

Section 1

Metody vyrovnání

Metoda nejmenších čtverců

- MNČ
- Minimalizace rozdílů mezi cílovými a transformovanými body
- Vyrovnání metodou zprostředkujících pozorování

Označení

$\mathbf{x}$	$=$	$(x_1 \dots x_k)^T$	sloupcový vektor hledaných veličin
$\mathbf{x}_0$	$=$	$(x_{10} \dots x_{k0})^T$	sloupcový vektor přibližných hodnot neznámých
$d\mathbf{x}$	$=$	$(dx_1 \dots dx_k)^T$	sloupcový vektor přírůstků přibližných hodnot
$F_i(\mathbf{x})$			funkční vztah mezi hledanými $\mathbf{x}$ a měřenými l_i veličinami
l_i			naměřená zprostředkující veličina
v_i			oprava naměřené zprostředkující veličina
$\bar{f}_i$			vyrovnaná hodnota zprostředkující veličiny
i			index i -té zprostředkující rovnice

$$F_i(\mathbf{x}) = \bar{f}_i$$

$$F_i(x_1, \dots, x_k) = l_i + v_i$$

$$F_i(x_{10} + dx_1, \dots, x_{k0} + dx_k) = l_i + v_i \quad (1)$$

Taylorův rozvoj

$$F_i(\mathbf{x}_0) + \left(\frac{F_i}{dx_1} \right) dx_1 + \dots + \left(\frac{F_i}{dx_k} \right) dx_k = l_i + v_i$$

Po úpravě a maticově:

$$\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L} = \mathbf{v},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_k \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}_0) - \mathbf{l}_1 \\ F_2(\mathbf{x}_0) - \mathbf{l}_2 \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}_0) - \mathbf{l}_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Po aplikaci metody nejmenších čtverců získáváme pro vyrovnané neznámé vztah:

$$d\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{L}). \quad (4)$$

Pro hodnocení přesnosti transformace jje používána míra ztotožnění:

$$m^2 = \frac{\sum v_x^2 + \sum v_y^2}{n}$$

Section 2

Podobnostní transformace

$$\begin{aligned}x' &= m \cos \alpha x - m \sin \alpha y + T_x \\y' &= m \sin \alpha x + m \cos \alpha y + T_y,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož se jedná již o lineární vztah, není nutné provádět linearizaci.
Neznámými jsou tedy přímo transformační koeficienty a, b, c, d .
Nechť tedy matice $d\mathbf{x}$ má tvar:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Potom matice **A** má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Vzhledem k volbě nulových přibližných hodnot můžeme psát $F_i(x_0) = 0$ a tedy (dle 3) matice $\mathbf{L}$ má tvar:

$$\mathbf{L} = - \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Section 3

Afinní transformace

Afinní transformaci lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na základě obdobné volby neznámých jako v ?? můžeme psát tvar matice $d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

Potom matice **A** má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Matice **L** je pak shodná s maticí podobností transformace, viz vztah (7). Použitím vztahu (4) dostáváme tak přímo vyrovnané neznámé.

Pro optimalizaci výpočtu v rámci implementace lze matici **A** zjednodušit a počítat neznámé a, b, c a d, e, f odděleně. Matice **A** má pak tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ & & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix},$$

Section 4

Projektivní transformace

Projektivní transformaci v rovině lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$\begin{pmatrix} mx' \\ my' \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $m \neq 0$ je libovolné číslo (tzv. homogenizující složka).

Vzhledem k lineární formě vztahů můžeme opět zvolit:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

Potom matice **A** má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1 x_1 & -x'_1 y_1 \\ & & & \vdots & & & & \\ & x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & -x'_n x_n & -x'_n y_n \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x'_1 x_1 & -x'_1 y_1 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -x'_n x_n & -x'_n y_n \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Matice **L** je pak shodná s maticí podobností transformace - viz vztah (7). Použitím vztahu (4) dostáváme tak opět přímo vyrovnané neznámé.

Section 5

Speciální případ afinní

viz doprovodný text. . .

Section 6

Odvození ostatních metod

Subsection 1

Metoda Burša Wolf

Metoda Burša Wolf

Matice neznámých takto:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \\ d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \\ dq \end{pmatrix}. \quad (10)$$

viz dokument

Subsection 2

Odvození metod na bázi gridu

Odození metod na bázi gridu

Subsection 3

Odvození transformace po částech

Metody vyrovnání
Podobnostní transformace
Afinní transformace
Projektivní transformace
Speciální případ afinní
Odvození ostatních metod
Software

Metoda Burša Wolf
Odození metod na bázi gridu
Odvození transformace po částech

Section 7

Software

- <http://blog.oldmapsonline.org/2008/06/georeferencing-images-by-control-points.html>
- <http://www.georeferencer.org/>
- <http://mapanalyst.org/>
- QGIS georeferencer plugin