Závislost odporu vodičů na teplotě

František Skuhravý

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

datum měření: 4.4.2003

1 Úvod do problematiky

Důležitou charakteristikou pevných látek je konduktivita γ (dříve nazývaná měrná elektrická vodivost), která je definována Ohmovým zákonem v diferenciálním tvaru: $j = \gamma\, E$. Podle její velikosti lze látky zhruba dělit do tří skupin: *nevodiče* $< 10^{-8}\ (\Omega\,\mathrm{m})^{-1} <$ *polovodiče* $< 10^{6}\ (\Omega\,\mathrm{m})^{-1} <$ *vodiče*. Přímá úměrnost mezi proudovou hustotou j a intenzitou elektrického pole E je důsledkem srážek elektronů s kmitajícími atomy krystalové mříže (fonony) nebo s poruchami (příměsi, dislokace, plošné poruchy). Tyto srážky lze popsat *relaxační dobou* τ, která udává, jak rychle se sytém narušený vnějším polem vrací do rovnováhy. V případě srážek elektronů s fonony je relaxační doba totožná se střední dobou mezi dvěma srážkami. Pro konduktivitu lze odvodit vztah:

$$\gamma = \frac{e^2\, n\, \tau}{m^*} = e\, n\, \mu_{\mathrm{n}} \quad , \tag{1}$$

kde e je elementární náboj, n je koncentrace elektronů, m^* je efektivní hmotnost elektronů a μ_{n} je jejich pohyblivost.

Obrovské rozdíly v hodnotách konduktivity kovů (vodiče) a polovodičů a rovněž její rozdílnou teplotní závislost vysvětluje kvantová teorie pevných látek existencí pásové struktury. Elektrony obsazují pásy dovolených energií, které jsou od sebe odděleny pásy zakázaných energií (tzv. zakázané pásy).

1.1 Vodiče (kovy)

V kovech je vodivostní pás zaplněn právě do poloviny (alkalické kovy, jednomocné kovy Cu, Ag, Au, ...) nebo se dovolené pásy překrývají (dvojmocné kovy). Teplotní závislost odporu (vodivosti) je dána teplotní závislostí relaxační doby resp. pohyblivosti. Se zvyšující se teplotou roste amplituda kmitů iontů a zvyšuje se tak pravděpodobnost srážek elektronů s ionty. Střední doba mezi dvěma srážkami (relaxační doba) klesá, a tedy klesá konduktivita kovu (roste rezistivita ρ). Závislost odporu kovů na teplotě lze v širokém teplotním oboru (s výjimkou nízkých teplot) dosti přesně popsat polynomem druhého stupně. Často dokonce postačí (pro nepříliš široký intervaly teplot) uvažovat pouze lineární závislost a odpor měřeného vzorku vyjádřit pomocí vztahu:

$$R = R_0\,[1 + \alpha\,(t - t_0)] \quad , \tag{2}$$

kde R_0 je odpor při teplotě $t_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ a α je teplotní součinitel odporu.

2 Pracovní úkol

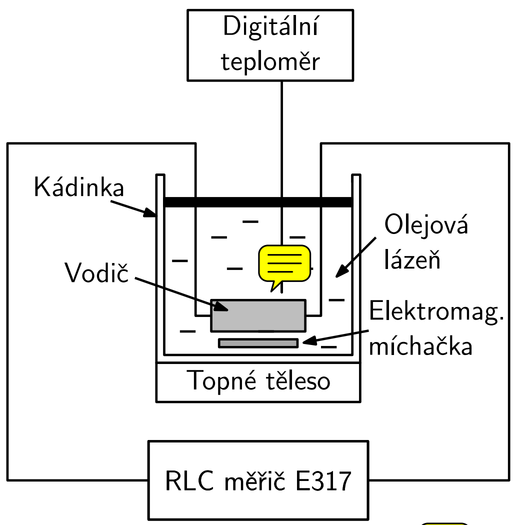
1. Proměřte závislost odporu vodiče na teplotě tak, že změříte 10 hodnot odporu s teplotním krokem $3\,^\circ\mathrm{C}$.

2. Spočtěte průměrnou hodnotu teplotního součinitele odporu a jeho směrodatnou chybu. Výsledek zapište ve tvaru $\overline{\alpha} \pm \delta\alpha$ a správně zaokrouhlete.

3. Naměřenou závislost $R(t)$ znázorněte graficky a spočtěte rovnici této přímkové závislosti lineární regresí. Z koeficientů rovnice ($R = \mathrm{k}\,t + \mathrm{q}$) určete srovnáním s rovnicí (2) součinitel α a odpor $\mathrm{R_0}$. Obě hodnoty teplotního součinitele odporu porovnejte s tabulkovou hodnotou.

3 Postup měření

Z lednice vyndáme kádinku s vodičem v olejové lázni a dáme ji na elektromagnetickou míchačku (viz Obr. 1). Olejovou lázeň a RLC měřič následně propojíme pomocí svorek a na měřiči nastavíme optimální rozsah. Do olejové lázně zasuneme digitální teploměr. Olejovou lázeň zahříváme a s teplotním krokem 3 °C postupně zaznamenáváme deset hodnot odporů.



Obr. 1: Schematické znázornění uspořádání experimentu.

4 Naměřené a vypočítané hodnoty

Nejdříve postupnou metodou vypočítáme hodnoty teplotního součinitele odporu α_{i}

$$\alpha_{\mathrm{i}} = \frac{R_{\mathrm{i+5}} - R_{\mathrm{i}}}{R_{\mathrm{i}}\,t_{\mathrm{i+5}} - R_{\mathrm{i+5}}\,t_{\mathrm{i}}} \qquad \text{př.: } \alpha_{\mathrm{i}} = \frac{8,59 - 8,10}{8,10 \cdot 16 - 8.59 \cdot 1} = 4{,}050\times10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}} \qquad .$$

a následně i průměrnou hodnotu $\overline{\alpha}$:

$$\overline{\alpha} = \frac{\sum \alpha_{\mathrm{i}}}{n} = \frac{0,0212}{5} = 4{,}24\times10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}} \qquad .$$

Tab. 1: Naměřené hodnoty odporů R, vypočítané hodnoty teplotního součinitele odporu α_{i}, směrodatné chyby $\Delta\alpha_{\mathrm{i}}$ a druhé mocniny směrodatné chyby $\Delta^2\alpha_{\mathrm{i}}$ pro různé hodnoty teploty vodiče t_{i}.

t_{i} [°C]	R_{i} [Ω]	$t_{\mathrm{i}+5}$ [°C]	$R_{\mathrm{i}+5}$ [Ω]	α_{i} [K^{-1}]	$\Delta\alpha_{\mathrm{i}}$	$\Delta^2\alpha_{\mathrm{i}}$
1	8,10	16	8,59	$4{,}050\times10^{-3}$	$1{,}900\times10^{-4}$	$3{,}667\times10^{-8}$
4	8,18	19	8,70	$4{,}310\times10^{-3}$	$7{,}000\times10^{-5}$	$4{,}909\times10^{-9}$
7	8,29	22	8,80	$4{,}220\times10^{-3}$	$2{,}000\times10^{-5}$	$3{,}402\times10^{-10}$
10	8,39	25	8,91	$4{,}310\times10^{-3}$	$7{,}000\times10^{-5}$	$4{,}760\times10^{-9}$
13	8,49	28	9,01	$4{,}310\times10^{-3}$	$7{,}000\times10^{-5}$	$5{,}060\times10^{-9}$

Vypočítáním odchylky $\Delta\alpha$ od průměrné hodnoty teplotního součinitele odporu $\overline{\alpha}$

$$\Delta\alpha_{\mathrm{i}} = |\alpha_{\mathrm{i}} - \overline{\alpha}| \quad ,\text{př.: } \Delta\alpha_1 = |0,00405 - 0,00424| = 1,9 \times 10^{-4}$$

a následně její druhé mocniny

$$\Delta^2\alpha_{\mathrm{i}} = \left(\alpha_{\mathrm{i}} - \overline{\alpha}\right)^2 \quad ,\text{př.: } (\alpha_1 - \overline{\alpha})^2 = 0,00019^2 = 3,667 \times 10^{-8}$$

lze určit chybu měření jako

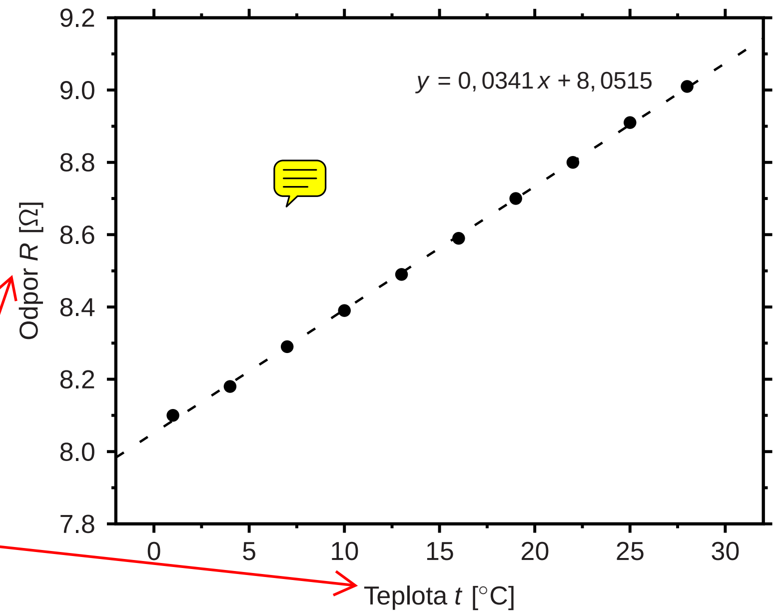
$$\delta\alpha = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2\alpha}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{5,183 \times 10^{-8}}{5\,(5-1)}} = 0.051 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$$

a výslednou hodnotu teplotního součinitele odporu $\alpha = (4,240 \pm 0,051) \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$.

Pro ověření našeho výpočtu vykreslíme naměřené hodnoty odporu při různých teplotách do grafu (Obrázek 2), provedeme lineární aproximaci dat

$$\mathrm{a}_0 = \frac{\sum\limits_1^n x_{\mathrm{i}}^2 \sum\limits_1^n y_{\mathrm{i}} - \sum\limits_1^n x_{\mathrm{i}} y_{\mathrm{i}} \sum\limits_1^n x_{\mathrm{i}}}{n \sum\limits_1^n x_{\mathrm{i}}^2 - \left(\sum\limits_1^n x_{\mathrm{i}}\right)^2} = \frac{2845 \cdot 85,46 - 1264,49 \cdot 145}{28450 - 21025} = 8,052 \quad ,$$

$$\mathrm{a}_1 = \frac{n \sum\limits_1^n x_{\mathrm{i}} y_{\mathrm{i}} - \sum\limits_1^n x_{\mathrm{i}} \sum\limits_1^n y_{\mathrm{i}}}{n \sum\limits_1^n x_{\mathrm{i}}^2 - \left(\sum\limits_1^n x_{\mathrm{i}}\right)^2} = \frac{12644,9 - 145 \cdot 85,46}{28450 - 21025} = 0,034$$



Obr. 2: Naměřená závislost odporu vodiče na teplotě (plné body) a lineární aproximace naměřených hodnot (přerušovaná čára).

a získanou rovnici aproximační přímky $y = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 \cdot x = 8,052 + 0,034\,x$ porovnáme s teoretickým vztahem (2) pro teplotní součinitel odporu: Pro $t_0 = 0$ dostáváme, že $R = \mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_0\,\alpha\,t \Rightarrow \mathrm{R}_0 = 8,052\,\Omega$ a $\alpha = \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0} = 4,2 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$.

5 Závěr

Z naměřených dat odporu vodiče při různých teplotách jsme vypočítali průměrný teplotní součinitel odporu. Jeho hodnota je $\alpha = (4,240 \pm 0,051)\times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$. Naměřená data jsme následně znázornili graficky a provedli jejich lineární aproximaci. Porovnáním rovnice přímky lineární aproximace a teoretické teplotní závislosti jsme určili teplotní součinitel odporu $\alpha = 4,2\times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$ a odpor $\mathrm{R}_0 = 7,668\,\Omega$. Porovnáním experimentální a tabulkové hodnoty ($\alpha = 4,33\times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$ pro měď) můžeme říci, že provedený experiment byl vhodně navržen a proveden.