí dynamického programování

Jan Škach¹

1 Úvod

Automatické řízení systémů je nejenom v technice významnou vědní disciplínou. Obsah tohoto příspěvku je zaměřen na návrh optimálního regulátoru systému se známým matematickým modelem systému pomocí dynamického programování (DP). DP má uplatnění nejen v technických oborech, ale také např. při řešení ekonomických problémů. Aplikaci najde v úlohách přiměřeného množství diskretních stavů a řízení, avšak použitím aproximačních metod může být využité i v následující úloze řízení kyvadla se spojitým prostorem stavů. DP je možné aplikovat na lineární i nelineární systémy. Obecný problém může být formulován na konečném nebo nekonečném horizontu, tedy problém s končným nebo nekonečným počtem kroků řízení.

2 Návrh regulátoru pomocí DP

Nelineární spojitý model kyvadla je reprezentován rovnicí $ml^2\ddot{\varphi}(t) = -mgl \sin(\varphi(t)) - c\dot{\varphi}(t) + u(t)$, kde $\varphi(t)$ [rad] je úhel natočení kyvadla z dolní rovnovážné polohy a $u(t)$ [Nm] představuje vstupní točivý moment. Šimandl et al. (2014) použitím Eulerovy metody diskretizace spojitého stavového modelu s periodou vzorkování $T_s = 0.05$ [s], hmotnosti kyvadla $m = 2$ [kg], jeho délky $l = 1$ [m] a koeficientu tlumení $c = 6$ [kg m² s⁻¹] získal následující diskretní stavový popis systému v časovém okamžiku $k = 1, 2, \dots$ s vektorem stavů $\mathbf{x}_k = [x_{k,1}, x_{k,2}]^T$, $x_{k,1} = \varphi_k$, $x_{k,2} = \dot{\varphi}_k$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_k, u_k) + \mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 0 & 0.85 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.025 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4905 \end{bmatrix} \sin(x_{k,1}) + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

kde $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}([0, 0]^T, 0.01\mathbf{I}_2)$ představuje stavový šum. Úloha předpokládá diskretní konečnou množinu možných řízení $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$. Spojitý prostor stavů $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^2$ je aproximován diskretní mřížkou \mathcal{S}^g . Agregáčnící funkce $\mathbf{g} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^g$ zajistí promítnutí stavu $\mathbf{x}_k \in \mathcal{S}$ do bodu mřížky $\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathcal{S}^g$, $\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) = \arg \min_{\xi \in \mathcal{S}^g} \|\mathbf{x}_k - \xi\|_2$, ξ představuje bod mřížky.

Cílem úlohy je nalézt strategii řízení $\rho : \mathcal{S}^g \mapsto \mathcal{U}$, která každému bodu mřížky přiřadí řízení z množiny přípustných řízení \mathcal{U} takové, že je minimalizováno zvolené kritérium $J(\rho) = \lim_{F \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^F \lambda^k L(\mathbf{x}_k, u_k)$ s diskontním faktorem $\lambda = 0.98$ a kvadratickou ztrátovou funkcí definovanou jako

$$L(\mathbf{x}_k, u_k) = [h(x_{k,1}), x_{k,2}] \mathbf{Q} [h(x_{k,1}), x_{k,2}]^T + r u_k^2, \quad (2)$$

kde $h(x_{k,1}) = ((x_{k,1} + \pi) \bmod 2\pi) - \pi$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r = 0.01$.

¹ student doktorského studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Kybernetika, e-mail: janskach@kky.zcu.cz

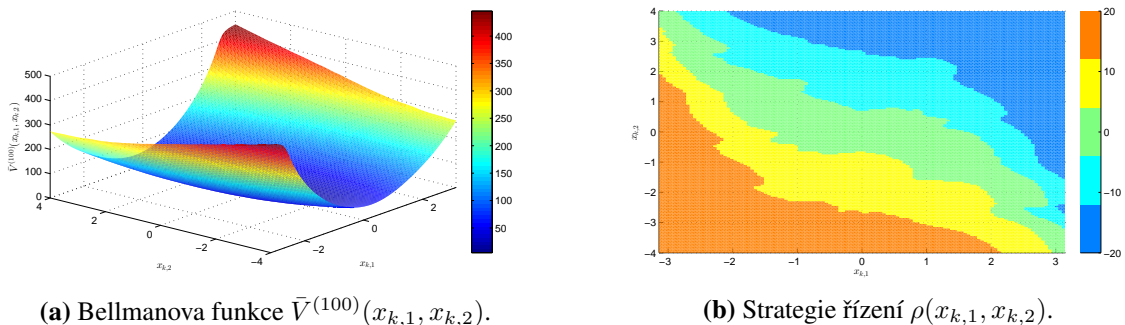
Postup nalezení optimální strategie řízení se opírá o řešení nelineární funkcionální rovnice, tzv. Bellmanovy rovnice optimality. Její obecný tvar pro úlohu nekonečného horizontu řízení je následující

$$V^*(\mathbf{x}_k) = \min_{u_k \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \{L(\mathbf{x}_k, u_k) + \lambda V^*(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{x}_k, u_k\}, \quad (3)$$

kde V^* je Bellmanova funkce, \mathbb{E} označuje střední hodnotu. Po nalezení funkce V^* lze vypočítat strategie řízení $u_k^* = \rho^*(\mathbf{x}_k) = \arg \min_{u_k \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \{L(\mathbf{x}_k, u_k) + \lambda V^*(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{x}_k, u_k\}$. Použitím jednotné mřížky a agregační funkce aproximuje optimální Bellmanovu funkci po částech konstatní funkce $\bar{V} : \mathcal{S}^g \mapsto \mathbb{R}$. Jednu z numerických metod hledání V^* představuje metoda iterace Bellmanovy funkce, která rekurzivně zjišťuje nové hodnoty Bellmanovy funkce z funkcionální rovnice $\bar{V}^{(i+1)}(\boldsymbol{\xi}) = \min_{u_k \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \{L(\boldsymbol{\xi}, u_k) + \lambda \bar{V}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}') | \boldsymbol{\xi}, u_k\}$, $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}) \in \mathcal{S}^g$. Lze ukázat, že $\bar{V}^{(i+1)}$ konverguje k \bar{V} . Zvolená zastavovací podmínka iterační metody je $\|\bar{V}^{(i+1)}(\boldsymbol{\xi}) - \bar{V}^{(i)}(\boldsymbol{\xi})\|_\infty \leq \delta_{VI}$, $\delta_{VI} = 0.01$ a maximální počet iterací $n_{VI} = 100$.

3 Zhodnocení výsledků

Simulační experiment obsahoval přípustné řízení $\mathcal{U} = \{0, -20, -10, 10, 20\}$ a mřížku definovanou $\mathcal{S}^g = \{-\pi, -59\pi/60, \dots, 59\pi/60, \pi\} \times \{-4, -3.95, \dots, 3.95, 4\}$. Střední hodnota $\mathbb{E} \{\bar{V}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}') | \boldsymbol{\xi}, u_k\}$ byla vypočítána pomocí 100 Monte Carlo simulací. Metoda iterace Bellmanovy funkce byla ukončena po 100 iteracích s rozdílem $\|\bar{V}^{(i+1)}(\boldsymbol{\xi}) - \bar{V}^{(i)}(\boldsymbol{\xi})\|_\infty = 0.0191$. Nalezená Bellmanova funkce a strategie řízení do dolní rovnovážné polohy kyvadla je zobrazena na obrázku 1. Algoritmus hledá strategii řízení offline. Strategie řízení je následně použita online při řízení systému. Aktuální stav systému \mathbf{x}_k určí, jaké řízení bude aplikováno. Tento přístup je paměťově a výpočetně náročný, jelikož musí být ohodnoceny všechny kombinace stavů systému a možných řízení. Výhodou je jistá univerzálnost přístupu a aplikace na řízení nelineárních systémů.



Obrázek 1: Výstupy simulačního experimentu použitím metody iterace účelové funkce.

Poděkování

Obsah práce byl diskutován s Ing. Ivem Punčochářem Ph.D., kterému tímto velmi děkuji.

Literatura

Šimandl, M., Škach, J., and Punčochář, I., 2014. Approximation Methods for Optimal Active Fault Detection. *Accepted for publication. Proceeding, 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation.*