

Výpočet transformačních koeficientů vybraných 2D transformací

Jan Ježek

září 2009

Obsah

1	Odvození transformačního klíče lineárních 2D transformací	2
1.1	Metody vyrovnání	2
1.2	Obecné vyjádření lineárních 2D transformací	4
1.3	Podobnostní transformace	4
1.4	Afinní transformace	5
1.5	Afinní transformace s podmínkami	6
1.6	Projektivní transformace	8
1.7	Speciální případy afinní transformace	8
2	Transformace pomocí gridu	10
2.1	Metoda NADCON	11
2.2	Metoda NTv2	12
3	Vybrané způsoby určení transformačního gridu z identických bodů	13
3.1	Interpolace Thin Plate Spline	13
3.2	Metoda na principu triangulace a afinní transformace	14
3.3	Metoda Inverse Distance Weighted	15
	Literatura	22

1 Odvození transformačního klíče lineárních 2D transformací

Cílem této části je podrobně popsat nejvýznamnější postupy výpočtu transformačních koeficientů pomocí známých identických bodů. Zaměříme se především na metody, které byly implementovány v rámci této práce. Popsán bude jak obecný postup vyrovnání, tak konkrétní tvary matic pro jednotlivé transformační metody. Cílem této kapitoly je popsat především jednoduché lineární 2D metody. Tyto způsoby většinou nejsou používány přímo k transformaci mezi dvěma známými souřadnicovými referenčními systémy, ale jsou často používány např. pro referencování rastrových dat, která mají pouze snímkový souřadnicový systém (naskenované staré mapy, fotografické snímky).

1.1 Metody vyrovnání

Pro jednoznačné určení transformačního klíče z nadbytečného počtu identických bodů byla použita metoda nejmenších čtverců MNČ. Tato metoda byla aplikována na minimalizaci souřadnicových rozdílů mezi cílovými a přetransformovanými výchozími body.

V následujícím textu budou popsány vzorce, které byly použity pro jednotlivá vyrovnání metodou zprostředkujících pozorování. Dále bude také zmíněn složitější případ vyrovnání metodou zprostředkujících pozorování s podmínkami pro výpočet koeficientů afinní transformace s podmínkami (např. pro volbu nulového zkosení).

Pro další rovnice použijeme toto označení (dle [Kab07]):

$\mathbf{x}$	$=$	$(x_1 \dots x_k)^T$	sloupcový vektor hledaných veličin
$\mathbf{x}_0$	$=$	$(x_{10} \dots x_{k0})^T$	sloupcový vektor přibližných hodnot neznámých
$d\mathbf{x}$	$=$	$(dx_1 \dots dx_k)^T$	sloupcový vektor přírůstků přibližných hodnot
$F_i(\mathbf{x})$			funkční vztah mezi hledanými $\mathbf{x}$ a měřenými l_i veličinami
l_i			naměřená zprostředkující veličina
v_i			oprava naměřené zprostředkující veličiny
$\bar{f}_i$			vyrovnaná hodnota zprostředkující veličiny
i			index i -té zprostředkující rovnice

V případě transformací jsou zprostředkující (měřenou) veličinou souřadnice identických bodů a neznámými jsou transformační parametry. Více o konkrétních tvarech výrazů v dalších sekcích.

Dále platí:

$$F_i(\mathbf{x}) = \bar{f}_i$$

$$F_i(x_1, \dots, x_k) = l_i + v_i$$

$$F_i(x_{10} + dx_1, \dots, x_{k0} + dx_k) = l_i + v_i \quad (1)$$

Levou stranu výrazu (1) rozvedeme do Taylorova rozvoje¹ a zanedbáme členy 2. řádů a vyšší:

$$F_i(\mathbf{x}_0) + \left(\frac{F_i}{dx_1} \right) dx_1 + \dots + \left(\frac{F_i}{dx_k} \right) dx_k = l_i + v_i$$

Po úpravě dostáváme:

$$a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + \dots + a_{ik}dx_k + F_i(\mathbf{x}_0) - l_i = v_i, \quad (2)$$

kde $i = 1, \dots, n$, n je počet linearizovaných zprostředkujících rovnic oprav a k je počet hledaných neznámých. Výraz $F_i(\mathbf{x}_0) - l_i = L_i$ je tzv. absolutní člen.

¹ Provedeme-li vhodnou substituci (např. jako transformační koeficienty nevolíme přímo geometrické parametry), získáváme lineární vztah, a tudíž nemusíme použít Taylorova rozvoje. V případě, kdy potřebujeme ale zavést podmínky přímo pro geometrické koeficienty (např. stočení rovno nule nebo shodná změna měřítek pro obě osy apod.), Taylorův rozvoj použít musíme.

Rovnice (2) můžeme zapsat maticově takto:

$$\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L} = \mathbf{v},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_k \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}_0) - \mathbf{l}_1 \\ F_2(\mathbf{x}_0) - \mathbf{l}_2 \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}_0) - \mathbf{l}_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Po aplikaci metody nejmenších čtverců (odvození viz [Kab07]) získáváme pro vyrovnané neznámé vztah:

$$d\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{L}). \quad (5)$$

Tento způsob byl implementován pro výpočet lineárních 2D transformací (podobností, afinní, projektivní) a dále prostorové 3D transformace (tzv. Burša-Wolf), přičemž konkrétní matice jsou uvedeny v následujících kapitolách. Pro případ, kdy chceme zavést podmínky pro neznámé, je výpočet následující:

Podmínky pro opravy neznámých definujeme pomocí obecného vyjádření:

$$\begin{aligned} b_{11}v_1 + \dots + b_{1n}v_n + U_1 &= 0 \\ &\vdots \\ b_{r1}v_1 + \dots + b_{rn}v_n + U_r &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

kde U_i jsou hodnoty uzávěrů - tzn. rozdíl mezi hodnotou vypočítanou z přibližných hodnot a hodnotou požadovanou, která je stanovena podmínkou. Koeficienty označené jako b_{ii} tvoří pak matici $\mathbf{B}$. Můžeme tedy psát:

$$\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Pro společné vyrovnaní zprostředkujících měření s podmínkami dostáváme (odvození viz [Kab07]):

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{L} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

přičemž $\mathbf{k}$ je vektor korelát - při provedení výpočtu dle popsaného postupu jej však není nutné určovat (jeho význam je podrobněji popsán v [Kab07]).

1.2 Obecné vyjádření lineárních 2D transformací

V této části se budeme zabývat implementovanou skupinou lineárních 2D transformací a především způsobem výpočtu transformačního klíče z nadbytečného počtu identických bodů. Popsány budou:

- Podobnostní transformace
- Afinní transformace
- Afinní transformace s podmínkami
- Projektivní transformace
- Speciální případy afinní transformace

Obecný výraz pro všechny tyto metody lze napsat pomocí obecného maticového vyjádření projektivní (lineární) transformace $\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{x}$, kde

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} qx' \\ qy' \\ q \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} & p_{20} \\ p_{01} & p_{11} & p_{12} \\ p_{02} & p_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

přičemž x', y' jsou souřadnice v cílové soustavě, x, y ve výchozí, p_{nn} jsou transformační koeficienty a q je pomocný parametr (tzv. homogenizující složka).

V následujících odstavcích budou uvedeny vztahy pro výpočet transformačních koeficientů na základě známých identických bodů pomocí MNČ. Ačkoliv je toto odvození poměrně jednoduché, uvádíme jej zde především z důvodu dokumentace implementovaných algoritmů. Cílem je také vytvořit jednotný soupis všech vztahů pro tyto metody.

Pro konečný výpočet koeficientů lze použít algoritmus vyrovnání zprostředkujících měření (viz část 1.1). Cílem následujících sekcí je tedy především popsat tvar matic $\mathbf{A}$, $d\mathbf{x}$ a $\mathbf{L}$. Pro konečný výpočet vlastních transformačních parametrů pak stačí použít vztah (5).

1.3 Podobnostní transformace

Přímou podobnostní transformaci¹ lze vyjádřit pomocí rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= m \cos \alpha x - m \sin \alpha y + T_x \\ y' &= m \sin \alpha x + m \cos \alpha y + T_y, \end{aligned} \tag{9}$$

kde m je měřítko, α je úhel rotace a T_x, T_y jsou posuny. Po vhodné substituci můžeme psát maticové vyjádření:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož se jedná již o lineární vztah, není nutné provádět linearizaci pomocí Tylerova rozvoje dle vzorců (2) a lze vypočítat neznámé přímo bez nutnosti zjišťování přibližných hodnot.

Neznámými jsou tedy přímo transformační koeficienty a, b, c, d . Nechť tedy matice $d\mathbf{x}$ má tvar:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

¹Dále je použit pro takovou transformaci jen termín podobnostní transformace

Potom matice $\mathbf{A}$ má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Vzhledem k volbě nulových přibližných hodnot můžeme psát $F_i(x_0) = 0$ a tedy (dle 4) matice $\mathbf{L}$ má tvar: ¹

$$\mathbf{L} = - \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Použitím vztahu (5) dostáváme tak přímo vyrovnané neznámé bez nutnosti další iterace. Důvodem je lineární vztah mezi neznámými a měřenými veličinami.

1.4 Afinní transformace

Afinní transformaci lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na základě obdobné volby neznámých jako v 1.3 můžeme psát tvar matice $d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

Potom matice $\mathbf{A}$ má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Matice $\mathbf{L}$ je pak shodná s maticí podobností transformace, viz vztah (11). Použitím vztahu (5) dostáváme tak přímo vyrovnané neznámé.

¹ V implementaci tohoto způsobu bylo znaménko prvků matice L vytknuto a uplatněno až ve vztahu (5).

Pro optimalizaci výpočtu v rámci implementace lze matici $\mathbf{A}$ zjednodušit a počítat neznámé a, b, c a d, e, f odděleně. Matice $\mathbf{A}$ má pak tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ & & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix},$$

přičemž dílčí matice neznámých jsou:

$$d\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, d\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

a dále matici $\mathbf{L}$ lze rozdělit takto:

$$\mathbf{L}_1 = - \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \mathbf{L}_2 = - \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}. \quad (13)$$

1.5 Afinní transformace s podmínkami

Při požadavku položení podmínek pro afinní transformaci zpravidla platí, že tyto podmínky jsou kladeny na geometrické parametry. Afinní transformaci lze definovat pomocí těchto geometrických parametrů:

S_x	měřítko ve směru osy X,
S_y	měřítko ve směru osy Y,
α_x	úhel rotace pro osu x ,
α_y	úhel rotace pro osu y ,
T_x	posun ve směru osy X,
T_y	posun ve směru osy Y.

Namísto dvou úhlů rotace lze také použít pouze jeden (např. α_x) a dále přidat parametr zkosení q - potom $q = \alpha_x - \alpha_y$.

Jednou z často používaných forem afinní transformace je varianta, kdy parametr zkosení je roven nule (definice tohoto parametru viz dále). Tento způsob se často využívá právě při referencování satelitních snímků apod. Obecně lze tuto úlohu řešit buď přímým vyloučením tohoto parametru, nebo použitím vyrovnání zprostředkujících měření s podmínkami. V následujících odstavcích bude odvozeno vyrovnání včetně podmínek tak, jak bylo i implementováno. Výhodou je obecný přístup k řešení daného problému. Výsledek pak umožňuje definovat i jakékoliv jiné podmínky.

Pro určení transformačních koeficientů je použit obecný algoritmus vyrovnání zprostředkujících měření s podmínkami dle [Kab07].

Jelikož je nutné pracovat přímo s geometrickou formou transformačních parametrů, je výchozí vztah afinní transformace tento:

$$\begin{aligned} x' &= S_x \cos \alpha_x x - S_y \sin \alpha_y y + T_x \\ y' &= S_x \sin \alpha_x x + S_y \cos \alpha_y y + T_y, \end{aligned} \quad (14)$$

kde x', y' jsou cílové souřadnice, x, y jsou výchozí souřadnice.

Pro další postup vyrovnání byla matice $d\mathbf{x}$ neznámých zvolena takto:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ d\alpha_x \\ d\alpha_y \\ dT_x \\ dT_y \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Na základě této volby byla odvozena matice **A**. Jednotlivé derivace potom jsou ($i = 1, \dots, n$, kde n je počet identických bodů):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{S_x}\right)_i &= x_i \cos \alpha_x \\ \left(\frac{dx}{S_y}\right)_i &= -y_i \sin \alpha_y \\ \left(\frac{dx}{\alpha_x}\right)_i &= -S_x x_i \sin \alpha_x \\ \left(\frac{dx}{\alpha_y}\right)_i &= -S_y y_i \cos \alpha_y \\ \left(\frac{dx}{T_x}\right)_i &= 1 \\ \left(\frac{dx}{T_y}\right)_i &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{S_x}\right)_i &= x_i \sin \alpha_x \\ \left(\frac{dy}{S_y}\right)_i &= y_i \cos \alpha_y \\ \left(\frac{dy}{\alpha_x}\right)_i &= S_x x_i \cos \alpha_x \\ \left(\frac{dy}{\alpha_y}\right)_i &= -S_y y_i \sin \alpha_y \\ \left(\frac{dy}{T_x}\right)_i &= 0 \\ \left(\frac{dy}{T_y}\right)_i &= 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Matice **A** má tedy tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left(\frac{dx}{S_x}\right)_1 & \left(\frac{dx}{S_y}\right)_1 & \left(\frac{dx}{\alpha_x}\right)_1 & \left(\frac{dx}{\alpha_y}\right)_1 & \left(\frac{dx}{T_x}\right)_1 & \left(\frac{dx}{T_y}\right)_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{dx}{S_x}\right)_n & \left(\frac{dx}{S_y}\right)_n & \left(\frac{dx}{\alpha_x}\right)_n & \left(\frac{dx}{\alpha_y}\right)_n & \left(\frac{dx}{T_x}\right)_n & \left(\frac{dx}{T_y}\right)_n \\ \left(\frac{dy}{S_x}\right)_1 & \left(\frac{dy}{S_y}\right)_1 & \left(\frac{dy}{\alpha_x}\right)_1 & \left(\frac{dy}{\alpha_y}\right)_1 & \left(\frac{dy}{T_x}\right)_1 & \left(\frac{dy}{T_y}\right)_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{dy}{S_x}\right)_n & \left(\frac{dy}{S_y}\right)_n & \left(\frac{dy}{\alpha_x}\right)_n & \left(\frac{dy}{\alpha_y}\right)_n & \left(\frac{dy}{T_x}\right)_n & \left(\frac{dy}{T_y}\right)_n \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Zbývá ještě naplnit matici **L**. Dle vztahů (4) a (14) můžeme psát:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} fx(\mathbf{x}_0) - x'_1 \\ \vdots \\ fx(\mathbf{x}_0) - x'_n \\ fy(\mathbf{x}_0) - y'_1 \\ \vdots \\ fy(\mathbf{x}_0) - y'_n \end{pmatrix}, \quad (19)$$

kde $\mathbf{x}_0$ je vektor přibližných hodnot neznámých.

Pro zařazení podmínek do vyrovnání je ještě nutné určit tvar matice **B** a **U**. Chceme-li např. definovat podmínku, že parametr zkosení q má být roven nule (tzn. musí platit $\alpha_x - \alpha_y = 0$), bude rovnice (7) mít tento tvar:

$$(v_{\alpha y} - v_{\alpha x}) - q_0 = 0,$$

kde q_0 je přibližná hodnota parametru q .

Matice $\mathbf{B}$ bude mít pak tvar (vzhledem ke vztahu (15)):

$$\mathbf{B} = (0, 0, -1, 1, 0, 0).$$

Chceme-li, aby parametr zkosení q měl po vyrovnaní hodnotu $q = 0$, bude matice $\mathbf{U}_{1 \times 1}$ mít tvar:

$$\mathbf{U} = (\alpha x_0 - \alpha y_0) .$$

Výsledné opravy pak dostaneme pomocí vzorce (8). Máme-li k dispozici odpovídající přibližné hodnoty, můžeme opravy počítat iterativně. Přibližné hodnoty lze získat např. výpočtem afinní transformace bez podmínek, jak je popsáno v části 1.4.

1.6 Projektivní transformace

Projektivní transformaci v rovině lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$\begin{pmatrix} mx' \\ my' \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $m \neq 0$ je libovolné číslo (tzv. homogenizující složka). Vzhledem k lineární formě vztahů můžeme opět zvolit:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

Potom matice $\mathbf{A}$ má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1 x_1 & -x'_1 y_1 \\ & & & \vdots & & & & \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_n x_n & -x'_n y_n \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x'_1 x_1 & -x'_1 y_1 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -x'_n x_n & -x'_n y_n \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Matice $\mathbf{L}$ je pak shodná s maticí podobností transformace - viz vztah (11). Použitím vztahu (5) dostáváme tak opět přímo vyrovnané neznámé.

1.7 Speciální případy afinní transformace

V této části bude popsáno odvození speciálního případu afinní transformace, při kterém dochází pouze ke změně měřítek v obou směrech a k posunu - není tedy uplatněno zkosení a rotace. Z geometrického hlediska jde o šikmou dilataci.

Použijeme-li ve vztahu (14) nulové koeficienty pro stočení, získáme transformační rovnici ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť tedy matice neznámých $\mathbf{dx}$ má tvar:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

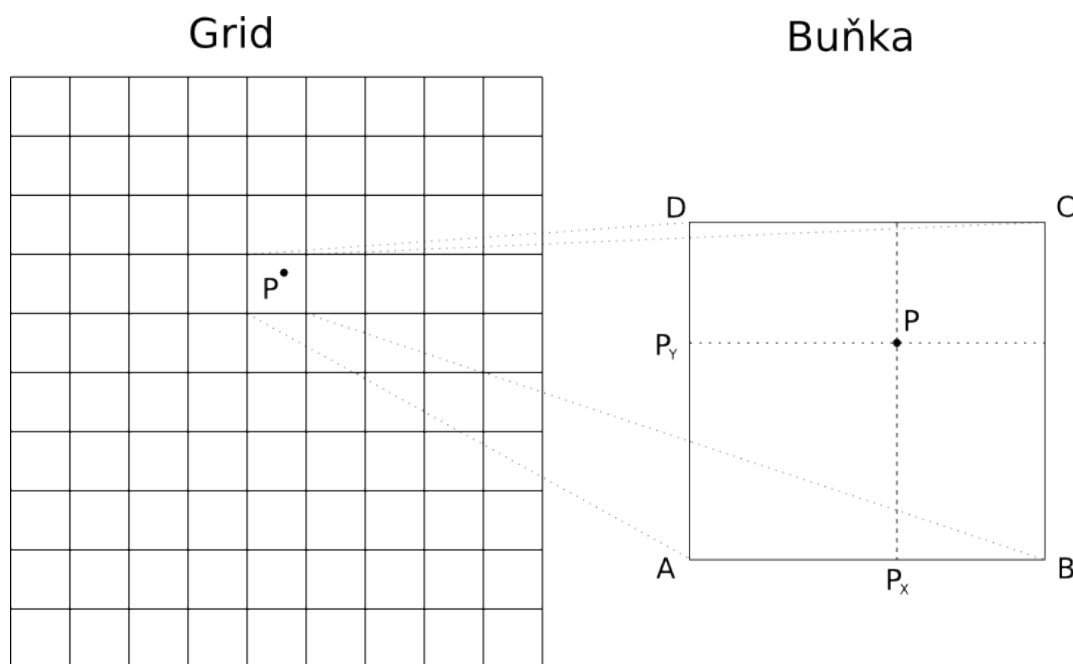
Potom matice $\mathbf{A}$ má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & y_n & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Výsledný postup výpočtu neznámých je shodný s obecným výpočtem afinní transformace. Použitím vztahu (5) dostáváme opět přímo vyrovnané neznámé. Pro optimalizaci výpočetní složitosti je možné matici $\mathbf{A}$ opět rozdělit a počítat koeficienty odděleně.

2 Transformace pomocí gridu

Transformace pomocí gridu (grid based methods) jsou transformační metody, které lze využít především v případě, kdy nelze definovat matematicky přesný vztah mezi výchozím a cílovým systémem. Metoda je založena na principu známých (resp. odhadnutelných) hodnot posunů v dostatečně husté a pravidelné síti (gridu). Určení posunu konkrétního bodu lze pak vypočítat pomocí interpolace na základě známých vektorů posunů ve vrcholech buňky gridu, ve které se bod nachází (viz obr. 1). Metody na tomto principu jsou poměrně rozšířené a jsou implementovány ve většině GIS produktů, ovšem samotné konfigurační soubory (obsahující grid posunů) jsou k dispozici pouze pro některé referenční souřadnicové systémy.



Obrázek 1: Transformace pomocí gridu

Výpočet posunu konkrétního bodu má tedy tyto kroky:

- Určíme buňku gridu, ve kterém se nachází bod určený k transformaci (bod P).
- Na základě známých vektorů posunu ve vrcholech buňky (body A, B, C, D) a známých souřadnic bodu P lze pomocí lineární interpolace ve směru X a ve směru Y získat posuny bodu P v obou směrech. Tato metoda se označuje jako bilineární interpolace.

V případě volby pravoúhlého gridu je nalezení buňky, ve které se bod nachází, velice jednoduché. Samotná interpolace uvnitř buňky také není náročná. Hodnoty posunů v samotném gridu jsou určeny na základě posunů mezi identickými body. K tomuto určení lze využít některý z algoritmů interpolace, přičemž vybrané algoritmy a jejich vlastnosti jsou předmětem dalších částí.

V případě plynulého rozložení odchylek a dostatečně podrobného gridu lze tuto metodu považovat za nereziiduální. Tato metoda naopak selhává v případě, kdy rozložení odchylek má mnoho lokálních extrémů - vzhledem k lineární interpolaci, která je použita pro získání posunu uvnitř jednotlivých buněk. Z tohoto důvodu je nutné před nasazením této metody dostatečně analyzovat množinu identických bodů a rozložení jejich odchylek. Konkrétní možnosti testování jsou popsány v kap ??.

Mezi metody pracující na tomto principu patří v GIS zejména metody NADCON a NTv2. Těmito způsoby se podrobněji zabývají následující části.

Za zmínku též stojí fakt, že velice obdobný algoritmus byl použit v padesátých letech minulého století pro transformaci Českého vojenského systému S-42 a S-JTSK. Samotný výpočet byl však realizován manuálně pomocí tabulek (podrobné vysvětlení viz [CM99]). Jedním z důvodů nasazení této metody byla také výpočetní náročnost odvození globálního klíče sedmiprvkové transformace (metody Burša-Wolf).

2.1 Metoda NADCON

NADCON (zkratka názvu North American Datum Conversion [nad]) je metoda transformace zeměpisných souřadnic $(\phi, \lambda)_1$ z výchozího systému na souřadnice $(\phi, \lambda)_2$ v cílovém systému. Tato metoda je používána např. v USA především pro převod mezi systémy NAD 27, Old Hawaiian, Puerto Rico, Alaska a systémem NAD 83. Metoda NADCON je také použita při transformaci mezi původním systémem NAD 83 (značený NAD 83 (1986)) a celostátní HPGN (High Precision Geodetic Network) [nad].

Pro určení posunů je použito dvou souborů s koncovkou *laa* a *loa*, přičemž první z nich specifikuje posuny zeměpisné šířky a druhý posuny zeměpisné délky. V hlavičce souboru jsou také obecné parametry gridu (postupně to je počet sloupců, počet řádek, počet hodnot pro osu Z , minimální zeměpisná délka, šířka sloupce, minimální zeměpisná šířka, šířka řádky gridu a nepoužitý volitelný parametr) [Arcb]. Ukázka souboru je znázorněna v ukázkce 1.

Listing 1: Ukázka části definičního souboru metody NADCON

	NADCON	EXTRACTED	REGION				NADGRD	
1	167	198	1	12.89116	.01000	48.84586	.01000	.00000
2								
3	-2.843056	-2.848042	-2.853026	-2.858007	-2.862987	-2.867963		
4	-2.872938	-2.877910	-2.882880	-2.887848	-2.892814	-2.897777		
5	-2.902739	-2.907699	-2.912656	-2.917612	-2.922565	-2.927518		
6	-2.932468	-2.937416	-2.942364	-2.947309	-2.952254	-2.957196		
7	-2.962138	-2.967080	-2.972020	-2.976961	-2.981899	-2.986839		
8	-2.991778	-2.996718	-3.001658	-3.006598	-3.011541	-3.016483		
9	-3.021429	-3.026375	-3.031322	-3.036274	-3.041228	-3.046185		
10	-3.051145	-3.056108	-3.061075	-3.066046	-3.071020	-3.075999		
11	-3.080983	-3.085971	-3.090962	-3.095960	-3.100963	-3.105970		

Pro další použití lze také grid soubory převést do binárního tvaru pomocí utility NADGRD. Více viz [nad].

Pro výpočet posunu bodu v konkrétní buňce je použita lineární interpolace v obou směrech souřadnicových os (tzv. bilineární interpolace). Metoda NADCON je implementována v produktech ArcGIS a GeoTools. Pro program Proj.4 je nutný přepočtení gridu do mírně odlišného formátu - samotný algoritmus výpočtu posunu konkrétního bodu však zůstává stejný.

2.2 Metoda NTv2

Tato metoda je velmi podobná metodě NADCON, ale rozdíl je v možnosti gridu, jehož hustota se průběžně mění. Velice podrobný popis k této metodě lze nalézt např. ve zdroji [eth]. Tato metoda je využívána u několika evropských systémů (např. Švýcarsko pro převod mezi systémy LV03 a LV95) viz [eth].

Formát soubor definující vlastní grid je znázorněn v ukázce 2.

Listing 2: Ukázka části definičního souboru metody NTv2

```

1 SUB_NAME MELB
2 PARENT NONE
3 CREATED 7/1998
4 UPDATED 7/1998
5 S_LAT -138780.000000
6 N_LAT -134406.000000
7 E_LONG -526104.000000
8 W_LONG -519354.000000
9 LAT_INC 54.000000
10 LONG_INC 54.000000
11 GS_COUNT 10332
12 5.414650 -4.727520 0.002171 0.000617
13 5.413610 -4.728820 0.001615 0.000235
14 5.413050 -4.729720 0.001563 0.000233
15 5.413010 -4.730170 0.002045 0.000383

```

Soubor obsahuje obdobné informace jako konfigurační soubor metody NADCON. Jeho úplný popis lze nalézt v [MC08].

Důležitým faktem je, že oba způsoby používají k vlastnímu výpočtu posunu v konkrétním bodě metodu tzv. bilineární interpolace. Z tohoto faktu plyne, že v případě shodných parametrů získáme shodné výsledky.

3 Vybrané způsoby určení transformačního gridu z identických bodů

V předchozí sekci byl popsán způsob výpočtu posunu bodu určeného k transformaci na základě známé pravidelné mřížky posunů (gridu). Následující text popisuje způsob, jak lze tuto mřížku odvodit na základě známých identických bodů. Budou zde popsány především algoritmy, které jsou součástí vyvinutých programových nástrojů.

3.1 Interpolace Thin Plate Spline

Interpolace TPS vychází z analogie chování tenkého kovového plátu při ohýbání. Fyzikálně si lze představit deformaci tohoto plechu ve směru z kolmo na tento plát.

V případě 2D transformací jsou body ohybu identické body a jejich z souřadnicí je jejich rozdíl v jednom či druhém směru souřadnicových os.

Matematicky lze tuto interpolaci popsat následujícím způsobem (dle [Jez08], [Boo89] a [Elo]):

Je dáno n bodů (různých a nekolineárních) v rovině: $P_i = (x_i, y_i)$ a jejich obrazy $P'_i = (x'_i, y'_i)$, $i = 1, \dots, n$. Hledáme funkci $f(x, y)$, která minimalizuje ohybovou energii na dané oblasti Ω , tj.

$$E = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy.$$

Řešení bude ve tvaru:

$$f(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + \sum_{i=1}^n w_i U(|P_i - (x, y)|), \quad (22)$$

kde funkce $U(|P_i - (x, y)|)$ je fundamentální řešení dané biharmonické rovnice. Označíme-li $r_{ij} = |P_i - (x, y)|$, pak pro $r_{ij} \neq 0$:

$$U = r_{ij}^2 \ln(r_{ij})$$

a pro $r_{ij} = 0$ je $U = 0$.

Z vlastností biharmonické rovnice vyplývají další tři podmínky:

$$\sum_{i=1}^n {}^i w = o, \quad \sum_{i=1}^n x \cdot {}^i w = o, \quad \sum_{i=1}^n y \cdot {}^i w = o.$$

Dále sestavíme matici $\mathbf{K}$ - prvky této matice jsou: $\mathbf{K}_{ij} = U(r_{ij})$, přičemž jde nepochybně o symetrickou matici s nulami na diagonále. Dále vytvoříme matici $\mathbf{P}$ a $\mathbf{O}$:

$$\mathbf{P}_{n \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix}, \mathbf{O}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a dále:

$$\mathbf{v}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \mathbf{o}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

kde n označuje počet známých bodů, x_i, y_i jsou souřadnice těchto bodů a z_i je známá hodnota interpolované veličiny v daném bodě i - v případě transformace je z_i souřadnicový rozdíl v konkrétní dimenzi mezi výchozím a cílovým identickým bodem (např. pro rozdíl ve směru osy x je $z_i = x'_i - x_i$).

Hledané vektory koeficientů určíme následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ o \end{pmatrix}.$$

Zvolíme-li:

$$\mathbf{L} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{P} \\ \hline \mathbf{P}^T & \mathbf{O} \end{array} \right),$$

můžeme psát výsledek jako:

$$\begin{pmatrix} w \\ a \end{pmatrix} = \mathbf{L}^{-1} \begin{pmatrix} v \\ o \end{pmatrix},$$

pomocí vypočtených koeficientů a_1, a_2, a_3 a $w_1, w_2 \dots w_n$ můžeme určit interpolovanou hodnotu v bodě o souřadnicích x, y vzorcem (22).

Obrázek 2 znázorňuje výsledek transformace geografické sítě pomocí náhodně volených bodů metodou TPS.

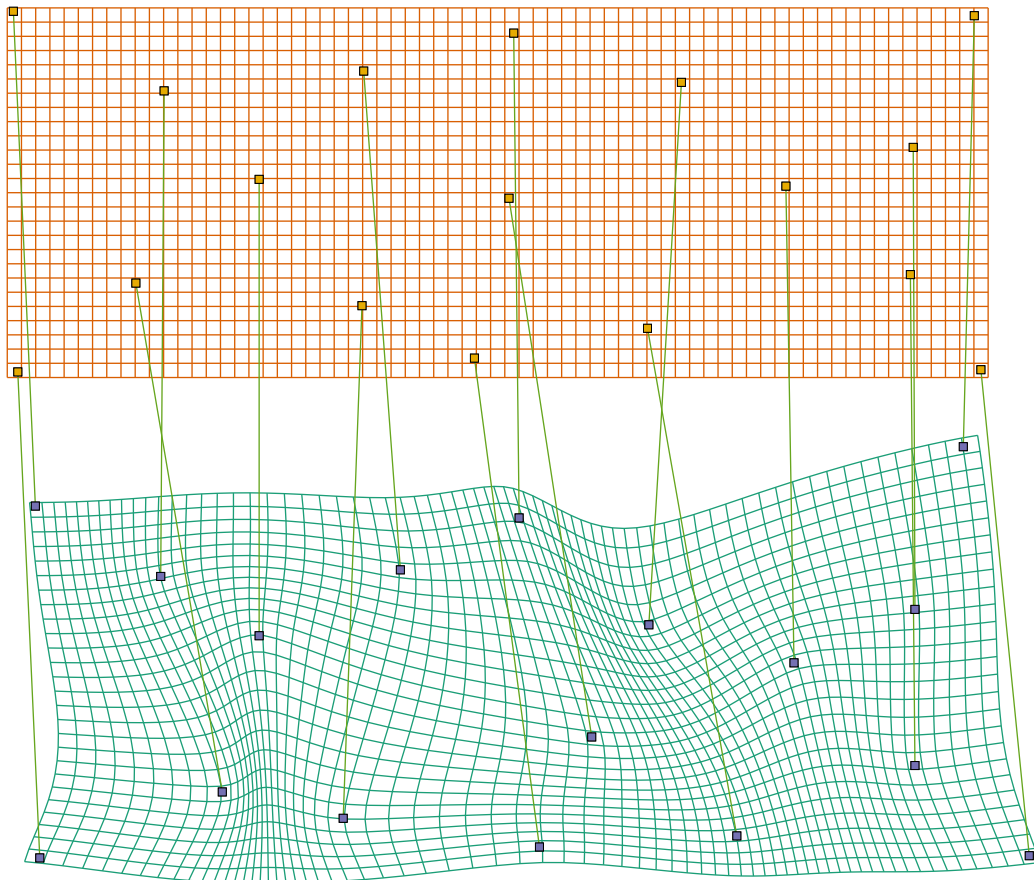
3.2 Metoda na principu triangulace a afinní transformace

Metoda triangulace ve spojení s afinní transformací (někdy označovaná RubberSheeting) patří mezi způsoby transformace 'po částech', ale lze ji využít i jako metodu pro výpočet gridu.

Metoda na bázi triangulace a afinní transformace má následující kroky:

- Území je rozděleno na dílčí trojúhelníky tak, že výchozí souřadnice identických bodů určují vrcholy těchto trojúhelníků. K tomuto rozdělení lze využít některý algoritmus pro vytvoření Delauneho triangulace. Delauneho triangulace je pro řešení podobných úloh velmi výhodná z hlediska vytvoření sítě trojúhelníků, neboť splňuje tzv. úhlové max-min kritérium. Stručně lze říci, že Delauneho triangulace maximalizuje minimální úhel, který se ve vytvořených trojúhelnících vyskytne – viz [dBvKOS97].
- Každému z těchto trojúhelníků odpovídá trojúhelník tvořený cílovými body.
- Na základě výchozího a cílového trojúhelníka je spočten klíč afinní transformace a tímto klíčem jsou transformovány všechny body uvnitř daného trojúhelníka.

Tuto metodu lze chápat i jako metodu interpolační a lze tak pomocí ní také generovat grid pro transformaci. Přejít na transformaci pomocí gridu je výhodný především pro transformaci rastrů (pro trojúhelníkovou síť je výpočetně náročnější identifikovat, v kterém trojúhelníku transformovaný bod leží). Ukázka výsledku transformace je znázorněna na obázku 3.



Obrázek 2: Interpolace Thin Plate Spline

3.3 Metoda Inverse Distance Weighted

Metoda IDW je způsobem interpolace, kdy hodnota v neznámém bodě je určena na základě váženého aritmetického průměru ².

Matematicky lze tuto interpolaci popsat následujícím způsobem:

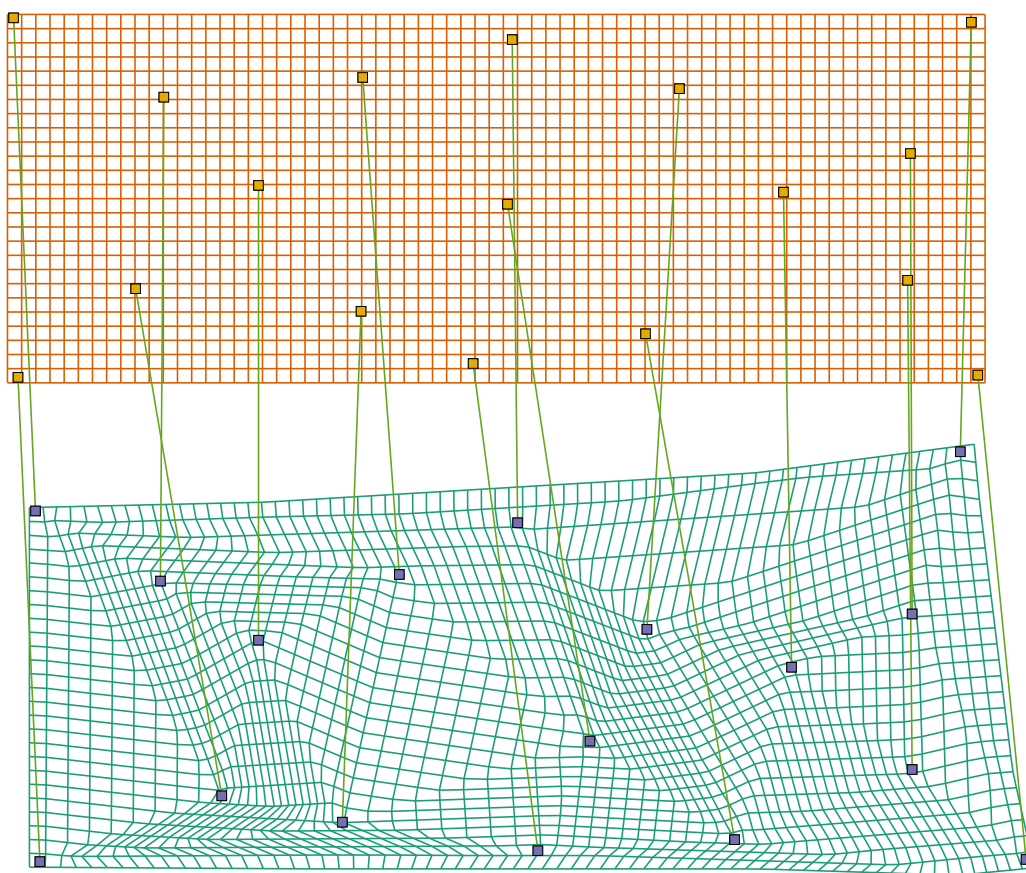
$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i f_i,$$

kde n je počet bodů se známou hodnotou a f_i je hodnota hledané funkce v těchto bodech, w_i je funkce vyjadřující váhu. Tato váha udává vliv hodnoty ve známém bodě na hledanou hodnotu v bodě $[x, y]$. Pro interpolaci IDW je w_i :

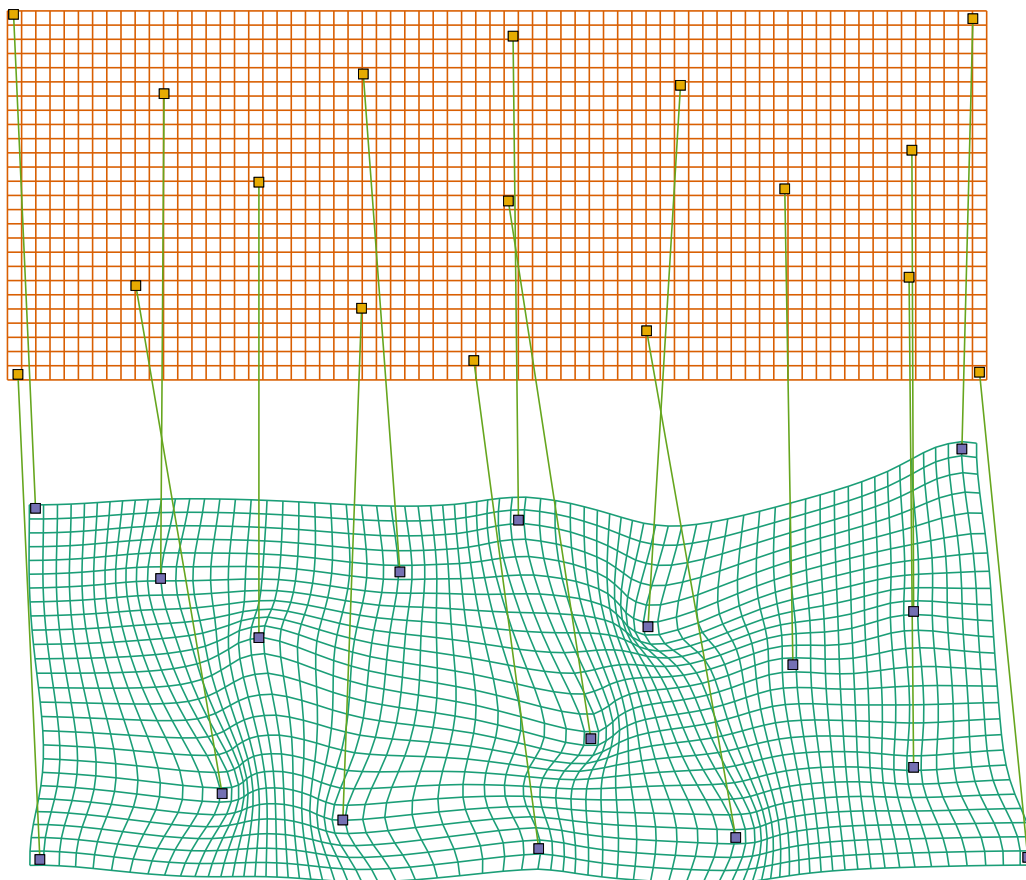
$$w_i = \frac{h_i^{-p}}{\sum_{j=1}^n h_j^{-p}},$$

přičemž p je volitelný kladný parametr (obvykle $p = 2$) a h_i je vzdálenost mezi bodem se známou hodnotou a hledaným bodem - tedy:

² Metoda transformace založená na interpolaci IDW se také objevuje v geodézii pod názvem Jungova transformace. Viz např. uváděné vzorce Jungovy transformace v [CM99].



Obrázek 3: Metoda Rubber Sheetting

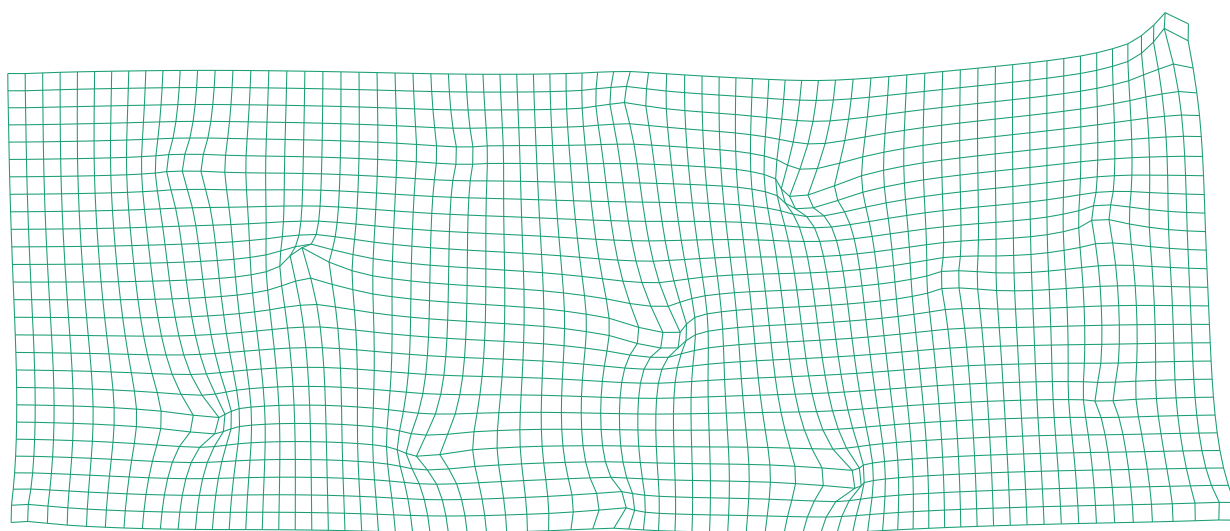


Obrázek 4: Interpolace Inverse Distance Weighted

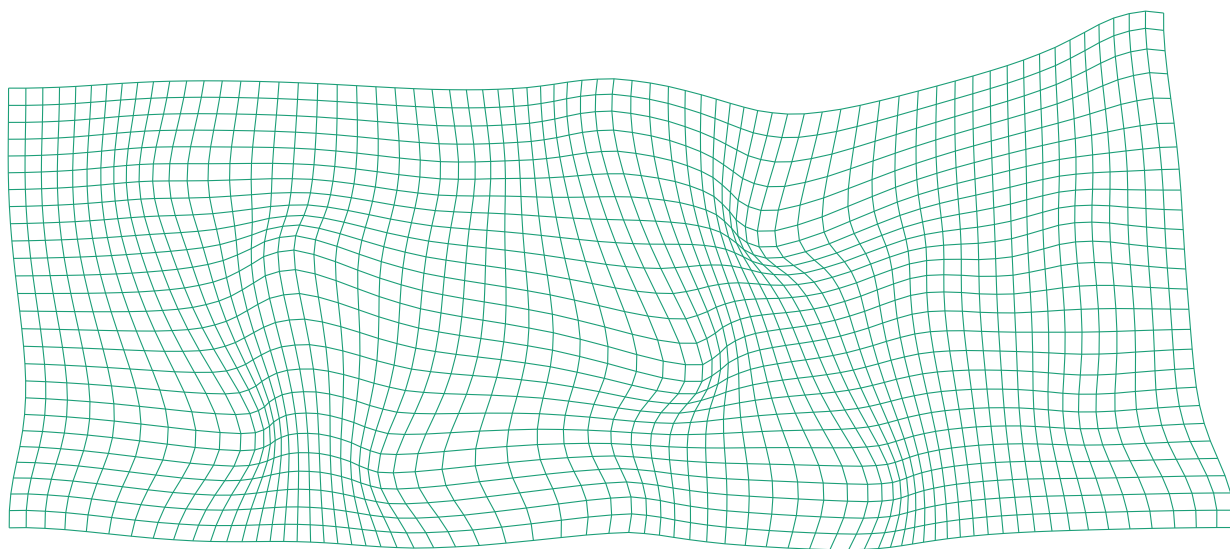
$$h_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

kde (x, y) jsou souřadnice bodu interpolace a (x_i, y_i) jsou souřadnice bodu se známou hodnotou.

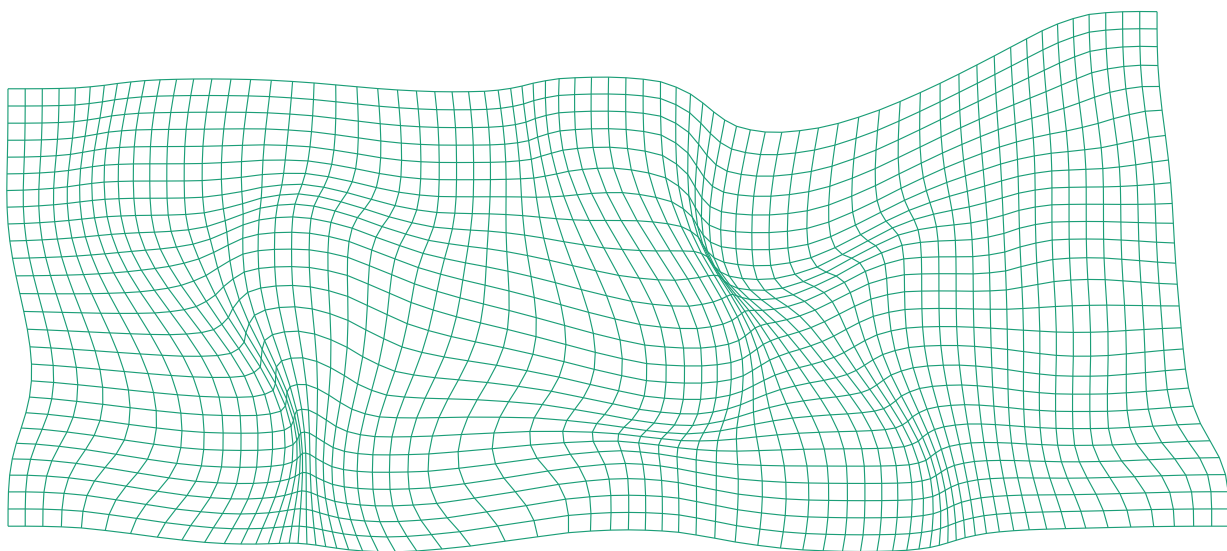
Obrázky 5 znázorňují vliv parametru p na výslednou transformaci.



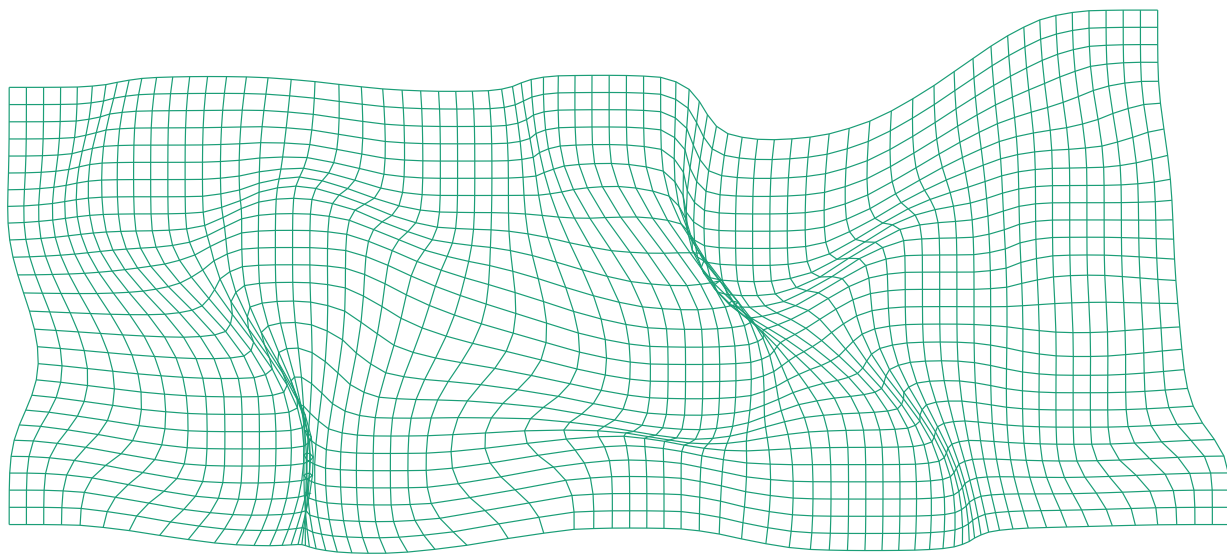
(a) $p = 1$



(b) $p = 2$



(c) $p = 3$



(d) $p = 4$

Obrázek 5: Vliv volby parametru p

Reference

- [Arca] Equation-based methods - ArcGIS 9.2 Desktop Help [online]. Dostupné z url: http://webhelp.esri.com/arcgisdesktop/9.2/index.cfm?TopicName=Equation-based_methods, [cit. 2008-15-10].
- [Arcb] Grid-based methods - ArcGIS 9.2 Desktop Help [online]. Dostupné z url: http://webhelp.esri.com/arcgisdesktop/9.2/index.cfm?TopicName=Grid-based_methods, [cit. 2008-15-10].
- [Boo89] Bookstein, F. L.: Principal warps: thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Transactions Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, ISSN 01628828.
- [BSSL] Butler, H.; Schmidt, C.; Springmeyer, D.; aj.: Domovská stránka projektu Spatial Reference. Dostupné z <http://spatialreference.org/>, [cit. 2008-11-12].
- [Buc96] Buchar, P.: *Matematická kartografie 10*. Skriptum ČVUT Praha, 1996.
- [CM99] Cimbálník, M.; Mertvart, L.: *Vyšší geodézie 10*. Skriptum ČVUT Praha, 1999.
- [cuz] Aktuální informace o schválených transformačních programech [online]. Dostupné z url: http://www.cuzk.cz/Dokument.aspx?PRARESKOD=998&MENUID=0&AKCE=DOC:10-GPS_TRANS, [cit. 2008-11-12].
- [dBvKOS97] de Berg, M.; van Kreveld, M.; Overmars, M.; aj.: *Computational geometry*. Springer, 1997.
- [Elo] Elonen, J.: Thin Plate Spline editor - an example program in C++. Dostupné z url: www.cs.ucsd.edu/~sjb/pami_tps.pdf, [cit. 2008-11-12].
- [epsa] Coordinate Conversions and Transformation including Formulas. Dostupné z www: <http://www.epsg.org/guides/docs/G7-2.pdf>, [cit. 2009-1-2], version 38.
- [epsb] EPSG Geodetic Parameter Dataset. Dostupné z www: <http://www.epsg.org/Geodetic.html>, [cit. 2008-15-10].
- [epsc] Using the EPSG Geodetic Parameter Dataset. Dostupné z www: <http://www.epsg.org/guides/docs/G7-1.pdf>, [cit. 2009-1-2], version 3.0.
- [eth] Švýcarské ministerstvo obrany - Transformation grids. Dostupné z url: http://www.swisstopo.admin.ch/internet/swisstopo/en/home/topics/survey/lv03-lv95/chenyx06/distortion_grids.html, [cit. 2008-15-10].
- [gcp] Old Maps Online [online]. Dostupné z url: <http://blog.oldmapsonline.org/2008/06/georeferencing-images-by-control-points.html>, [cit. 2008-10-10].
- [gpl] GNU General Public License [online]. Dostupné z www: <http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html>, [cit. 2008-15-10].
- [GRA] GRASSwikiCZ. Dostupné z www: <http://grass.fsv.cvut.cz/wiki/index.php/GRASSwikiCZ>, [cit. 2008-15-10].
- [imf] Transformation Functions for Image Registration [online]. Dostupné z url: www.imgfsr.com/ifsr_tf.pdf, [cit. 2008-11-12].
- [Jez08] Ježek, F.: Přednášky předmětu Geometrické a počítačové modelování - FAV ZČU Plzeň. 2008.

- [JL08] Jedlička, K.; Luňák, T.: Stability and other information about networked GNSS reference station PLZE. In *Proceedings 1, Second international conference on cartography and GIS*, University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Sofia, Bulgaria, 2008, ISBN 978-954-724-038-4, borovets, Bulgaria.
- [JS05] Ježek, J.; Sklenička, R.: Transformace souřadnic v GIS produktech. *Geodetický a kartografický obzor*, ročník 6-7, 2005, ISSN 00167096.
- [Kab07] Kabeláč, J.: *Geodetické metody vyrovnání metoda nejmenších čtverců*. Skriptum Fakulty aplikovaných věd ZČU, 2007.
- [Kos01] Kostecký, J.: K možnostem zpřesnění polohových základů v ČR. Dostupné z www.vugtk.cz/odis/sborniky/vyzk_zpravy/Vz_1021.pdf, 2001, výzkumná zpráva VÚGTK.
- [KC08] Kostecký, J.; Čepěk, A.: Příprava vyrovnání souřadnicového systému S-JTSK/05. In *Sborník z 15. ročníku mezinárodního sympozia GIS Ostrava 2008*, TANGER spol. s.r.o., 2008, ISBN 9788025413401.
- [Lan] Landa, M.: Chyba při transformaci z WGS84 do S-JTSK. Dostupné z http://grass.fsv.cvut.cz/wiki/index.php/Chyba_p%C5%99i_transformaci_z_WGS84_do_S-JTSK, dokumentace programu GRASS, [cit. 2009-1-3].
- [lita] Domovská stránka projektu GeoAPI. Dostupné z <http://geoapi.sourceforge.net/>, [cit. 2008-11-12].
- [litb] Domovská stránka projektu GeoTools. Dostupné z <http://geotools.org/>, [cit. 2008-11-12].
- [litc] Domovská stránka projektu Proj4. Dostupné z <http://trac.osgeo.org/proj/>, [cit. 2008-11-12].
- [lita] ČSN 73 0415 Geodetické body. Česká státní norma.
- [Lun07] Luňák, T.: *Testování přesnosti měření GPS metodou RTK*. Bakalářská práce, ZČU Plzeň, 2007, dostupné z [www: http://gis.zcu.cz/studium/dp/2007/Lunak_Testovani_presnosti_mereni_GPS_metodou_RTK_BP.pdf](http://gis.zcu.cz/studium/dp/2007/Lunak_Testovani_presnosti_mereni_GPS_metodou_RTK_BP.pdf).
- [MC08] Mitchell, D.; Collier, P.: *GDAit (GDA94 InTerpolation) - User's Guide [online]*. 2008.
- [met] Domovská stránka projektu MetaCRS. Dostupné z <http://wiki.osgeo.org/wiki/MetaCRS>.
- [nad] NADCON - Version 2.1 [online]. Dostupné z [www: http://www.ngs.noaa.gov/PC_PROD/NADCON/](http://www.ngs.noaa.gov/PC_PROD/NADCON/), [cit. 2008-15-10].
- [ogca] OpenGIS Coordinate Transformation Service Implementation Specification - Version 1.0. Dostupné z <http://www.opengeospatial.org/standards/ct>.
- [ogcb] OpenGIS Geography Markup Language (GML) Encoding Standard - Version 3.2.1. Dostupné z <http://www.opengeospatial.org/standards/wps>.
- [ogcc] OpenGIS Implementation Specification for Geographic information - Simple feature access - Part 1: Common architecture - Version 1.2.0. Dostupné z <http://www.opengeospatial.org/standards/sfa>.
- [ogcd] OpenGIS Web Feature Service (WFS) Implementation Specification - Version 1.1. Dostupné z <http://www.opengeospatial.org/standards/wfs>.
- [ogce] OpenGIS Web Processing Service - Version 1.0.0. Dostupné z <http://www.opengeospatial.org/standards/wps>.
- [ohl] Statistické údaje o knihovně GeoTools pomocí nástroje Ohloh [online]. Dostupné z [url: http://www.ohloh.net/p/3405](http://www.ohloh.net/p/3405), [cit. 2008-11-12].

- [PSF8] Plummer, D. C.; Smulders, C.; Fiering, L.; aj.: Gartner's Top Predictions for IT Organizations and Users, 2008 and Beyond: Going Green and Self-Healing. Technická zpráva, Gartner, 2008.
- [RR] Ritter, D. N.; Ruth, M.: GeoTIFF Format Specification. Dostupné z www: <http://www.remotesensing.org/geotiff/spec/geotiffhome.html>.
- [Vil06] Viletová, Z.: *Porovnání vybraných geodetických programů pro vyrovnaní geodetických sítí*. Bakalářská práce, ZČU Plzeň, 2006, dostupné z www: http://gis.zcu.cz/studium/dp/2006/Viletova_Porovnani_vybranych_geodetickych_programu_pro_vyrovnani_geodetickych_siti_BP.pdf.
- [VK86] Vaníček, P.; Krakiwsky, E. J.: *Geodesy: The concepts*. Elsevier Science Pub Co, 1986, 2nd edition.
- [VC07] Veverka, B.; Čechurová, M.: Kartografické metody výzkumu a jejich uplatnění v geografii. In *Sborník konference Metody geografického výzkumu*, Katedra geografie ZČU v Plzni, 2007.
- [CS04] ČSN/ISO-19111: *Geografická informace - Vyjádření prostorových referencí souřadnicemi*. Český normalizační institut, 2004.