Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd Katedra matematiky

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY

INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

Josef MAŠEK

Plzeň 1993

P ř e d m l u v a

K úspěšnému studiu této sbírky úloh je třeba dobře znát řadu metod a výsledků z teorie funkcí komplexní proměnné. V uvedeném smyslu je tento učební text pokračováním předcházející sbírky úloh [4] (seznam literatury na str. 4) a zachovává také podobný způsob zpracování.

Na začátku každé kapitoly jsem opět uvedl stručný přehled základních definic a důležitých teoretických výsledků. Snažil jsem se vybrat nejdůležitější typy příkladů a uspořádat je podle obtížnosti. Bezprostředně za zadáním každého příkladu je uvedeno řešení, návod nebo výsledek. K tomu, aby práce se sbírkou přinesla dobré výsledky, je třeba co nejvíce pracovat samostatně a nedat se ovlivnit uvedeným řešením. Teprve v případě neúspěšných pokusů nebo po vyřešení úlohy prohlédnout postup řešení a zkontrolovat výsledek.

Z mnoha integrálních transformací se v této sbírce budeme zabývat dvěma nejčastěji používanými : jednostrannou Laplaceovou transformací a Fourierovou transformací. Podle historického hlediska jsem volil postup od Fourierovy k Laplaceově transformaci. Ale pro ty, kteří se nebudou chtít podrobně zabývat Fourierovou transformaci, je možné bez problémů samostatně studovat Laplaceovu transformaci (kap. 4 - 8) a pouze informativně se seznámit s Fourierovou transformací. Takový postup odpovídá také sylabům předmětů MAA4, MAE3, MB2 (viz [3]).

K označení základních číselných množin se používá obvyklé označení

$\mathcal{N}$ - množina všech přirozených čísel,
$\mathcal{Z}$ - množina všech celých čísel,
$\mathcal{R}$ - množina všech reálných čísel,
$\mathcal{R}^+$ - množina všech nezáporných reálných čísel.
$\mathcal{C}$ - množina všech komplexních čísel.

Děkuji srdečně všem, kteří se přičinili o to, aby se počet nedopatření a chyb omezil na co nejmenší míru. Především děkuji kolegovi doc.Josefu Polákovi a vedoucímu katedry prof. Pavlu Drábkovi, kteří přispěli mnoha radami ke zlepšení výsledného textu.

Plzeň, 31. října 1993. A u t o r

O b s a h

L i t e r a t u r a

[1] Veit Jan : Integrální transformace (Matematika pro VST), Praha 1983

[2] Pírko Z.,Veit J. : Laplaceova transformace (SNTL / ALFA), Praha 1970

[3] Polák Josef : Integrální a diskrétní transformace (skripta ZU),Plzeň 1991

[4] Mašek Josef : Sbírka úloh z matematiky - Funkce komplexní proměnné (skripta ZU), Plzeň 1992

1. Fourierova transformace

Myšlenka integrálních transformací využívá možnosti vyjádření funkce reálné proměnné pomocí dvojnásobného integrálu, ve kterém se vyskytuje pomocná proměnná (parametr). Jsou známé různé typy postačujících podmínek pro takové vyjádření. Poměrně jednoduché jsou různé varianty podmínek, které se často nazývají Dirichletovy. Jeden z jejich možných tvarů je vyjádřen v následující definici (viz [2] odst.9.2 a 9.5; [3] str. 111).

Definice : Budeme říkat, že funkce f reálné proměnné t splňuje v intervalu (a,b) **Dirichletovy podmínky** , jestliže platí

1. funkce f je po částech spojitá v intervalu (a,b) ,
2. její derivace f' je po částech spojitá v intervalu (a,b) ,
3. pro každé $t \in (a,b)$ platí $f(t) = \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{\tau\to t-} f(\tau) + \lim\limits_{\tau\to t+} f(\tau)\right]$.

Další definice a věta uvádí výsledný zápis funkce f reálné proměnné t pomocí tzv. Fourierova integrálu (viz např. [2] odst. 9.7).

Definice : Jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{a\to\infty}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\, dt$, potom se nazývá **hlavní hodnota** nevlastního integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$.
Pro hlavní hodnotu se používá označení V.p $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$
(z francouzského valeur principal).

Věta : Jestliže pro funkci f reálné proměnné t platí:
1. funkce f je definována pro všechna $t \in \mathcal{R}$,
2. splňuje Dirichletovy podmínky v každém konečném intervalu,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ absolutně konverguje (tj.$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ konverguje),

potom platí pro všechna $t \in \mathcal{R}$ rovnost mezi hodnotou funkce $f(t)$ a tzv. Fourierovým integrálem této funkce

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\ \text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{iu(t-\tau)}\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ \text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-iu\tau} d\tau\right] e^{iut} du.$$

Je třeba znovu zdůraznit, že předcházející věta uvádí postačující podmínky pro možnost vyjádření $f(t)$ Fourierovým integrálem. Nadále se budeme vědomě omezovat na takové funkce, které splňují podmínky této věty a dohodneme se na následující definici.

Definice : Funkci f , která splňuje podmínky předcházející věty, budeme nazývat **zobrazitelnou funkcí ve Fourierově transformaci**.

Protože integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ konverguje (podle předpokladu věty) a platí rovnost $|\, e^{-iut}\, | = 1$, musí vnitřní integrál ve Fourierově integrálu stejnoměrně a absolutně konvergovat v $\mathcal{R}$ vzhledem k parametru u . Proto je tímto integrálem definována spojitá funkce F reálné proměnné (parametru) u .

Definice : Funkce F definovaná vnitřním integrálem ve Fourierově integrálu se nazývá **Fourierův obraz (zobrazitelné) funkce** f . Označuje se $F(u)$ nebo $\mathcal{F}\,[f(t)]$ a platí

$$F(u) = \mathcal{F}\,[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\; e^{-iut}\; dt\;, \quad u \in \mathcal{R}\;.$$

Pro definování Fourierova obrazu nebyla potřeba třetí Dirichletova podmínka, protože výpočet hodnoty integrálu není závislý na hodnotě funkce $f(t)$ v bodech nespojitosti.

Přímo z definice obrazu pomocí integrálu je zřejmé, že Fourierova transformace je lineární, tj. platí :
Jestliže funkce f_1 a f_2 jsou zobrazitelné ve Fourierově transformaci, potom platí $\mathcal{F}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1\mathcal{F}[f_1(t)] + c_2\mathcal{F}[f_2(t)]$, $c_1 \in \mathcal{R}$, $c_2 \in \mathcal{R}$.

Poznámka : V literatuře se často používá vzhledem k aplikacím jako parametr ω a pro obecný zápis obrazu $F(i\omega)$. Dal jsem přednost jednoduššímu zápisu u a $F(u)$.

Definovat obraz funkce f by bylo možné také jiným stejnoměrně a absolutně konvergentním integrálem závislým na parametru. Důležité však je, že Fourierův integrál umožňuje také **jednoznačně** vyjádřit původní funkci f pomocí obrazu F . Zde je potřebná třetí Dirichletova podmínka, protože zaručuje tuto jednoznačnost.

Jestliže je tedy funkce F Fourierovým obrazem funkce f, potom se nazývá funkce f **originál (vzor) funkce** F **ve Fourierově transformaci** a pro výpočet originálu platí

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \frac{1}{2\pi}\text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{iut}du.$$

Jestliže integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\ du$ absolutně konverguje, potom (vzhledem k rovnosti $|\ e^{iut}\ | = 1$) není třeba při výpočtu originálu používat hlavní hodnotu integrálu, integrál stejnoměrně konverguje v $\mathcal{R}$ vzhledem k parametru t a originál $f(t)$ musí být spojitá funkce parametru t.

V příkladech 1.1 - 1.10 rozhodněte, zda jsou dané funkce zobrazitelné ve Fourierově transformaci (ve smyslu naší definice). V kladném případě stanovte podle definice jejich Fourierův obraz .

1.1.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \ , \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \ , \\ e^{-t} & \text{pro } t > 0 \ . \end{cases}$$

Řešení : Funkce a její derivace mají jediný bod nespojitosti $t = 0$, ve kterém existují limity zprava a zleva. Funkce tedy splňuje první dvě Dirichletovy podmínky. Protože $\lim\limits_{t\to 0-} f(t) = 0$ a $\lim\limits_{t\to 0+} f(t) = 1$, je splněna i třetí podmínka.

Výpočtem zjistíme, že $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\ dt$ konverguje.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{-iut}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+iu)t}dt = \frac{1}{1+iu}.$$

1.2.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \ \vee \ t > 1 \ , \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \ \vee \ t = 1 \ , \\ 1 & \text{pro } t \in (0,1) \ . \end{cases}$$

Řešení : Daná funkce splňuje stejně jako v předcházejícím případě Dirichletovy podmínky. Protože funkce je nenulová pouze v konečném intervalu, nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ se redukuje na určitý integrál, který má konečnou hodnotu (rovná se 1).

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut}dt \;= \int_0^1 e^{-iut}dt \;= -\frac{1}{iu}(e^{-iu} - e^0) = \frac{1 - e^{-iu}}{iu}\ .$$

1.3. $f(t) = e^t$ pro $t \in \mathcal{R}$.

Řešení : Při výpočtu $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t\; dt = \lim\limits_{t\to+\infty} e^t - \lim\limits_{t\to-\infty} e^t$ je první limita nevlastní. Nevlastní integrál tedy nekonverguje a daná funkce není zobrazitelná funkce.

1.4.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < a \ \vee \ t > b \\ \frac{1}{2} & \text{pro } \ t = a \ \vee \ t = b \qquad (a \ < \ b) \\ 1 & \text{pro } \ t \in (a, b) \end{cases}$$

Výsledek : Daná funkce je zobrazitelná a platí

$$F(u) \ = \ \frac{e^{-iau} - e^{-ibu}}{iu}\ .$$

1.5. $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ pro $t \in \mathcal{R}$.

Řešení : Daná funkce není zobrazitelná, protože $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{t}{t^2+1}\, dt \ =$ $= \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ nekonverguje.

1.6. $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$ pro $t \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Daná funkce i její derivace jsou spojité funkce pro všechna $t \in \mathcal{R}$, takže Dirichletovy podmínky jsou splněny.
Snadným výpočtem se dá zjistit, že nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + a^2}\, dt$ konverguje, takže funkce je zobrazitelná a její obraz se dá určit pro $u = 0$ přímým výpočtem $F(0) = \dfrac{\pi}{a}$.
Pro $u < 0$ pomocí reziduové věty (viz [4] - podobně jako v př. 11.48) vyjde $F(u) = \dfrac{\pi\ e^{-au}}{a}$.
Pro $u > 0$ se nevlastní integrál počítá také pomocí reziduové věty, ale pro funkci $\dfrac{e^{-iuz}}{z^2 + a^2}$ po záporně orientované křivce (viz [4],př. 11.39) a vyjde $F(u) = \dfrac{\pi\ e^{au}}{a}$. Výsledek se dá také stručněji zapsat ve tvaru

$$F(u) = \frac{\pi\ e^{-a|u|}}{a} .$$

1.7. $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + 2t + 2}$ pro $t \in \mathcal{R}$.

Řešení : Daná funkce i její derivace jsou spojité funkce pro všechna $t \in \mathcal{R}$, takže Dirichletovy podmínky jsou splněny. Nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2}\, dt$ konverguje, takže funkce je zobrazitelná a její obraz se dá vypočítat pomocí reziduí (viz [4] př. 11.44).

$$F(u) = \pi\ e^{-u}(\cos u + i \sin u) \text{ pro } u \geq 0 \ ;$$

$$F(u) = \pi\ e^{u}(\cos u + i \sin u) \text{ pro } u < 0 \ .$$

1.8. $f(t) = \dfrac{1}{(t^2 + a^2)^2}$ pro $t \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Daná funkce i její derivace jsou spojité funkce pro všechna $t \in \mathcal{R}$, takže Dirichletovy podmínky jsou splněny. Nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + a^2)^2}\, dt$ konverguje, takže funkce je zobrazitelná a její obraz se dá vypočítat pomocí reziduí (viz [4] př. 1.55)

$$F(u) = \frac{\pi\ e^{-au}(1 + au)}{2\ a^3} \text{ pro } u \geq 0 \ ; \ F(u) = \frac{\pi\ e^{au}(1 + au)}{2\ a^3} \text{ pro } u < 0 \ .$$

1.9. $f(t) = \cos t$ pro $t \in \mathcal{R}$.

Řešení : Daná funkce není zobrazitelná, protože $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\cos t|\ dt$ nekonverguje.

1.10. $f(t) = e^{-t^2}$ pro $t \in \mathcal{R}$.

Řešení : Daná funkce i její derivace jsou spojité funkce pro všechna $t \in \mathcal{R}$, takže Dirichletovy podmínky jsou splněny. Nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$ konverguje (má hodnotu $\sqrt{\pi}$), takže funkce je zobrazitelná.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\ e^{-iut} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+iut)} dt = e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+iut-\frac{u^2}{4})} dt =$$

$$= e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2}\ d\tau = \sqrt{\pi}\ e^{-\frac{u^2}{4}} \ \left(\text{po substituci } \tau = t + \frac{iu}{2}\right).$$

V příkladech 1.11 - 1.30 vypočítejte Fourierův obraz daných funkcí a prověřte spojitost obrazu $F(u)$ a souvislost spojitosti originálu s absolutní konvergencí integrálu $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\ du$.

1.11 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ e^{-at} & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Řešení : $\mathcal{F}[f_1(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-iut}\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-(at+iut)}\ dt = \dfrac{1}{a+iu}$.
Výsledek platí i pro $a \in \mathcal{C}$. Obraz je zřejmě spojitá funkce; originál není spojitá funkce a integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{du}{|a+iu|}$ nekonverguje.

1.12 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$f_2(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Řešení : $\mathcal{F}[f_2(t)] = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-iut}\ dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(at-iut)}\ dt = \dfrac{1}{a-iu}$.
Výsledek platí i pro $a \in \mathcal{C}$. Obraz je zřejmě spojitá funkce; originál není spojitá funkce a integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{du}{|a-iu|}$ nekonverguje.

1.13 Pro $a \in \mathcal{R}^+$: $f_3(t) = e^{-a|t|}$.

Řešení : Danou funkci můžeme vyjádřit pomocí předcházejících funkcí; zřejmě platí $f_3(t) = f_1(t)+f_2(t)$, takže $\mathcal{F}[f_3(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)]+\mathcal{F}[f_2(t)] =$

$= \dfrac{1}{a+iu} + \dfrac{1}{a-iu} = \dfrac{2a}{a^2+u^2}$. Obraz je zřejmě spojitá funkce; originál je spojitá funkce a integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2a\ du}{a^2+u^2}$ absolutně konverguje.

1.14 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$f_4(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{pro } t < 0 \\ 0 & \text{pro } t = 0 \\ -e^{-at} & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Řešení : Zřejmě platí $f_4(t) = f_2(t)-f_1(t)$, takže $\mathcal{F}[f_4(t)] = \mathcal{F}[f_2(t)]-$ $- \mathcal{F}[f_1(t)] = \dfrac{1}{a-iu} - \dfrac{1}{a+iu} = \dfrac{2ui}{a^2+u^2}$. Obraz je zřejmě spojitá funkce; originál není spojitá funkce a integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2ui\ du}{a^2+u^2}$ nekonverguje.

1.15 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \ \vee \ t > a \\ \frac{a}{2} & \text{pro } t = 0 \\ a - t & \text{pro } t \in (0, a) \end{cases}$$

Řešení : Pro $u \neq 0$ vypočítáme $\mathcal{F}[g_1(t)] = \int_0^a (a-t)e^{-iut}\, dt =$
$= \left.\dfrac{(a-t)\, e^{-iut}}{-iu}\right|_0^a + \int_0^a \dfrac{e^{-iut}}{iu}\, dt = \dfrac{-iau + 1 - e^{-iau}}{u^2}$. Obraz je spojitá funkce, protože $F(0) = \int_0^a (a-t)\, dt = \left.(at - \dfrac{t^2}{2})\right|_0^a = a^2 - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}$
a $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{-iau + 1 - e^{-iau}}{u^2} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{-ia + ia\, e^{-iau}}{2u} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{a^2\, e^{-iau}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.
Originál není spojitá funkce a integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{a\, du}{|iu|}$ nekonverguje.

1.16 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$g_2(t) = \begin{cases} a + t & \text{pro } t \in (-a, 0) \\ \frac{a}{2} & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t \leq -a \ \vee \ t > 0 \end{cases}$$

Řešení : Pro $u \neq 0$ vypočítáme podle definice
$F(u) = \mathcal{F}[g_2(t)] = \int_{-a}^0 (a+t)e^{-iut}\, dt = \dfrac{iau + 1 - e^{iau}}{u^2}$.

Obraz je spojitá funkce, protože
$F(0) = \int_{-a}^0 (a+t)\, dt = \left.(at + \dfrac{t^2}{2})\right|_0^a = -a^2 + \dfrac{a^2}{2} = -\dfrac{a^2}{2}$ a
$\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{iau + 1 - e^{iau}}{u^2} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{ia - ia\, e^{iau}}{2u} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{-a^2\, e^{iau}}{2} = \dfrac{-a^2}{2}$.
Originál není spojitá funkce a integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{a\, du}{|iu|}$ nekonverguje.

1.17 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$g_3(t) = \begin{cases} a - |t| & \text{pro } |t| < a \\ 0 & \text{pro } |t| \geq a \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme zřejmě vytvořit jako součet předcházejících : $g_3(t) = g_1(t) + g_2(t)$, takže pro $u \neq 0$ vypočítáme $\mathcal{F}[g_3(t)] = \mathcal{F}[g_1(t)] + \mathcal{F}[g_2(t)] = \dfrac{1-e^{-iau}}{u^2} + \dfrac{1-e^{iau}}{u^2} = \dfrac{2(1-\cos au)}{u^2}$.
Jako součet spojitých funkcí je tento obraz také spojitá funkce. Originál

je spojitá funkce a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1-\cos au)\ du}{u^2}$ absolutně konverguje.

1.18 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$g_4(t) = \begin{cases} -a-t & \text{pro } t \in (-a,0) \\ a-t & \text{pro } t \in (0,a) \\ 0 & \text{pro } t = 0 \ \vee \ |t| \geq a \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme zřejmě vytvořit jako rozdíl :
$g_4(t) = g_1(t) - g_2(t)$, takže pro $u \neq 0$ vypočítáme
$\mathcal{F}[g_3(t)] = \mathcal{F}[g_1(t)] - \mathcal{F}[g_2(t)] = \dfrac{1-e^{-iau}}{u^2} - \dfrac{1-e^{iau}}{u^2} = \dfrac{2\ i\ \sin au}{u^2}$.
Jako rozdíl spojitých funkcí je tento obraz také spojitá funkce. Originál je spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\ i\ \sin au\ du}{u^2}$ absolutně konverguje.

1.19 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \vee t > a \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \vee t = a \\ 1 & \text{pro } t \in (0,a) \end{cases}$$

Výsledek : Pro $u \neq 0$: $\mathcal{F}[h_1(t)] = \dfrac{1-e^{-iau}}{iu}$.
Spojitost obrazu pro $u = 0$ je třeba ověřit . Originál není spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|1-e^{-iau}|\ du}{|iu|}$ nekonverguje.

1.20 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$h_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \;\; t \in (-a, 0) \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \;\; t = -a \vee t = 0 \\ 0 & \text{pro} \;\; t < -a \vee t > 0 \end{cases}$$

Výsledek: Pro $u \neq 0 \; : \; \mathcal{F}[h_2(t)] = \dfrac{e^{iau} - 1}{iu}$.
Spojitost obrazu pro $u = 0$ je třeba ověřit . Originál není spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{iau} - 1| \; du}{|iu|}$ nekonverguje.

1.21 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$h_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \;\; |t| < a \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \;\; |t| = a \\ 0 & \text{pro} \;\; |t| > a \end{cases}$$

Výsledek : Pro $u \neq 0 \; : \; \mathcal{F}[h_3(t)] = \dfrac{2 \sin au}{u}$.
Spojitost obrazu pro $u = 0$ je třeba ověřit . Originál není spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2|\sin au| \; du}{|u|}$ nekonverguje.

1.22 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$h_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; |t| > a \;\vee\; t = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{pro} \;\; t = -a \\ -1 & \text{pro} \;\; t \in (-a, 0) \\ 1 & \text{pro} \;\; t \in (0, a) \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \;\; t = a \end{cases}$$

Výsledek : Pro $u \neq 0 \; : \; \mathcal{F}[h_4(t)] = \dfrac{2(1 - \cos au)}{iu}$.
Spojitost obrazu pro $u = 0$ je třeba ověřit . Originál není spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2|(1 - \cos au)| \; du}{|iu|}$ nekonverguje.

1.23 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$k_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \le 0 \vee t > a \\ \frac{a}{2} & \text{pro } t = a \\ t & \text{pro } t \in (0, a) \end{cases}$$

Výsledek : Pro $u \neq 0$: $\mathcal{F}[k_1(t)] = -\dfrac{a\ e^{-iau}}{iu} + \dfrac{e^{-iau} - 1}{u^2}.$

Originál není spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\ e^{-iau} du}{|iu|}$ nekonverguje.

Všimněte si, že platí $k_1(t) = a\ h_1(t) - g_1(t)$; tím je také zaručena spojitost obrazu pro $u = 0$.

1.24 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$k_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < a \vee t \ge 0 \\ \frac{a}{2} & \text{pro } t = -a \\ -t & \text{pro } t \in (-a, 0) \end{cases}$$

Výsledek : Pro $u \neq 0$: $\mathcal{F}[k_2(t)] = \dfrac{a\ e^{iau}}{iu} + \dfrac{e^{iau} - 1}{u^2}.$

Originál není spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\ e^{iau} du}{|iu|}$ nekonverguje.

Všimněte si, že platí $k_2(t) = a\ h_2(t) - g_2(t)$; tím je také zaručena spojitost obrazu pro $u = 0$.

1.25 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$k_3(t) = \begin{cases} |t| & \text{pro } |t| < a \\ \frac{a}{2} & \text{pro } |t| = a \\ 0 & \text{pro } |t| > a \end{cases}$$

Výsledek : Pro $u \neq 0$: $\mathcal{F}[k_3(t)] = \dfrac{2a \sin au}{u} - \dfrac{2(1 - \cos au)}{u^2}$.

Originál není spojitá funkce a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a|\sin au|\ du}{|u|}$ nekonverguje.

Všimněte si, že platí $k_3(t) = a\ h_3(t) - g_3(t)$; tím je také zaručena spojitost obrazu pro $u = 0$.

1.26 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$k_4(t) = \begin{cases} t & \text{pro } |t| < a \\ -\frac{a}{2} & \text{pro } t = -a \\ \frac{a}{2} & \text{pro } t = a \\ 0 & \text{pro } |t| > a \end{cases}$$

Výsledek : Pro $u \neq 0$: $\mathcal{F}[k_4(t)] = -\dfrac{2a\cos au}{iu} - \dfrac{2\ i\ \sin au}{u^2}$.

Originál není spojitá funkce a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a|\cos au|\ du}{|u|}$ nekonverguje.

Všimněte si, že platí $k_4(t) = a\ h_4(t) - g_4(t)$; tím je také zaručena spojitost obrazu pro $u = 0$.

1.27 Funkce

$$r_1(t) = \begin{cases} \sin t & \text{pro } t \in (0, \pi) \\ 0 & \text{pro } t \leq 0 \ \vee \ t \geq \pi \end{cases}$$

Řešení : Pro $|u| \neq 1$ vypočítáme podle definice

$$R_1(u) = \mathcal{F}[r_1(t)] = \int_0^{\pi} \sin t\ e^{-iut} dt = \left[\frac{e^{-iut}(-iu\sin t - \cos t)}{1 - u^2}\right]_0^{\pi} =$$
$$= \frac{-e^{-i\pi u}\cos\pi + e^0\cos 0}{1 - u^2} = \frac{1 + e^{i\pi u}}{1 - u^2} .$$

Při výpočtu byl použit vzorec $\displaystyle\int e^{at}\sin bt\ dt = \frac{e^{at}(a\sin bt - b\cos bt)}{a^2 + b^2}$,
který se dá odvodit dvojnásobným použitím metody per partes.

Obraz je spojitá funkce, protože $R_1(1) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\ e^{-it} dt =$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^{\pi}(e^{it} - e^{-it})e^{-it}dt = \frac{1}{2i}\int_0^{\pi}(1 - e^{-2it})dt = \frac{1}{2i}\ t - \frac{e^{-2it}}{-2i})\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2i}$$

a také $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{1+e^{-i\pi u}}{1-u^2} = \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{-\pi i\ e^{-i\pi u}}{-2u} = \dfrac{\pi i\ e^{-i\pi}}{2} = \dfrac{\pi i(-1)}{2} = \dfrac{\pi}{2i}$.

Podobně ověříme spojitost obrazu pro $u = -1$. Originál je spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+e^{-i\pi u})\ du}{1-u^2}$ absolutně konverguje.

1.28 Funkce

$$r_2(t) = \begin{cases} \sin t & \text{pro } |t| < \pi \\ 0 & \text{pro } |t| \geq \pi \end{cases}$$

Výsledek : Pro $|u| \neq 1$: $\mathcal{F}[r_2(t)] = \dfrac{2i \sin \pi u}{u^2-1}$.

Spojitost obrazu pro $u = 1$ a $u = -1$ je třeba ověřit. Originál je spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i \sin \pi u\ du}{u^2-1}$ absolutně konverguje.

1.29 Funkce

$$s_1(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pro } |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{pro } |t| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Řešení : Pro $|u| \neq 1$ vypočítáme podle definice

$$S_1(u) = \mathcal{F}[s_1(t)] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ e^{-iut} dt = \left. \frac{e^{-iut}(-iu\cos t + \sin t)}{1-u^2} \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}u} \sin\frac{\pi}{2} - e^{i\frac{\pi}{2}u} \sin(-\frac{\pi}{2})}{1-u^2} = \frac{2\ \cos\frac{\pi}{2}\ u}{1-u^2} .$$

Při výpočtu byl použit vzorec $\displaystyle\int e^{at} \cos bt\ dt = \frac{e^{at}(a\cos bt + b \sin bt)}{a^2+b^2}$, který se dá odvodit dvojnásobným použitím metody per partes.

Obraz je spojitá funkce, protože $S_1(1) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ e^{-it} dt =$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{it} + e^{-it}) e^{-it} dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + e^{-2it}) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{e^{-2it}}{-2i} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

a také $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{2\ \cos\frac{\pi}{2}\ u}{1-u^2} = \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{-\pi\ \sin\frac{\pi}{2}\ u}{-2u} = \dfrac{\pi}{2}$.

Podobně ověříme spojitost obrazu pro $u = -1$. Originál je spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\ \cos\frac{\pi}{2}\ u\ du}{1-u^2}$ absolutně konverguje.

1.30 Funkce

$$s_2(t) = \begin{cases} \cos\frac{t}{2} & \text{pro} \quad |t| < \pi \\ 0 & \text{pro} \quad |t| \geq \pi \end{cases}$$

Výsledek : Pro $|u| \neq \frac{1}{2}$: $\mathcal{F}[s_2(t)] = -\dfrac{4\cos\pi u}{1-4u^2}.$

Spojitost obrazu pro $u = \frac{1}{2}$ a $u = -\frac{1}{2}$ je třeba ověřit. Originál je spojitá funkce a integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\cos\pi u\ du}{1-4u^2}$ absolutně konverguje.

2. Vlastnosti Fourierovy transformace

Složitější obrazy již nebudeme určovat podle definice, ale na základě vlastností, které budou v této kapitole odvozeny ve formě řešených úloh. V ostatních úlohách se potom tyto vlastnosti používají k nalezení dalších obrazů.

2.1 Dokažte, že pro $a > 0$ platí : Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$, potom

$$\boxed{\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a}\ F\left(\frac{u}{a}\right)\ .}$$

Řešení : Funkce $f(at)$ musí také splňovat Dirichletovy podmínky, protože je splňuje funkce $f(t)$. V definičním integrálu provedeme substituci $at = \tau$, $a\ dt = d\tau$. Přitom se nezmění meze (vzhledem k tomu, že $a > 0$) a nemůže se změnit konvergence integrálu. Dostaneme tedy

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\ e^{-iut}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\ e^{-i\frac{u}{a}\tau}\frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{u}{a}\right)\ .$$

2.2 Pro $a > 0$ najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-a^2t^2}$. **Řešení :** V př. 1.10 jsme našli Fourierův obraz $\mathcal{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi}\ e^{-\frac{u^2}{4}}$, takže $\mathcal{F}[e^{-(at)^2}] = \dfrac{1}{a}\sqrt{\pi}\ e^{-\frac{u^2}{4a^2}}$.

2.3 Dokažte, že platí : Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$, potom

$$\boxed{\mathcal{F}[f(-t)] = \ F(-u)\ .}$$

Řešení : Funkce $f(-t)$ musí být zřejmě také zobrazitelná funkce. V definičním integrálu provedeme substituci $-t = \tau,\ -dt = d\tau$, takže dostaneme

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\ e^{-iut}dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau)\ e^{-i(-u)\tau}(-d\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\ e^{-i(-u)\tau}d\tau = F(-u)\ .$$

2.4 Dokažte, že Fourierovým obrazem sudé funkce je sudá funkce a Fourierovým obrazem liché funkce je lichá funkce.

Návod : Tvrzení je přímým důsledkem předcházejícího výsledku a definice sudé a liché funkce.

Ověřte toto tvrzení pro funkce $f_3(t)$, $f_4(t)$, $g_3(t)$, $g_4(t)$, $h_3(t)$, $h_4(t)$, $k_3(t)$, $k_4(t)$ z kapitoly 1.

2.5 Dokažte, že pro $a \in \mathcal{R}$ platí : Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$, potom

$$\boxed{\mathcal{F}[e^{iat}f(t)] \; = \; F(u-a) \; .}$$

Řešení : V těchto případech zobrazujeme komplexní funkci reálné proměnné. Dirichletovy podmínky pro reálnou část ($f(t) \; \cos at$) a také pro imaginární část ($f(t) \; \sin at$) funkce $e^{iat}f(t)$ jsou splněny a vzhledem k podmínce $|e^{iat}| = 1$ se nemůže změnit absolutní konvergence integrálu. Fourierův obraz funkce $e^{iat}f(t)$ tedy existuje a vypočítá se podle definice

$$\mathcal{F}[e^{iat}f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \; e^{iat}e^{-iut}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \; e^{-i(u-a)t}dt = F(u-a).$$

2.6 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz

$$p_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \; t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } \; t = 0 \\ e^{-at}(\cos bt + i \sin bt) & \text{pro } \; t > 0 \end{cases}$$

Řešení : Pro $t > 0$ můžeme zapsat funkci $p_1(t)$ v exponenciálním tvaru $p_1(t) = e^{ibt}e^{-at}$. Protože podle př. 1.11 je $\mathcal{F}[f_1(t)] = \dfrac{1}{a+iu}$, dostaneme podle vlastnosti z př. 2.5 $\mathcal{F}[p_1(t)] = \mathcal{F}[e^{ibt}f_2(t)] = \dfrac{1}{a+i(u-b)}$.

2.7 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz

$$p_2(t) = \begin{cases} e^{at}e^{ibt} & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Výsledek : $\mathcal{F}[\ p_2(t)\ ] = \mathcal{F}[e^{ibt} f_1(t)] = \dfrac{1}{a - i(u-b)}.$

2.8 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz

$$p_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ e^{-at}(\cos bt - i \sin bt) & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Řešení : Pro $t > 0$ můžeme zapsat funkci $p_3(t)$ v exponenciálním tvaru $g_3(t) = e^{-ibt}e^{-at}$. Protože podle př. 1.11 je $\mathcal{F}[f_1(t)] = \dfrac{1}{a + iu}$, dostaneme podle vlastnosti z př.2.5 $\mathcal{F}[p_3(t)] = \mathcal{F}[e^{-ibt} f_1(t)] = \dfrac{1}{a + i(u+b)}$.

2.9 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz

$$p_4(t) = \begin{cases} e^{at}e^{-ibt} & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Výsledek : $\mathcal{F}[\ p_4(t)\ ] = \mathcal{F}[\ e^{-ibt} f_2(t)\ ] = \dfrac{1}{a - i(u+b)}.$

2.10 Použijte pravidlo z př. 2.5 a najděte Fourierův obraz funkce (z př.1.27)

$$r_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leq 0 \vee t \geq \pi \\ \sin t & \text{pro } t \in (0, \pi) \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako součin funkce $\sin t$ a funkce $h_1(t)$ z př. 1.19 (pro $a = \pi$).

Ze znalosti obrazu $\mathcal{F}[\ h_1(t)\ ] = \dfrac{1-e^{-i\pi u}}{iu}$ dostaneme

$$\mathcal{F}[\ r_1(t)\ ] = \mathcal{F}[\ h_1(t)\sin t\ ] = \mathcal{F}\left[h_1(t)\ \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1-e^{-i\pi(u-1)}}{u-1} - \frac{1-e^{-i\pi(u+1)}}{u+1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1-e^{-i\pi u}e^{i\pi}}{u-1} + \frac{e^{-i\pi u}e^{-i\pi}-1}{u+1}\right] =$$

$$= -\frac{1-iue^{-i\pi u}\sin\pi - e^{-i\pi u}\cos\pi}{u^2-1} = -\frac{1+e^{-i\pi u}}{u^2-1} = \frac{1+e^{-i\pi u}}{1-u^2}.$$

Výsledek musí souhlasit s výsledkem př. 1.27.

2.11 Použijte pravidlo z př. 2.5 a najděte Fourierův obraz funkce (viz př. 1.28)

$$r_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |t| \geq \pi \\ \sin t & \text{pro } |t| < \pi \end{cases}$$

Návod : Danou funkci můžete chápat jako součin $\sin t$ a funkce $h_3(t)$ z př. 1.21 pro $a = \pi$.

Výsledek : $\mathcal{F}[\ r_2(t)\ ] = \dfrac{2i\ \sin \pi u}{u^2-1}.$

2.12 Použijte pravidlo z př. 2.5 a najděte Fourierův obraz funkce (viz př.1. 29)

$$s_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |t| \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos t & \text{pro } |t| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako součin funkce $\cos t$ a funkce $h_3(t)$ z př. 1.21 (pro $a = \frac{\pi}{2}$).

Ze znalosti obrazu $\mathcal{F}[\ h_3(t)\ ] = \dfrac{2\ \sin\frac{\pi}{2}\ u}{u}$ dostaneme

$$\mathcal{F}[\ s_1(t)\ ] = \mathcal{F}[\ h_3(t)\cos t\ ] = \mathcal{F}\left[h_3(t)\ \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2}(u-1)}{u-1} - \frac{\sin\pi 2(u+1)}{u+1} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}u - \frac{\pi}{2})}{u-1} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}u + \frac{\pi}{2})}{u+1} =$$

$$= \frac{-\cos\pi 2u}{u-1} + \frac{\cos\pi 2u}{u+1} = \cos\frac{\pi}{2}\ u\frac{-u-1+u-1}{u^2-1} = -\frac{2\ \cos\frac{\pi}{2}u}{u^2-1}\ .$$

Výsledek musí souhlasit s výsledkem př.1.29.

2.13 Najděte Fourierův obraz funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro}\ \ |t| \geq \pi \\ \sin & \text{pro}\ \ |t| < \pi \end{cases}$$

Návod : Danou funkci můžete chápat jako součin funkce $\cos\frac{t}{2}$ a funkce $h_3(t)$ z př. 1.21 (pro $a = \pi$).
Výsledek musí souhlasit s výsledkem př. 1.30.

2.14 Najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-|t|}\cos t$.

Řešení : Protože podle př. 1.13 (pro $a = 1$) známe obraz $\mathcal{F}[\ f_3(t)\ ] = \mathcal{F}[\ e^{-|t|}\ ] = \dfrac{2}{1+u^2}$, dostaneme

$$\mathcal{F}[\ f(t)\ ] = \mathcal{F}[\ f_3(t)\cos t\ ] = \mathcal{F}\left[\ f_3(t)\ \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\ \right] =$$

$$= \frac{1}{1+(u-1)^2} + \frac{1}{1+(u+1)^2} = \frac{1}{u^2-2u+2} + \frac{1}{u^2+2u+2} =$$

$$= \frac{u^2-2u+2+u^2+2u+2}{(u^2+2-2u)(u^2+2+2u)} = \frac{2\ (u^2+2)}{u^4+4}\ .$$

2.15 Najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-|t|}\sin t$.

Výsledek : $\mathcal{F}[\ e^{-|t|}\sin t\ ] = \dfrac{4u}{i(u^4+4)}$.

2.16 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz $f(t) = \dfrac{\cos bt}{t^2 + a^2}$.

Návod : Použijte výsledek př. 1.6 a př. 2.5. **Výsledek :** $\mathcal{F}[\ f(t)\ ] = \mathcal{F}\left[\dfrac{1}{t^2 + a^2}\cos bt\right] = \dfrac{\pi(e^{-a|u-b|} + e^{-a|u+b|})}{2a}$.

2.17 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz $f(t) = \dfrac{\sin bt}{t^2 + a^2}$.

Výsledek : $\mathcal{F}\left[\ \dfrac{\sin bt}{t^2 + a^2}\ \right] = \dfrac{\pi(e^{-a|u-b|} - e^{-a|u+b|})}{2ai}$.

2.18 Dokažte, že pro $a \in \mathcal{R}$ platí : Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$, potom

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t-a)] \ = \ e^{-iau}F(u)\ .}$$

Řešení : Funkce $f(t-a)$ znamená pouze posunutí a tím se nemohou změnit podmínky zobrazitelnosti funkce. V definičním integrálu provedeme substituci $t - a = \tau, dt = d\tau$

$$\mathcal{F}[f(t-a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\ e^{-iut}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\ e^{-iu(a+\tau)}d\tau =$$

$$= e^{-iau}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-iu\tau}d\ \tau = e^{-iau}F(u)\ .$$

2.19 Použijte pravidlo z př. 2.18 a najděte Fourierův obraz funkce (z př.1.29)

$$s_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ |t| \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos t & \text{pro } \ |t| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako posunutí funkce $r_1(t)$ z př. 2.11, protože platí $\cos t = \sin(t + \frac{\pi}{2})$. Podle pravidla z př. 2.18

dostaneme

$$\mathcal{F}[s_1(t)] = \mathcal{F}[r_1(t+\frac{\pi}{2})] = e^{-i(\frac{\pi}{2})u}\frac{1+e^{-i\pi\ u}}{1-u^2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\ u}+e^{-i\frac{\pi}{2}\ u}}{1-u^2} = \frac{2\ \cos\frac{\pi}{2}u}{1-u^2}\ .$$

2.20 Použijte pravidlo z př. 2.18 a najděte Fourierův obraz funkce $k_1(t)$ z př.1. 23 pomocí obrazu funkce $g_2(t)$ z př. 1.16.

Řešení : Mezi funkcemi $k_1(t)$ a $g_2(t)$ zřejmě platí $k_1(t) = g_2(t-a)$ Podle pravidla z př. 2.18 dostaneme

$$\mathcal{F}[k_1(t)] = e^{-iau}\mathcal{F}[g_2(t)] = e^{-iau}\frac{iau+1-e^{iau}}{u^2} = \frac{iau\ e^{-iau}+e^{-iau}-1}{u^2}\ .$$

2.21 Použijte pravidlo z př. 2.18 a najděte Fourierův obraz funkce $k_2(t)$ z př.1. 24 pomocí obrazu funkce $g_1(t)$ z př. 1.15.

Návod : Zřejmě platí $g_1(t) = k_2(t-a)$.

2.22 Jestliže funkce $f(t)$ a $t\ f(t)$ jsou zobrazitelné ve Fourierově transformaci a $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$, potom dokažte, že platí :

$$\boxed{\mathcal{F}[t\ f(t)]\ =\ i\ \frac{d\ F(u)}{du}\ .}$$

Řešení : Zobrazitelnost funkcí $f(t)$ a $t\ f(t)$ zaručuje stejnoměrnou konvergenci obrazu a jeho derivace. Proto můžeme při derivování definičního integrálu podle parametru u derivovat uvnitř integrálu a dostaneme $\dfrac{d\ F(u)}{du} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -it\ f(t)\ e^{-iut}dt = -i\mathcal{F}[t\ f(t)]$.
Po vynásobení rovnice imaginární jednotkou i dostaneme dokazovaný vzorec.

2.23 Použijte pravidlo z př. 2.22 a najděte Fourierův obraz funkce $k_1(t)$ z př.1.23 pomocí obrazu funkce $h_1(t)$ z př. 1.19.

Řešení : Pro funkce $k_1(t)$ a $h_1(t)$ zřejmě platí $k_1(t) = t\ h_1(t)$ Podle pravidla z př. 2.22 dostaneme

$$\mathcal{F}[\ k_1(t)\ ] = i\frac{d}{du}\left(\frac{1-e^{-iau}}{i\ u}\right) = \frac{ia\ e^{-iau}u-(1-e^{-iau})}{u^2}\ .$$

Výsledek je v souladu s výsledkem př. 1.19.

2.24 Použijte pravidlo z př. 2.22 a najděte Fourierův obraz funkce $k_2(t)$ z př. 1.24 pomocí obrazu funkce $h_2(t)$ z př. 1.20.

Návod : Zřejmě platí $k_2(t) = -t\ h_2(t)$.

2.25 Použijte pravidlo z př. 2.22 a najděte Fourierův obraz funkce $k_3(t)$ z př.1.25 pomocí obrazu funkce $h_4(t)$ z př. 1.22.

Návod : Ověřte, že platí $k_3(t) = t\ h_4(t)$.

2.26 Najděte Fourierův obraz funkce $g(t)\ = t\ e^{-|t|}$.

Řešení : Pro funkci $f_3(t)$ z př.1.13 (pro $a = 1$) použijeme pravidlo z př. 2.22, takže dostaneme $\mathcal{F}[\ t\, e^{-|t|}\ ] = i\ \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{2}{1+u^2}\right) = \dfrac{-4iu}{(1+u^2)^2}$.

2.27 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ najděte Fourierův obraz funkce $g(t)\ = |t|\ e^{-a|t|}$.

Řešení : Danou funkci můžeme vyjádřit jako součet funkce $t\ f_1(t)$ (viz př. 1.11) a funkce $-t\ f_2(t)$ (viz př.1.12). Podle pravidla z př. 2. 22 dostaneme

$$\mathcal{F}[\ |t|\ e^{-a|t|}\ ] = \mathcal{F}[t\, f_1(t)] - \mathcal{F}[t\, f_2(t)] = i\frac{d}{du}\left(\frac{1}{a+iu}\right) - i\frac{d}{du}\left(\frac{1}{a-iu}\right) =$$
$$= i\ \frac{-i}{(a+iu)^2} - i\ \frac{-(-i)}{(a-iu(^2} = \frac{1}{(a+iu)^2} + \frac{1}{(a-iu)^2} =$$
$$= \frac{a^2 - 2iau - u^2 + a^2 + 2iau - u^2}{(a^2+u^2)^2} = \frac{2(a^2-u^2)}{(a^2+u^2)^2}\ .$$

2.28 Najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = t\ f_1(t)$ ($f_1(t)$ z př. 1.11).

Výsledek : $\mathcal{F}[\ g(t)\ ] = \mathcal{F}[\ t\ f_1(t)\ ] = \dfrac{1}{(a+iu)^2}$.

2.29 Najděte Fourierův obraz funkce $g(t) = t\ f_4(t)$ ($f_4(t)$ z př. 1.14).

Výsledek : $\mathcal{F}[\ g(t)\ ] = \mathcal{F}[\ t\ f_4(t)\ ] = \dfrac{-2(a^2-u^2)}{(a^2+u^2)^2}$.

Poznámka : Všimněte si, že platí rovnost $|t|\ f_3(t) = -t\ f_4(t)$.

2.30 Jestliže a) funkce $f(t)$ je spojitá v R, b) funkce $f(t)$ a $f'(t)$ jsou zobrazitelné ve Fourierově transformaci, c) $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, potom dokažte, že platí :

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(t)] \ = \ iu\ \mathcal{F}[f(t)]\ .}$$

Řešení : Definiční integrál pro Fourierův obraz funkce $f'(t)$ můžeme vzhledem ke spojitosti funkce $f(t)$ počítat metodou per partes, takže dostaneme

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\ e^{-iut}dt = \Big[f(t)\ e^{-iut}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + iu\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ e^{-iut}dt =$$

$$= i\,u\,\mathcal{F}[f(t)]\ .$$

2.31 Použijte pravidlo z př. 2.30 a najděte Fourierův obraz funkce $f_4(t)$ z př. 1.14 pomocí derivace obrazu spojité funkce $f_3(t)$ z př. 1.13.

Řešení : Funkce $f_3(t)$ splňuje všechny předpoklady pro použití pravidla z př. 2.30 a zřejmě platí $f_3'(t) = a\ f_4(t)$. Skutečně podle tohoto pravidla dostaneme

$$\mathcal{F}[\ f_3'(t)\ ] = i\ u\ \mathcal{F}[\ f_3(t)\ ] = iu\ \frac{2\ a}{a^2+u^2} = a\ \frac{2ui}{a^2+u^2} = a\ \mathcal{F}[\ f_4(t)\ ]\ .$$

2.32 Použijte pravidlo z př. 2.30 a najděte Fourierův obraz funkce $h_4(t)$ z př.1.22 pomocí derivace obrazu spojité funkce $g_3(t)$ z př. 1.17.

Návod : Ověřte, že platí $g_3'(t) = -h_4(t)$.

2.33 Najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = \dfrac{t}{(t^2+a^2)^2}$.

Řešení : Danou funkci můžeme dostat pomocí derivace funkce $\dfrac{1}{t^2+a^2}$, protože $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{t^2+a^2}\right) = \dfrac{-2t}{(t^2+a^2)^2}$. Podle pravidla z př. 2.30 a výsledku př. 1.6 dostaneme $\mathcal{F}[\ f(t)\ ] = -\dfrac{1}{2}\, i\, u\, \mathcal{F}\left[\dfrac{1}{t^2+a^2}\right] = \dfrac{-iu\ e^{-a|u|}}{2a}$.

2.34 Najděte Fourierův obraz derivace funkce $f_2(t)$ z př. 1.12.

Řešení : Daná funkce není spojitá, takže nemůžeme použít pravidlo z př. 2.30. Definiční integrál pro Fourierův obraz funkce $f_2'(t)$ musíme počítat metodou per partes v intervalu $(-\infty, 0)$ a dostaneme

$$\mathcal{F}[f_2'(t)] = \int_{-\infty}^{0} f_2'(t) e^{-iut} dt = \Big[f_2(t)\ e^{-iut}\Big]_{-\infty}^{0} + iu \int_{-\infty}^{0} f_2(t)\ e^{-iut} dt =$$

$$= \lim_{t\to 0-} f_2(t) + iu\ \mathcal{F}[f_2(t)] = 1 + \frac{iu}{a-iu} = \frac{a-iu+iu}{a-iu} \quad (= a\ \mathcal{F}[f_2(t)])\ .$$

2.35 Najděte Fourierův obraz derivace funkce $f_1(t)$ z př. 1.11.

Návod : Daná funkce není spojitá, takže se nedá použít pravidlo z př. 2.30, ale je třeba integrovat v intervalu $(0, \infty)$. Pro kontrolu výsledku použijte toho, že platí $f_1'(t) = -a\ f_1(t)$.

2.36 Najděte Fourierův obraz derivace funkce $f_4(t)$ z př. 1.14.

Řešení : Daná funkce není spojitá, takže nemůžeme použít pravidlo z př. 2.30. Definiční integrál pro Fourierův obraz funkce $f_4'(t)$ musíme počítat metodou per partes nejprve v intervalu $(-\infty, 0)$ a potom v intervalu $(0, \infty)$. Dostaneme

$$\mathcal{F}[\ f_4'(t)\ ] = \int_{-\infty}^{0} f_4'(t)\ e^{-iut}\ dt + \int_{0}^{+\infty} f_4'(t)\ e^{-iut}\ dt =$$

$$= \Big[\ f_4(t)\ e^{-iut}\ \Big]_{-\infty}^{0} + iu \int_{-\infty}^{0} f_4(t)\ e^{-iut}\ dt +$$

$$+\ \Big[\ f_4(t)\ e^{-iut}\ \Big]_{0}^{+\infty} + iu \int_{0}^{+\infty} f_4(t)\ e^{-iut}\ dt =$$

$$= \lim_{t\to 0-} f_4(t) + iu\ \mathcal{F}[f_2(t)] - \lim_{t\to 0+} f_4(t) + iu\ \mathcal{F}[-f_1(t)] =$$

$$= 1 + \frac{iu}{a - iu}\ +\ 1 - \frac{iu}{a + iu} =$$

$$= \frac{a}{a - iu} + \frac{a}{a + iu} = a\ \frac{2a}{a^2 + u^2}\ \ (\ = a\ \mathcal{F}[\ f_3(t)\ ]\ )\ .$$

2.37 Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$ a $\lim\limits_{t\to -\infty} \int_0^t f(\tau)\ d\tau = \lim\limits_{t\to +\infty} \int_0^t f(\tau)\ d\tau = 0$, potom dokažte, že platí :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right] = \frac{F(u)}{iu}\ .}$$

Řešení : Integrál $\displaystyle\int_0^t f(\tau)\ d\tau$ (jako funkce horní meze) je spojitá funkce a splňuje limitní podmínky z př. 2.30. Obraz jeho derivace $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\ d\tau = f(t)$ je podle předpokladu známá funkce.
Proto dostaneme

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right] = \mathcal{F}[f(t)] = iu\ \mathcal{F}\left[\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right]\ .$$

2.38 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ najděte Fourierův obraz funkce
$I(t) = \int_0^t (a\tau - 1) f_1(\tau)\ d\tau$ podle předcházejícího pravidla.

Řešení : Daný integrál vzhledem k definici funkce $f_1(t)$ z př. 1.11 má nenulovou hodnotu pouze pro $t > 0$. Jeho hodnotu můžeme vypočítat metodou per partes $I(t) = \int_0^t (a\tau - 1) f_1(\tau)\ d\tau = -te^{-at}$. Je to spojitá funkce a má všechny požadované vlastnosti. Podle pravidla z př. 2.37

$$\mathcal{F}[I(t)] = \frac{1}{iu}\mathcal{F}[atf_1(t) - f_1(t)] = \frac{1}{iu} a - iu \left[\frac{a}{(a+iu)^2} - \frac{1}{a+iu} \right] =$$

$$= \frac{1}{iu}\ \frac{a - a - iu}{(a+iu)^2} = \frac{1}{iu}\ \frac{-iu}{(a+iu)^2} = \frac{-1}{(a+iu)^2} \quad (= -\mathcal{F}[t\ f_1(t)]\ )\ .$$

Pro obraz **konvolutorního součinu dvou zobrazitelných funkcí**, který je definován integrálem $f(t)\ *\ g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\ g(t-\tau)\ d\tau$, platí

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t)\ *\ g(t)]\ =\ \mathcal{F}[f(t)]\ \mathcal{F}[g(t)]\ .}$$

2.39 Vypočítejte konvolutorní součin $f_3(t) * f_3(t)$ (viz př. 1.13) a najděte jeho Fourierův obraz.

Řešení : Výpočet je třeba rozdělit na několik případů.

Pro $t > 0$ dostaneme

$$f_3(t)\ *\ f_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} e^{-a|t-\tau|} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{a\tau} e^{-at+a\tau} d\tau + \int_{0}^{t} e^{-a\tau} e^{-at+a\tau} d\tau + \int_{t}^{+\infty} e^{-a\tau} e^{at-a\tau} d\tau =$$

$$= e^{-at} \left[\frac{e^{2a\tau}}{2a} \right]_{-\infty}^{0} + e^{-at} [\tau]_0^t + e^{at} \left[\frac{e^{-2a\tau}}{-2a} \right]_{t}^{+\infty} =$$

$$= \frac{e^{-at}}{2a} + te^{-at} + \frac{e^{-at}}{2a} = \frac{e^{-at}}{a} + te^{at} \; .$$

Pro $t < 0$ dostaneme

$$f_3(t) \; * \; f_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} e^{-a|t-\tau|} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{a\tau} e^{-at+a\tau} d\tau + \int_{t}^{0} e^{a\tau} e^{at-a\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-a\tau} e^{at-a\tau} d\tau =$$

$$= e^{-at} \left[\frac{e^{2a\tau}}{2a} \right]_{-\infty}^{t} + e^{at} [\tau]_t^0 + e^{at} \left[\frac{e^{-2a\tau}}{-2a} \right]_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{e^{at}}{2a} - te^{at} + \frac{e^{at}}{2a} = \frac{e^{at}}{a} - te^{at} \; .$$

Pro $t = 0$ vyjde

$$f_3(t) * f_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2a|\tau|} d\tau = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-2a\tau} d\tau = 2 \left[\frac{e{-}2a\tau}{-2a} \right]_{0}^{infty} = \frac{1}{a} \; .$$

Výsledek můžeme zapsat ve tvaru $f_3(t) * f_3(t) = \dfrac{e^{-a|t|}}{a} + |t| \; e^{-a|t|}$.

Obrazem této funkce je (viz př. 1.13 a př. 2.24)

$$\mathcal{F}[\; f_3(t) \; * \; f_3(t) \;] = \frac{1}{a} \frac{2a}{a^2 + u^2} + \frac{2(a^2 - u^2)}{(a^2 + u^2)^2} = \frac{4a^2}{(a^2 + u^2)^2} \; .$$

Protože známe obraz funkce $f_3(t)$, můžeme podle výsledku př. 1.13 snadno ověřit platnost pravidla pro obraz konvolutorního součinu

$$\mathcal{F}[\; f_3(t) \; * \; f_3(t) \;] = \left[\frac{2a}{a^2 + u^2} \right]^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + u^2)^2} \; .$$

2.40 Vypočítejte konvolutorní součin $f_1(t) * f_1(t)$ (viz př. 1.11) a najděte jeho Fourierův obraz.

Řešení : V tomto případě se výpočet podstatně zjednoduší. Platí : $f_1(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a $f(t-\tau) = 0$ pro $\tau > t$. Takže definiční integrál má nenulovou hodnotu pouze pro $t > 0$ a dostaneme

$$f_1(t) \ * \ f_1(t) = \int_0^t e^{-a\tau} e^{-at+a\tau} d\tau = e^{-at} \int_0^t d\tau = t \ e^{-at} \ \ (= t \ f_1(t) \ ) \ .$$

Obraz této funkce mňčeme vypočítat podle pravidla z př. 2.22

$$\mathcal{F}[\ f_1(t) \ * \ f_1(t) \ ] = i \ \frac{d \ \mathcal{F}[f_1(t)]}{du} = i \ \frac{-i}{(a+iu)^2} = \frac{1}{(a+iu)^2} \ .$$

Stejný výsledek dostaneme podle pravidla pro obraz konvolutorního součinu

$$\mathcal{F}[\ f_1(t) \ * \ f_1(t) \ ] = \mathcal{F}[\ f_1(t) \ ] \ \mathcal{F}[\ f_1(t) \ ] = \frac{1}{a+iu} \ \frac{1}{a+iu} \ .$$

3. Použití Fourierovy transformace

Dohoda o označení : V této kapitole budeme označovat proměnnou v zobrazované funkci písmenem x , protože v aplikacích často znamená polohovou souřadnici.

Použití Fourierovy transformace při řešení obyčejných diferenciálních rovnic je založeno na vlastnosti obrazu derivace, která byla odvozena v př. 2.30. Podle této vlastnosti zobrazená rovnice již neobsahuje derivace a obraz hledané funkce můžeme vyjádřit. Problémem ovšem je nalezení originálu.

Při řešení parciálních diferenciálních rovnic je možné najít Fourierův obraz vzhledem k jedné proměnné a druhou proměnnou chápat jako parametr. Pro obraz derivace funkce $f(x,s)$ podle parametru s platí

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\right] = \frac{\partial F(u,s)}{\partial s} \ .$$

Po zobrazení parciální diferenciální rovnice dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro proměnnou s , kde naopak proměnnou u chápeme jako parametr.

Bohužel podmínky zobrazitelnosti (předpoklady věty na str. 5, především požadavek absolutní konvergence integrálu) značně omezují použitelnost Fourierovy transformace.

3.1 Najděte originál k funkci $F(u) = \dfrac{\cos 2u}{u^2+a^2}$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Nejprve rozložíme racionální lomenou funkci na parciální zlomky a upravíme

$$\frac{1}{u^2+a^2} = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{u-ai} - \frac{1}{u+ai}\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+iu} - \frac{1}{a-ui}\right) \ .$$

K těmto jednoduchým funkcím najdeme originály na základě známých obrazů (viz př. 1.11 a 1.12)

$$f^*(x) = \frac{1}{2a}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{2a}\ e^{-a|x|} \ .$$

Daný obraz je však ještě vynásobený funkcí $\cos 2u = \frac{1}{2}(e^{2ui} + e^{-2ui})$, takže podle př. 2.18 dostaneme ve výsledku posunuté funkce

$$f(x) = \frac{1}{4a}\left(e^{-a|x+2|} + e^{-a|x-2|}\right) .$$

3.2 Pro $a \in \mathcal{R}^+$, $b \in \mathcal{R}^+$, $a \neq b$ najděte originál k funkci $F(u) = \dfrac{1}{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}$.

Řešení : Můžeme využít znalost obrazu z př. 1.13 a rozložit daný zlomek na rozdíl zlomků

$$\frac{1}{(u^2+a^2)(u^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{u^2+a^2} - \frac{1}{u^2+b^2}\right) .$$

K oběma zlomkům najdeme snadno podle př. 1.13 originály, takže

$$f(x) = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a|x|}}{2a} - \frac{e^{-b|x|}}{2b}\right) .$$

3.3 Pro $b \in \mathcal{R}^+$ najděte originál k funkci $F(u) = e^{-b^2u^2}$.

Řešení : Můžeme využít znalost obrazu z př. 2.2 , kde položíme $b^2 = \dfrac{1}{4a^2}$ neboli $a = \dfrac{1}{2b}$. Platí tedy

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{4b^2}}\right] = 2b\,\sqrt{\pi}\,e^{-b^2u^2} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-b^2u^2} = \frac{1}{2b\,\sqrt{\pi}}\,\mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{4b^2}}\right] .$$

Odtud již dostaneme výsledek

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-b^2u^2}] = \frac{1}{2b\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{4b^2}} .$$

3.4 Pomocí Fourierovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + 4\, a^4 y = h_3(x)\ ,\ a \in \mathcal{R}^+\ ,$$

která popisuje průhyb nekonečného nosníku na pružném podkladě při zatížení, které je popsáno funkcí $h_3(x)$ (viz př 1.21 s hodnotou konstanty $a = 1$).
Nezávisle proměnná x označuje polohovou souřadnici bodu a hodnota $y(x)$ označuje výchylku v tomto bodě. Výchylka $y(x)$ musí být spojitá i s derivacemi do 3. řádu a blížit se k nule pro $|x| \to +\infty$.

Řešení : Za uvedených podmínek je možné danou diferenciální rovnici zobrazit ve Fourierově transformaci. Obraz hledané funkce $y(x)$ označíme $\mathcal{F}[y(x)] = Y(u)$ a obraz funkce $h_3(x)$ je podle př. 1.21

$$\mathcal{F}[h_3(x)] = \frac{2\ \sin u}{u}\ .$$

Pro obraz derivace platí podle př. 2.30 $\mathcal{F}[y^{(4)}] = (iu)^4 Y(u) = u^4 Y(u)$.
Po zobrazení dané diferenciální rovnice dostaneme

$$(u^4 + 4a^4)\ Y(u) = \frac{2\ \sin u}{u} \qquad \Rightarrow \quad Y(u) = \frac{2\ \sin u}{u(u^4 + 4a^4)}\ .$$

Nejprve rozložíme funkci $Y_1(u) = \dfrac{1}{u(u^4 + 4a^4)}$ na parciální zlomky.
Kořeny jmenovatele označíme $u_0 = 0$, $u_1 = a + ia$, $u_2 = a - ia$, $u_3 = -a + ia$, $u_4 = -a - ia$ a odpovídající koeficienty v rozkladu můžeme vypočítat pomocí reziduí a použitím l'Hospitalova pravidla

$$c_k = \lim_{u \to u_k} \frac{u - u_k}{u(u^4 + 4a^4)} = \lim_{u \to u_k} \frac{1}{5\ u^4 + 4a^4} = \frac{1}{5u_k^4 + 4a^4}\ .$$

Dosazením dostaneme
$c_0 = \dfrac{1}{4a^4}$, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \dfrac{1}{5(-4a^4) + 4a^4} = -\dfrac{1}{16\ a^4}$.
Pro první zlomek najdeme originál podle výsledku př. 1.21 (i s násobkem $2\ \sin u$)

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{4a^4}\ \frac{2\ \sin u}{u}\right] = \frac{1}{4a^4}\ h_3(x)\ .$$

Pro zbývající zlomky najdeme originály (bez koeficientů a bez násobku $2\ \sin u$)

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{u-a-ia}\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{iu-ia+a}\right]=i\ e^{iax}f_1(x)\quad \text{viz př. } 2.6\ ,$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{u-a+ia}\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-i}{-iu+ia+a}\right]=-i\ e^{iax}f_2(x)\quad \text{viz př. } 2.7\ ,$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{u+a-ia}\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{iu+ia+a}\right]=i\ e^{-iax}f_1(x)\quad \text{viz př. } 2.8\ ,$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{u+a+ia}\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-i}{-iu-ia+a}\right]=-i\ e^{-iax}f_2(x)\quad \text{viz př. } 2.9\ .$$

Sečtením 1. a 3. originálu dostaneme $i\ f_1(x)\ 2\ \cos ax$, sečtením 2. a 4. originálu dostaneme $-i\ f_2(x)\ 2\ \cos ax$.

Původní obraz je však ještě vynásobený konstantou $\dfrac{-1}{16\ a^4}$ a funkcí $2\ \sin u=\dfrac{1}{i}\,(e^{iu}-e^{-iu})$, takže podle př. 2.18 jsou v konečném výsledku posunuté funkce :

$$y(x)=\frac{1}{8a^4}[2\ h_3(x)-f_1(x+1)\cos a(x+1)+f_2(x+1)\cos a(x+1)+$$
$$+f_1(x-1)\cos a(x-1)-f_2(x-1)\cos a(x-1)]\ .$$

Vzhledem k definicím funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ platí

$x<-1 \quad\Rightarrow\quad h_3(x)=f_1(x-1)=f_1(x+1)=0$, takže

$$y(x)=\frac{1}{8a^4}[f_2(x+1)\cos a(x+1)-f_2(x-1)\cos a(x-1)]\ ;$$

$x>1 \quad\Rightarrow\quad h_3(x)=f_2(x-1)=f_2(x+1)=0$, takže

$$y(x)=\frac{1}{8a^4}[f_1(x-1)\cos a(x-1)-f_1(x+1)\cos a(x+1)]\ ;$$

$|x|<1 \quad\Rightarrow\quad h_3(x)=1\ \wedge\ f_1(x-1)=f_2(x+1)=0$, takže

$$y(x)=\frac{1}{8a^4}[2-f_1(x+1)\cos a(x+1)-f_2(x-1)\cos a(x-1)].$$

3.5 Pomocí Fourierovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + 4\,a^4 y = f_3(x)\ ,\ a \in \mathcal{R}^+\ ,$$

která popisuje jako v předcházejícím příkladě průhyb nekonečného nosníku na pružném podkladě při zatížení, které je popsáno funkcí typu $f_3(x)$ (viz př 1.13 s dosazenou konstantou $a = 1$).

Řešení : Danou diferenciální rovnici zobrazíme ve Fourierově transformaci a dostaneme podobně jako v minulém příkladě

$$(u^4 + 4a^4)\ Y(u) = \frac{2}{u^2+1} \qquad \Rightarrow \quad Y(u) = \frac{2}{(u^2+1)(u^4+4a^4)}\ .$$

Nejprve rozložíme funkci $Y(u) = \dfrac{2}{(u^2+1)(u^4+4a^4)}$ na parciální zlomky.

Kořeny jmenovatele označíme $u_1 = a + ia,\ u_2 = a - ia,\ u_3 = -a + ia,$ $u_4 = -a - ia, u_5 = i,\ u_6 = -i$ a odpovídající koeficienty v rozkladu můžeme vypočítat pomocí reziduí a použitím l'Hospitalova pravidla

$$c_k = \lim_{u\to u_k} \frac{2(u-u_k)}{(u^2+1)(u^4+4a^4)} = \lim_{u\to u_k} \frac{2}{6\ u^5 + 4u^3 + 8a^4 u} = \frac{2u_k}{6\ u_k^6 + 4u_k^4 + 8a^4 u_k^2}\ .$$

Dosazením dostaneme

$$c_1 = \frac{2a(1+i)}{-24a^6 2i - 16a^4 + 8a^6 2i} = -\frac{1+i}{8a^3(1+2a^2 i)} = -\frac{1+2a^2 + i(1-2a^2)}{8a^3(1+4a^4)}\ ,$$

$$c_2 = \frac{2a(1-i)}{24a^6 2i - 16a^4 - 8a^6 2i} = -\frac{1-i}{8a^3(1-2a^2 i)} = -\frac{1+2a^2 - i(1-2a^2)}{8a^3(1+4a^4)}\ ,$$

$$c_3 = \frac{2a(-1+i)}{24a^6 2i - 16a^4 - 8a^6 2i} = \frac{1+i}{8a^3(1-2a^2 i)} = \frac{1+2a^2 - i(1-2a^2)}{8a^3(1+4a^4)}\ ,$$

$$c_4 = \frac{-2a(1+i)}{-24a^6 2i - 16a^4 + 8a^6 2i} = \frac{1+i}{8a^3(1+2a^2 i)} = \frac{1+2a^2 + i(1-2a^2)}{8a^3(1+4a^4)}\ ,$$

$$c_5 = \frac{2i}{-6+4-8a^4} = \frac{-i}{1+4a^4}\ , \qquad c_6 = \frac{-2i}{-6+4-8a^4} = \frac{i}{1+4a^4}\ .$$

Pro první čtyři zlomky najdeme originály jako v předcházejícím příkladě a zbývající dva podle výsledku př. 1.13

$$y(x) = \frac{1}{8a^3}\,\frac{1}{1+4a^4}\Big\{\,[-(1+2a^2) - i(1-2a^2)]i\;e^{iat}f_1(x) +$$
$$+[(1+2a^2) - i(1-2a^2)](-i)\;e^{iat}f_2(x) +$$
$$+[(1+2a^2) - i(1-2a^2)]i\;e^{-iat}f_1(x) +$$
$$+[-(1+2a^2) - i(1-2a^2)](-i)\;e^{-iat}f_2(x) + 8a^3e^{-|x|}\,\Big\} =$$
$$= \frac{1}{8a^3}\,\frac{1}{1+4a^4}\Big\{\,[(1-2a^2) - i(1+2a^2)]\;e^{iat}f_1(x) +$$
$$+[(1-2a^2) + i(1+2a^2)]\;e^{iat}f_2(x) +$$
$$+[(1-2a^2) + i(1+2a^2)]\;e^{-iat}f_1(x) +$$
$$+[(1-2a^2) - i(1+2a^2)]\;e^{-iat}f_2(x) + 8a^3e^{-|x|}\,\Big\}\ .$$

Spojením 1. a 3. části a 2. a 4. části dostaneme

$$y(x) = \frac{1}{4a^3}\,\frac{1}{1+4a^4}\,\Big\{(1-2a^2)\cos ax\;[f_1(x) + f_2(x)] +$$
$$+(1+2a^2)\sin ax\;[f_1(x) - f_2(x)] + 4a^3e^{-|x|}\,\Big\} =$$
$$= \frac{1}{1+4a^4}\left\{\frac{e^{-a|x|}}{4a^3}\Big[(1-2a^2)\cos ax\; + (1+2a^2)\sin a|x|\Big] + e^{-|x|}\right\}\ .$$

3.6 Pomocí Fourierovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + 4\,a^4y = f(x)\ ,\ a \in \mathcal{R}^+\ ,$$

která popisuje jako v př. 3.4 průhyb nekonečného nosníku na pružném podkladě při zatížení, které je popsáno zobrazitelnou funkcí $f(x)$.

Řešení : Po zobrazení ve Fourierově transformaci dostaneme

$$(u^4 + 4a^4)\;Y(u) = F(u) \qquad \Rightarrow \quad Y(u) = \frac{F(u)}{u^4 + 4a^4}\ ,\quad F(u) = \mathcal{F}[f(x)]\ .$$

Nejprve rozložíme funkci $Y_1(u) = \dfrac{1}{u^4 + 4a^4}$ na parciální zlomky.

Kořeny jmenovatele označíme $u_1 = a + ia,\ u_2 = a - ia,\ u_3 = -a + ia,$ $u_4 = -a - ia$ a odpovídající koeficienty v rozkladu můžeme vypočítat pomocí reziduí a použitím l'Hospitalova pravidla

$$c_k = \lim_{u \to u_k} \frac{u - u_k}{u^4 + 4a^4} = \lim_{u \to u_k} \frac{1}{4u^3} = \frac{u_k}{4\ u_k^4} = \frac{u_k}{-16a^4}\ .$$

Pro jednotlivé zlomky vyjádříme originály (bez koeficientů) stejně jako v př. 3.4.
Pro originál $y_1(x)$ (který je řešením homogenní lineární rovnice) dostaneme

$$y_1(x) = -\frac{1}{16a^3}\ \Big[\ (1+i)i\ e^{iax} f_1(x) - (1-i)i\ e^{iax} f_2(x) +$$

$$+(-1+i)i\ e^{-iax} f_1(x) - (-1-i)i\ e^{-iax} f_2(x)\ \Big]\ =$$

$$= \frac{1}{16a^3}\ \Big[\ (1-i)\ e^{iax} f_1(x) + (1+i)\ e^{iax} f_2(x) +$$

$$+(1+i)\ e^{-iax} f_1(x) + (1-i)\ e^{-iax} f_2(x)\ \Big] =$$

$$= \frac{1}{8a^3}\ \left[(\cos ax + \sin ax)\ f_1(x) + (\cos ax - \sin ax)\ f_2(x)\right] =$$

$$= \frac{e^{-a|x|}}{8a^3}\ \left(\ \cos ax + \sin a|x|\ \right)\ .$$

Výsledné řešení můžeme zapsat pomocí konvolutorního součinu

$$y(x) = y_1(x)\ *\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)\ f(x-t)\ dt =$$

$$= \frac{1}{8a^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} (\cos at + \sin a|t|)\ f(x-t)\ dt\ .$$

3.7 Pomocí Fourierovy transformace řešte Cauchyovu úlohu, tj. najděte funkci $y(t,x)$, která pro $t \in (0,+\infty)$ a $x \in (-\infty,+\infty)$ splňuje parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \, \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \ , \ a \in \mathcal{R}^+ \ ,$$

a počáteční podmínky $\lim\limits_{t \to 0+} y(t,x) = y_1(x)$ a $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\partial y(t,x)}{\partial t} = y_2(x)$.

Funkce $y(t,x)$ musí být spojitá a i se svou parciální derivací $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ zobrazitelná vzhledem k proměnné x . Rovněž funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ musí být zobrazitelné. Kromě toho musí být splněny některé další požadavky nutné k existenci řešení dané úlohy.

Řešení této úlohy například popisuje proud nebo napětí v ideálním nekonečně dlouhém vedení. Nezávisle proměnná t označuje čas a nezávisle proměnná x je polohová souřadnice ve zkoumaném místě.

Řešení : Danou diferenciální rovnici zobrazíme ve Fourierově transformaci vzhledem k proměnné x , kde proměnnou t budeme chápat jako parametr. Označíme $\mathcal{F}[y(t,x)] = Y(t,u)$ obraz hledané funkce.

Protože podle př. 2.30 $\mathcal{F}\left[\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\right] = -u^2 Y(t,u)$, dostaneme pro obraz $Y(t,u)$ vzhledem k proměnné t obyčejnou homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty (kde u chápeme jako parametr):

$$\frac{d^2 \ Y(t,u)}{dt^2} + a^2 \ u^2 \ Y(t,u) = 0$$

s počátečními podmínkami

$Y(0,u) = \mathcal{F}[y_1(x)] = Y_1(u)$, $Y'(0,u) = \mathcal{F}[y_2(x)] = Y_2(u)$.

Obecné řešení této rovnice v exponenciálním tvaru je

$Y(t,u) = C_1 e^{iaut} + C_2 e^{-iaut}$ a z počátečních podmínek vyjde

$$Y_1(u) = C_1 + C_2 \ , \quad Y_2(u) = iau(C_1 - C_2) \ .$$

Odtud dostaneme

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[Y_1(u) + \frac{Y_2(u)}{iau}\right], \quad C_2 = \frac{1}{2}\left[Y_1(u) - \frac{Y_2(u)}{iau}\right],$$

$$Y(t,u) = \frac{1}{2}\left[Y_1(u)\ e^{iaut} + Y_1(u)\ e^{-iaut}\right] + \frac{1}{2a}\left[\frac{Y_2(u)}{iu}e^{iaut} - \frac{Y_2(u)}{iu}\ e^{-iaut}\right].$$

Originál k této funkci dostaneme podle vlastností v př. 2.18 a 2.37

$$y(t,x) = \frac{1}{2}\left[y_1(x+at) + y_1(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at} f_2(\xi)\ d\xi - \int_0^{x-at} f_2(\xi) d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ \left[y_1(x+at) + y_1(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f_2(\xi)\ d\xi\ .$$

Tento výsledek se nazývá d'Alembertův vzorec.

3.8 Pomocí Fourierovy transformace řešte Cauchyovu úlohu, tj. najděte funkci $y(t,x)$, která pro $t \in (0,+\infty)$ a $x \in (-\infty,+\infty)$ splňuje parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = a^2\ \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\ \ (\ a \in \mathcal{R}^+\ )$$

a splňuje počáteční podmínku $\lim\limits_{t\to 0+} y(t,x) = y_1(x)$.

Funkce $y(t,x)$ musí být spojitá a i se svou parciální derivací $\frac{\partial y}{\partial x}$ zobrazitelná vzhledem k proměnné x . Rovněž funkce $y_1(x)$ musí být zobrazitelná. Kromě toho musí být splněny některé další požadavky nutné k existenci řešení dané úlohy.

Tato úloha popisuje například teplotní pole nekonečně dlouhé tepelně izolované tyče zanedbatelného průměru. Nezávisle proměnná t označuje čas, nezávisle proměnná x je polohová souřadnice ve zkoumaném místě a hodnota funkce $y(t,x)$ znamená teplotu v daném místě a v daném čase.

Řešení : Danou diferenciální rovnici zobrazíme ve Fourierově transformaci vzhledem k proměnné x , kde proměnnou t budeme chápat jako parametr. Označíme $\mathcal{F}[y(t,x)] = Y(t,u)$ obraz hledané funkce. Protože podle př. 2.30 $\mathcal{F}\left[\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\right] = -u^2 Y(t,u)$, dostaneme pro obraz $Y(t,u)$ obyčejnou lineární diferenciální rovnici 1. řádu vzhledem k proměnné t (s parametrem u)

$$\frac{d\,Y(t,u)}{dt} = -a^2\ u^2\ Y(t,u)$$

s počáteční podmínkou $Y(0,u) = \mathcal{F}[y_1(x)] = Y_1(u)$.
Snadno vypočítáme řešení této rovnice $Y(t,u) = Y_1(u)\ e^{-a^2u^2t}$.
Nejprve podle výsledku př. 3.3 (pro $b^2 = a^2t$) najdeme originál

$$\mathcal{F}[e^{-a^2t\ u^2}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\ t}}\ e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\ .$$

Výsledné řešení vyjádříme konvolutorním součinem

$$y(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\ t}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(\xi)\ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi\ .$$

4. Laplaceova transformace

V této a v následujících kapitolách budeme názvem Laplaceova transformace rozumět jednostrannou Laplaceovu integrální transformaci a budeme vycházet z určitých dohodnutých omezení pro zobrazované funkce f .

Definice : Funkce f reálné proměnné t , která pro $t < 0$ splňuje podmínku $f(t) = 0$, se nazývá **jednostranná funkce.**

Definice : Jestliže jednostranná funkce f neroste rychleji než exponenciální funkce, tj. jestliže existuje $x_1 \in \mathcal{R}$ a $M \in \mathcal{R}^+$, aby pro všechna $t \geq 0$ platilo $|f(t)| < M\ e^{x_1 t}$, potom se funkce f nazývá **funkce exponenciálního řádu**.

Jestliže existuje reálné číslo x_1 v uvedené definici, potom požadovanou podmínku splňuje také každé $x > x_1$, protože pro tato x platí $e^{x_1 t} < e^{xt}$.

Jestliže existuje infimum množiny reálných čísel x_1 z předcházející definice, budeme je označovat ξ_0 .

Definice : Jednostranná funkce f reálné proměnné t , která je exponenciálního řádu a splňuje Dirichletovy podmínky v libovolném intervalu (a, b) (viz kap. 1, str. 5) se nazývá (v této sbírce) **zobrazitelná funkce v Laplaceově transformaci**.

Tato definice zdůrazňuje souvislost s Fourierovou transformací, ale uvádí zbytečně silné podmínky, takže se poněkud zužuje třída zobrazitelných funkcí - nebylo by třeba požadovat splnění 2. Dirichletovy podmínky.

Definice : Jestliže funkce f je zobrazitelná v Laplaceově transformaci, potom se funkce F komplexní proměnné p , definovaná integrálem $F(p) = \int_0^\infty f(t)\ e^{-pt} dt$ nazývá **Laplaceův obraz funkce** f a označuje se $\mathcal{L}[f(t)]$ nebo $\mathcal{L}f$.

Definici je možné snadno zobecnit na komplexní funkci reálné proměnné; zobrazujeme samostatně reálnou a imaginární část a požadované podmínky potom musí splňovat reálná i imaginární část funkce.

Protože pro jednostrannou funkci exponenciálního řádu existuje aspoň jedno reálné číslo x_1 , které splňuje podmínku definice, musí pro nevlastní integrál definující Laplaceňv obraz platit

$$\int_0^\infty |\ f(t)\ e^{-pt}|\ dt = \int_0^\infty |\ f(t)\ ||\ e^{-\mathrm{Re}\,p\ t}\ |\ |\ e^{-i\,\mathrm{Im}\,p\ t}\ |\ dt \leq$$

$$\leq\ M \int_0^\infty e^{x_1 t} e^{-\mathrm{Re}\,p\ t}\ dt =\ M \int_0^\infty e^{(x_1 - \mathrm{Re}\,p)t}\ dt\ .$$

Podle srovnávacího kritéria definiční integrál konverguje stejnoměrně a absolutně vzhledem k parametru p pro $\mathrm{Re}\,p \geq x_1$. Jestliže existuje infimum ξ_0 , definiční integrál konverguje stejnoměrně a absolutně pro $\mathrm{Re}\,p > \xi_0$. V této oblasti (polorovině) je tedy Laplaceův obraz $F(p)$ holomorfní funkce komplexní proměnné p a číslo ξ_0 se nazývá **úsečka konvergence** .

Jestliže infimum ξ_0 neexistuje, je obraz $F(p)$ holomorfní funkce v celé Gaussově rovině.

Pro $x > \xi_0$ můžeme Laplaceův obraz chápat také jako Fourierův obraz jednostranné funkce $f(t)\ e^{-xt}$, kde položíme $x + iu = p$. Jestliže $f(t)$ splňuje Dirichletovy podmínky, potom také funkce $f(t)\ e^{-xt}$ splňuje Dirichletovy podmínky. Platí tedy

$$\mathcal{F}[f(t)\ e^{-xt}] = \int_0^\infty f(t)\ e^{-xt} e^{-iut} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(x+iu)t} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt\ .$$

Úmluva : Pro jednoduchost budeme v Laplaceově transformaci všechny zobrazované funkce $f(t)$ zapisovat obvyklým způsobem, ale budeme je vždy chápat jako jednostranné funkce, které splňují třetí Dirichletovu podmínku. Např. zápisem funkce $f(t) = e^t$ budeme rozumět funkci

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro}\ \ t < 0\ , \\ \frac{1}{2} & \text{pro}\ \ t = 0\ , \\ e^t & \text{pro}\ \ t > 0\ . \end{cases}$$

Zvláště zápisem $1(t)$ budeme rozumět funkci

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro}\ \ t < 0\ , \\ \frac{1}{2} & \text{pro}\ \ t = 0\ , \\ 1 & \text{pro}\ \ t > 0\ . \end{cases}$$

V příkladech 4. 1 - 4. 14 rozhodněte , zda jsou dané funkce zobrazitelné v Laplaceově transformaci. V kladném případě vypočítejte podle definice jejich Laplaceovy obrazy a určete jejich úsečku absolutní konvergence.

4.1.

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \ , \\ \frac{1}{2} & \text{pro } \ t = 0 \ , \\ 1 & \text{pro } \ t > 0 \ . \end{cases}$$

Řešení : Jednostranná funkce a její derivace mají jediný bod nespojitosti $t = 0$, ve kterém existují limity zprava a zleva. Protože $\lim\limits_{t \to 0-} f(t) = 0$ a $\lim\limits_{t \to 0+} f(t) = 1$, jsou splněny všechny Dirichletovy podmínky. Výpočtem se snadno zjistí, že $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ absolutně konverguje pro libovolné $x > 0$, takže úsečka konvergence je $\xi_0 = 0$.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \ .$$

4.2.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \ \vee \ t > 1 \ , \\ \frac{1}{2} & \text{pro } \ t = 0 \ \vee \ t = 1 \ , \\ 1 & \text{pro } \ t \in (0, 1) \ . \end{cases}$$

Řešení : Daná funkce splňuje stejně jako v předcházejícím případě Dirichletovy podmínky. Podmínka pro funkci exponenciálního řádu je splněna pro libovolné $x_1 \in \mathcal{R}$. Laplaceův obraz se redukuje na určitý integrál, který pro $p \neq 0$ snadno vypočítáme

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\ e^{-pt} dt = \int_0^1 e^{-pt} dt = -\frac{1}{p}(e^{-p} - e^0) = \frac{1 - e^{-p}}{p} \ .$$

Pro $p = 0$ vyjde $F(0) = \int_0^1 dt = 1$ a současně platí $\lim\limits_{p \to 0} F(p) = 1$, takže definiční integrál konverguje v celé Gaussově rovině.

4.3. $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathcal{C}$.

Řešení : Funkci chápeme podle úmluvy jako jednostrannou, takže má jediný bod nespojitosti a splňuje Dirichletovy podmínky. Je zřejmě exponenciálního řádu (stačí volit $x_1 > \operatorname{Re} a = \xi_0$). Snadno vypočítáme

$$\int_0^\infty e^{at} e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{at-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}\, dt = \frac{1}{p-a} \ .$$

4.4. $f(t) = \frac{1}{t}$.

Řešení : Daná funkce není zobrazitelná, protože nesplňuje první Dirichletovu podmínku (neexistuje vlastní limita $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t}$).

4.5. $f(t) = e^{t^2}$.

Řešení : Funkce není zobrazitelná, protože není exponenciálního řádu. Muselo by existovat $x_1 \in \mathcal{R}$ a $M \in \mathcal{R}^+$, aby platilo

$$e^{t^2} \le M\ e^{x_1 t} = e^{\ln M + x_1 t} \ , \quad \text{neboli} \quad t^2 \le \ln M + x_1 t \ .$$

Tato nerovnost není splněna pro $t > t_1$, kde t_1 je kladný kořen kvadratické rovnice $t^2 - x_1 t - \ln M = 0$.

4.6. $f(t) = t^n$, kde $n \in \mathcal{N}$.

Řešení : Daná funkce i její derivace jsou spojité funkce. Ukážeme, že funkce $f(t) = t^n$ je exponenciálního řádu. Pro $t > 0$ má platit

$$t^n \le M\ e^{x_1 t} \quad \Rightarrow \qquad M \ge \frac{t^n}{e^{x_1 t}} = g(t) \ .$$

Funkce $g(t)$ je spojitá, $g(0) = 0$ a $(n+1)$-násobným použitím l'Hospitalova pravidla dostaneme $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$. Přitom derivace $g'(t) = nt^{n-1}e^{-x_1 t} - t^n x_1 e^{-x_1 t} = t^{n-1}e^{-x_1 t}(n - tx_1) = 0$ pro $t = \dfrac{n}{x_1}$.

V tomto bodě tedy nastává maximum funkce $g(t)$ a pro libovolné $x_1 > 0$ stačí volit za M tuto maximální hodnotu. Zřejmě úsečka konvergence je $\xi_0 = 0$.

Výpočet obrazu pro $\operatorname{Re} p > 0$ provedeme opakovaně metodou per partes

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} t^n e^{-pt} \right]_0^\infty + \frac{n}{p} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-pt} dt = \frac{n}{p}\ \mathcal{L}[t^{n-1}] \ .$$

Odtud $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n\,!}{p^n}$.

Jestliže funkce $f_1(t)$ a $f_2(t)$ jsou zobrazitelné v Laplaceově transformaci, potom pro libovolné $c_1 \in \mathcal{C}$, $c_2 \in \mathcal{C}$ platí $\mathcal{L}\,[\; c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)\;] =$ $= c_1\mathcal{L}[\; f_1(t)\;] + c_2\mathcal{L}[\; f_2(t)\;]$. Říkáme, že Laplaceova transformace je lineární.

4.7. $f(t) = \cos t$.

Řešení : Zobrazovaná jednostranná funkce splňuje všechny Dirichletovy podmínky a je exponenciálního řádu ($M = 1,\ x_1 > 0$). Zřejmě úsečka konvergence je $\xi_0 = 0$.
Podle vyjádření funkce $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ najdeme podle výsledku příkladu 4. 3

$$\mathcal{L}[\;\cos t\;] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[\;e^{it}\;] + \mathcal{L}[\;e^{-it}\;]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}\ .$$

4.8. $f(t) = \sin t$.

Výsledek : Funkce je zobrazitelná, úsečka konvergence je $\xi_0 = 0$ a $\mathcal{L}[\;\sin t\;] = \dfrac{1}{p^2+1}$.

4.9. $f(t) = \cos 2t$.

Výsledek : Funkce je zobrazitelná, úsečka konvergence je $\xi_0 = 0$ a $\mathcal{L}[\;\cos 2t\;] = \dfrac{p}{p^2+4}$.

4.10. $f(t) = \sin\, \frac{t}{2}$.

Výsledek : Funkce je zobrazitelná, úsečka konvergence je $\xi_0 = 0$ a $\mathcal{L}[\;\sin\, \dfrac{t}{2}\;] = \dfrac{2}{4p^2+1}$.

4.11. $f(t) = \cos^2 t$.

Řešení : Použijeme vyjádření $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$. Podle předcházejících příkladů jsou obě funkce zobrazitelné a úsečka konvergence je $\xi_0 = 0$.

$$\mathcal{L}[\ \cos^2 t\ ] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[\ 1(t)\ ] + \mathcal{L}[\ \cos 2t\ ]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}\ .$$

4.12. $f(t) = \sin^2 t$.

Výsledek : Funkce je zobrazitelná, úsečka konvergence je $\xi_0 = 0$ a $\mathcal{L}[\ \sin^2 t\ ] = \dfrac{2}{p(p^2+4)}$.

4.13. $f(t) = \sinh t$.

Řešení : Použijeme vyjádření $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Obě exponenciální funkce splňují Dirichletovy podmínky a jsou exponenciálního řádu. Zřejmě úsečka konvergence je $\xi_0 = 1$.

$$\mathcal{L}[\ \sinh t\ ] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[\ e^t\ ] - \mathcal{L}[\ e^{-t}\ ]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1}\ .$$

4.14. $f(t) = \cosh t$.

Výsledek : Funkce je zobrazitelná, úsečka konvergence je $\xi_0 = 1$ a $\mathcal{L}[\ \cosh t\ ] = \dfrac{p}{p^2-1}$.

5. Vlastnosti Laplaceovy transformace

Složitější obrazy již nebudeme určovat podle definice, ale na základě vlastností, které budou v této kapitole odvozeny ve formě úloh. V ostatních úlohách se potom tyto vlastnosti používají k nalezení dalších obrazů. Vzhledem k příbuznosti Laplaceovy a Fourierovy transformace má pochopitelně Laplaceova i Fourierova transformace velmi podobné vlastností.

Protože vycházíme z obrazů funkcí, které jsme ve 4. kapitole vypočítali a nalezli jsme pro ně úsečku konvergence, nebudeme již podmínky konvergence obrazů zapisovat. Kromě toho z teorie funkcí komplexní proměnné je známo, že definiční obor každé funkce, která je holomorfní v určité oblasti, lze rozšiřovat. Takže všechny nalezené obrazy (pokud nemají složitější singulární body než poly) můžeme chápat jako holomorfní funkce komplexní proměnné definované v celé Gaussově rovině s výjimkou těchto singulárních bodů.

5.1 Dokažte, že pro $a \in \mathcal{R}^+$ platí : Jestliže $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, potom

$$\boxed{\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\, F\left(\frac{p}{a}\right) .}$$

Řešení : V definičním integrálu provedeme substituci $at = \tau$, $dt = \frac{d\tau}{a}$, takže dostaneme

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{+\infty} f(at)\; e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau)\; e^{-\frac{p}{a}\tau} \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) .$$

V příkladech 5.2 - 5.8 vypočítejte na základě vlastnosti z př. 5.1 Laplaceovy obrazy daných funkcí.

5.2 $f(t) = \cos \omega t$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Na základě výsledku př. 4.7

$$\mathcal{L}[\; \cos t\;] = \frac{p}{p^2+1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}[\; \cos \omega t\;] = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2+\omega^2} .$$

5.3 $f(t) = \sinh at\ ,\ a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Na základě výsledku př. 4.13

$$\mathcal{L}[\ \sinh t\ ] = \frac{1}{p^2 - 1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}[\ \sinh at\ ] = \frac{1}{a}\ \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 1} = \frac{a}{p^2 - a^2}\ .$$

5.4 $f(t) = \sin \omega t\ ,\ \omega \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : Podle výsledku př. 4.9 platí $\mathcal{L}[\ \sin \omega t\ ] = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

5.5 $f(t) = \cosh at\ ,\ a \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : Podle výsledku př. 4.14 platí $\mathcal{L}[\ \cosh at\ ] = \dfrac{p}{p^2 - a^2}$.

5.6 $f(t) = \cos^2 \omega t\ ,\ \omega \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : Na základě výsledku př. 4.11 dostanete
$\mathcal{L}[\ \cos^2 \omega t\ ] = \dfrac{p^2 + 2\ \omega^2}{p(p^2 + 4\ \omega^2)}$.

5.8 $f(t) = \sin^2 \omega t\ ,\ \omega \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : Na základě výsledku př. 4.12 dostanete
$\mathcal{L}[\ \sin^2 \omega t\ ] = \dfrac{2\ \omega^2}{p(p^2 + 4\ \omega^2)}$.

5.9 Dokažte, že pro $a \in \mathcal{C}$ platí : Jestliže $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, potom

$$\boxed{\mathcal{L}[\, e^{at} f(t)\,]\ =\ F(p - a)\ .}$$

Řešení : Počítáme Laplaceův obraz podle definice

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-(p-a)t} dt = F(p - a)\ .$$

V příkladech 5.10 - 5.17 vypočítejte na základě vlastnosti z př. 5.9 Laplaceovy obrazy daných funkcí.

5.10 $f(t) = e^{-2t} \cos t$.

Řešení : Na základě výsledku př. 4.7 dostaneme

$$\mathcal{L}[\, \cos t\,] = \frac{p}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\, e^{-2t} \cos t\,] = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} = \frac{p+2}{p^2+4p+5} \, .$$

5.11 $f(t) = e^{3t} \sinh t$.

Řešení : Na základě výsledku př. 4.13 dostaneme

$$\mathcal{L}[\, \sinh t\,] = \frac{1}{p^2-1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\, e^{3t} \sinh t\,] = \frac{1}{(p-3)^2-1} = \frac{1}{p^2-6p+8} \, .$$

5.12 $f(t) = e^{-t} \sin 2t$.

Výsledek : Na základě výsledku př. 5.4 dostanete

$$\mathcal{L}[\, e^{-t} \sin 2t\,] = \frac{2}{p^2+2p+5} \, .$$

5.13 $f(t) = e^{-t} \cosh 2t$.

Výsledek : Na základě výsledku př. 5.5 dostanete

$$\mathcal{L}[\, e^{-t} \cosh 2t\,] = \frac{p+1}{p^2+2p-3} \, .$$

5.14 $f(t) = e^{-at} \cos \omega t$, $a \in \mathcal{C}$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5.2 dostaneme

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2} \Rightarrow \mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2} = \frac{p+a}{p^2+2ap+a^2+\omega^2}.$$

5.15 $f(t) = e^{at} \sinh bt$, $a \in \mathcal{C}$, $b \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5.3 dostaneme

$$\mathcal{L}[\sinh bt] = \frac{b}{p^2-b^2} \Rightarrow \mathcal{L}[e^{at} \sinh bt] = \frac{b}{(p-a)^2-b^2} = \frac{b}{p^2-2ap+a^2-b^2}.$$

Poznámka : Ověřte, že výsledek je správný i pro případ $a = b$.

5.16 $f(t) = e^{-at} \sin \omega t \;,\; a \in \mathcal{C} \;,\; \omega \in \mathcal{R}^+ \;.$

Výsledek : Na základě výsledku př. 5.4 dostanete

$$\mathcal{L}[\; e^{-at} \sin \omega t \;] = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + 2ap + a^2 + \omega^2} \;.$$

5.17 $f(t) = e^{at} \cosh bt \;,\; a \in \mathcal{C} \;,\; b \in \mathcal{R}^+ \;.$

Výsledek : Na základě výsledku př. 5.5 dostanete

$$\mathcal{L}[\; e^{at} \cosh bt \;] = \frac{p-a}{(p-a)^2 - b^2} = \frac{p-a}{p^2 - 2ap + a^2 - b^2} \;.$$

5.18 Dokažte, že pro $a \in \mathcal{R}^+$ platí : Jestliže $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, potom pro funkci $g(t) = f(t-a)$, která pro $t < a$ splňuje podmínku $g(t) = f(t-a) = 0$, platí

$$\boxed{\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[f(t-a)] \;=\; e^{-ap} F(p) \;.}$$

Řešení : V definičním integrálu provedeme substituci $t - a = \tau, dt = d\tau$

$$\mathcal{L}[\; g(t) \;] = \mathcal{L}[\; f(t-a) \;] = \int_a^{+\infty} f(t-a)\; e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau)\; e^{-p(a+\tau)} d\tau = e^{-ap} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\;\tau = e^{-ap} F(p) \;.$$

Úmluva : Funkce $g(t) = f(t-a)$ definovaná v př. 5.18 se obvykle nazývá **zpožděná funkce** a uvedený výsledek se často označuje jako **věta o translaci** .

V příkladech 5.19 - 5.29 najděte na základě vlastnosti z př. 5.18 Laplaceovy obrazy daných funkcí.

5.19 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < a \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = a \\ 1 & \text{pro } t > a \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako zpožděnou jednotkovou funkci $g_1(t) = 1(t-a)$. Podle pravidla z př. 5.18 dostaneme

$$\mathcal{L}[\ g_1(t)\ ] = e^{-ap}\mathcal{L}[\ 1(t)\ ] = \frac{e^{-ap}}{p}\ .$$

5.20 Pro $a \in \mathcal{R}^+$, $b \in \mathcal{R}^+$, $b > a$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < a \ \vee\ t > b \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = a \ \vee\ t = b \\ 1 & \text{pro } t \in (a, b) \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako rozdíl zpožděné jednotkové funkce $g_1(t) = 1(t-a)$ a zpožděné jednotkové funkce $g_2(t) = 1(t-b)$. Pro hledaný obraz dostaneme

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[g_1(t) - g_2(t)] = e^{-ap}\mathcal{L}[1(t)] - e^{-bp}\mathcal{L}[1(t)] = \frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}\ .$$

5.21 Pro $a \in \mathcal{R}^+$, $E \in \mathcal{R}^+$

$$g_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \ \vee\ t > a \\ \frac{E}{2} & \text{pro } t = 0 \ \vee\ t = a \\ E & \text{pro } t \in < 0, a > \end{cases}$$

Výsledek : $\mathcal{L}[\ g_3(t)\ ] = \dfrac{E}{p}\ (1 - e^{-ap})$.

5.22 Pro $a \in \mathcal{R}^+$, $E \in \mathcal{R}^+$, $n \in \mathcal{N}$

$$g_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; t < 0 \;\vee\; t \in (\;(2n-1)a, 2na\;) \\ \frac{E}{2} & \text{pro} \;\; t = 0 \;\vee\; t = na \\ E & \text{pro} \;\; t \in < 2(n-1)a, (2n-1)a > \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako nekonečný součet zpožděných funkcí $g_4(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_3(t-2ka) = g_3(t) + g_3(t-2a) + g_3(t-4a) + \;...$ Pro výpočet obrazu dostaneme jako součet geometrické řady s kvocientem $q = e^{-2ap}$

$$\mathcal{L}[\; g_4(t)\;] = \frac{E}{p}(1 + e^{-ap}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2ap} = \frac{E}{p}\,\frac{1 + e^{-ap}}{1 - e^{-2ap}} \;.$$

5.23

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; t < \pi \\ \sin t & \text{pro} \;\; t \geq \pi \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako zpožděnou funkci $h_1(t) =$

$= \sin(t - \pi)$. Podle výsledku př. 4.9 a pravidla z př. 5.18 dostaneme

$$\mathcal{L}[\; h_1(t)\;] = e^{-\pi p}\mathcal{L}[\; \sin t\;] = \frac{e^{-\pi p}}{p^2 + 1} \;.$$

5.24

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; t < 2\pi \\ \sin t & \text{pro} \;\; t \geq 2\pi \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako zpožděnou funkci $h_2(t) =$

$= \sin(t - 2\pi)$. Podle výsledku př. 4.9 a pravidla z př. 5.18 dostaneme

$$\mathcal{L}[\; h_2(t)\;] = e^{-2\pi p}\mathcal{L}[\; \sin t\;] = \frac{e^{-2\pi p}}{p^2 + 1} \;.$$

Poznámka : Protože pro $t \in \mathcal{R}$ platí $\sin(t - 2\pi) = \sin t$, je třeba zdůraznit rozdíl mezi obrazem zpožděné funkce $h_2(t)$ a obrazem jednostranné funkce $\sin(t - 2\pi)$.

5.25 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$h_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < a \\ \sin(t-a) & \text{pro } t \geq a \end{cases}$$

Výsledek : $\mathcal{L}[\ h_3(t)\ ] = \dfrac{e^{-ap}}{p^2+1}$.

5.26 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$h_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ -\frac{\sin a}{2} & \text{pro } t = 0 \\ \sin(t-a) & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Řešení : Daná funkce n e n í zpožděná funkce. Podle goniometrického vzorce platí $\sin(t-a) = \sin t \cos a - \cos t \sin a$, takže pro obraz dostaneme

$$\mathcal{L}[\ h_4(t)\ ] = \cos a\ \mathcal{L}[\sin t] - \sin a\ \mathcal{L}[\cos t] = \frac{\cos a - p\ \sin a}{p^2+1} \ .$$

5.27

$$h_5(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \ \vee \ t > \pi \\ \sin t & \text{pro } t \in <\ 0, \pi\ > \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme vyjádřit jako součet jednostranné funkce $\sin t$ a zpožděné funkce $h_1(t) = \sin(t - \pi)$. Podle výsledků př. 4.9 a 5.21 dostaneme

$$\mathcal{L}[\ h_5(t)\ ] = \mathcal{L}[\sin t] + e^{-\pi p}\mathcal{L}[\sin(t)] = \frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1} \ .$$

5.28 $h_6(t) = |\sin t|$.

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako nekonečný součet zpožděných funkcí $h_6(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_5(t-k\pi) = h_5(t)+h_5(t-\pi)+h_5(t-2\pi)+\ ...$ Pro výpočet obrazu dostaneme jako součet geometrické řady s kvocientem $q = e^{-\pi p}$

$$\mathcal{L}[\ h_6(t)\ ] = \frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi p} = \frac{1}{p^2+1}\ \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}\ .$$

5.29 Pro $n \in \mathcal{N}$

$$h_7(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0\ \vee\ t \in (\ (2n-1)\pi, 2n\pi\ ) \\ \sin t & \text{pro } \ t \in < 2(n-1)\pi, (2n-1)\pi > \end{cases}$$

Návod : Daná funkce je nekonečný součet zpožděných funkcí $h_6(t) = h_5(t) + h_5(t-2\pi) + h_5(t-4\pi) +\ ...$

Výsledek : $\mathcal{L}[\ h_6(t)\ ] = \dfrac{1}{p^2+1}\ \dfrac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-2\pi p}}$.

5.30

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \\ \sin t & \text{pro } \ t \in <\ 0, \frac{\pi}{2}\ > \\ 1 & \text{pro } \ t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme v intervalu $<\ 0,\pi\ >$ chápat jako rozdíl jednostranné funkce $\sin t$ a zpožděné funkci $\cos(t-\frac{\pi}{2})$. K této funkci je třeba přičíst zpožděnou jednotkovou funkci $1(t-\frac{\pi}{2})$.
Pro hledaný obraz tedy dostaneme

$$\mathcal{L}[\ f_1(t)\ ] = \mathcal{L}[\ \sin t\ ] - \mathcal{L}[\ \cos(t-\frac{\pi}{2})\ ] + \mathcal{L}[\ 1(t-\frac{\pi}{2})\ ] =$$

$$= \frac{1}{p^2+1} - \frac{p\ e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p(p^2+1)}\ .$$

5.31

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \\ 1 - \cos t & \text{pro } \ t \in < 0, \pi > \\ 2 & \text{pro } \ t > \pi \end{cases}$$

Návod : Pro $t > \pi$ platí $1 - \cos t + 1 - \cos(t - \pi) = 2$, protože $\cos(t - \pi) = \cos t \cos \pi + \sin t \sin \pi = -\cos t$.

Výsledek : $\mathcal{L}[\ f_2(t)\ ] = \dfrac{1 + e^{-\pi p}}{p(p^2 + 1)}$.

5.32 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{pro } \ t \in < 0, a \ > \\ e^{-(t-a)} - e^{-t} & \text{pro } \ t > a \end{cases}$$

Řešení : Z definice není zřejmé chování funkce v okolí $t = a$. Protože $f_3(a) = 1 - e^{-a}$ a $= \lim\limits_{t \to a+} e^{-(t-a)} - e^{-t} = e^0 - e^{-a}$, je funkce $f_3(t)$ spojitá. Danou funkci můžeme chápat jako rozdíl funkce $f_3(t)$ a zpožděné funkce $f_3(t - a)$, protože pro $t > a$ se konstanty 1 vyruší. Podle pravidla z př. 5. 18 dostaneme

$$\mathcal{L}[\ f_3(t)\ ] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{e^{-ap}}{p} + \frac{e^{-ap}}{p+1} = \frac{1 - e^{-ap}}{p(p+1)} \ .$$

5.33 Jestliže $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, potom dokažte, že platí :

$$\boxed{\mathcal{L}[\ t\, f(t)\,] = -\frac{d\ F(p)}{dp} \ .}$$

Řešení : Jestliže existuje Laplaceův obraz funkce $f(t)$, je $F(p)$ v určité oblasti holomorfní funkce, takže můžeme při derivování definičního integrálu podle parametru p derivovat uvnitř integrálu a dostaneme

$$\frac{d\ F(p)}{dp} = \int_0^\infty (-t)\ f(t)\ e^{-pt} dt = -\mathcal{L}[\ t\, f(t)\ ] \ .$$

V příkladech 5.34 - 5.56 najděte podle vlastnosti z př. 5. 33 Laplaceovy obrazy daných funkcí na základě doposud vypočítaných obrazů.

5.34 $f(t) = t$.

Řešení : $\mathcal{L}[\ 1(t)\ ] = \dfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\ t\,1(t)\ ] = -\dfrac{d}{dp}\,\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p^2}$.

5.35 $f(t) = t^2 + 2t$.

Výsledek : $\mathcal{L}[\ t^2 + 2t\ ] = 2\left(\dfrac{1}{p^3} + \dfrac{1}{p^2}\right)$.

5.36 $f(t) = t^n\ ,\ n \in \mathcal{N}$.

Výsledek : $\mathcal{L}[\ t^n\ ] = \dfrac{n\,!}{p^{n+1}}$.

5.37 $f(t) = t\ e^{at}\ ,\ \ a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : $\mathcal{L}[\ e^{at}\ ] = \dfrac{1}{p-a} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\ t\ e^{at}\ ] = \dfrac{1}{(p-a)^2}$.

Můžeme postupovat také podle pravidla z př. 5.9 a dostaneme

$\mathcal{L}[\ t\ ] = \dfrac{1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\ t\ e^{at}\ ] = \dfrac{1}{(p-a)^2}$.

5.38 $f(t) = \dfrac{t}{e^{2t}}$.

Výsledek : $\mathcal{L}\left[\dfrac{t}{e^{2t}}\right] = \mathcal{L}[\ t\,e^{-2t}\ ] = \dfrac{1}{(p+2)^2}$.

5.39 $f(t) = t^2 e^{at}\ ,\ \ a \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : $\mathcal{L}[\ t^2\,e^{at}\ ] = \dfrac{2}{(p-a)^3}$.

5.40 $f(t) = t^n e^{at}$, $a \in \mathcal{R}^+$, $n \in \mathcal{N}$.

Výsledek : $\mathcal{L}[\ t^n e^{at}\ ] = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$.

5.41 $f(t) = t\ \cos\omega t$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5. 2 dostaneme

$$\mathcal{L}[\ \cos\omega t\ ] = \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}[\ t\ \cos\omega t\ ] = -\frac{d}{dp}\,\frac{p}{p^2+\omega^2} = -\frac{p^2+\omega^2-2p^2}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}\ .$$

5.42 $f(t) = t\ \sinh at$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5. 3 dostaneme

$$\mathcal{L}[\sinh at\,] = \frac{a}{p^2-a^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\ t\ \sinh at\,] = -\frac{d}{dp}\,\frac{a}{p^2-a^2} = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}\ .$$

5.43 $f(t) = t\ \sin\omega t$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : $\mathcal{L}[\ t\ \sin\omega t\ ] = \dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$.

5.44 $f(t) = t\ \cosh at$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : $\mathcal{L}[\ t\ \cosh at\ ] = \dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$.

5.45 $f(t) = t^2\cos\omega t$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5. 41 dostaneme

$$\mathcal{L}[\ t^2 \cos \omega t\ ] = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}[\ t\ \cos \omega t\ ] = -\frac{d}{dp}\ \frac{p^2-\omega^2}{p^2+\omega^2} =$$

$$= -\frac{2p(p^2+\omega^2)^2-(p^2-\omega^2)2(p^2+\omega^2)2p}{(p^2+\omega^2)^4} =$$

$$= -\frac{2p(p^2+\omega^2)-4p(p^2-\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^3} = \frac{2p(p^2-3\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^3}\ .$$

5.46 $f(t) = t^2 \cosh at\ ,\quad a \in \mathcal{R}^+.$

Řešení : Na základě výsledku př. 5. 44 dostaneme

$$\mathcal{L}[\ t^2 \cosh at\ ] = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}[\ t\ \cosh at\ ] = -\frac{d}{dp}\ \frac{p+2+a^2}{p^2-a^2} =$$

$$= -\frac{2p(p^2-a^2)^2-(p^2+a^2)2(p^2-a^2)2p}{(p^2-a^2)^4} =$$

$$= -\frac{2p(p^2-a^2)-4p(p^2+a^2)}{(p^2-a^2)^3} = \frac{2p(p^2+3\ a^2)}{(p^2-a^2)^3}\ .$$

5.47 $f(t) = t^2 \sin \omega t\ ,\quad \omega \in \mathcal{R}^+\ .$

Výsledek : Na základě nalezeného výsledku v př. 5.43 vyjde
$\mathcal{L}[\ t^2 \sin \omega t\ ] = \dfrac{2\omega(3p^2-\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^3}.$

5.48 $f(t) = t^2 \sinh at\ ,\quad a \in \mathcal{R}^+\ .$

Výsledek : Na základě nalezného výsledku v př. 5.42 vyjde
$\mathcal{L}[\ t^2 \sinh at\ ] = \dfrac{2a(3p^2+a^2)}{(p^2-a^2)^3}.$

5.49 $f(t) = t\ e^{-at}\cos\omega t\ ,\ a \in \mathcal{C}\ ,\ \omega \in \mathcal{R}^+\ .$

Řešení : Na základě výsledku př. 5. 14 vypočítáme

$$\mathcal{L}[\ t\ e^{-at}\cos\omega t\ ] = -\frac{d}{dp}\ \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2} =$$

$$= -\frac{(p+a)^2+\omega^2-(p+a)2(p+a)}{[(p+a)^2+\omega^2]^2} = \frac{(p+a)^2-\omega^2}{[(p+a)^2+\omega^2]^2}\ .$$

Můžeme postupovat také podle pravidla z př. 5.9 a dostaneme

$$\mathcal{L}[\ t\ \cos\omega t\ ] = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}\ \Rightarrow\ \mathcal{L}[\ t\ e^{-at}\cos\omega t\ ] = \frac{(p+a)^2-\omega^2}{[(p+a)^2+\omega^2]^2}\ .$$

.

5.50 $f(t) = t\ e^{-at}\sin\omega t\ ,\ a \in \mathcal{C}\ ,\ \omega \in \mathcal{R}^+\ .$

Výsledek : Na základě výsledku př. 5.16 dostanete

$$\mathcal{L}[\ t\ e^{-at}\sin\omega t\ ] = \frac{2\omega(p+a)}{[(p+a)^2+\omega^2]^2}\ .$$

5.51 $f(t) = t\ a^t\ ,\ a \in \mathcal{R}^+\ .$

Řešení : Na základě identity $a^t = e^{\ln a\ t}$ dostaneme

$$\mathcal{L}[\ t\ e^{\ln a\, t}\ ] = -\frac{d}{dp}\ \frac{1}{p-\ln a} = \frac{1}{(p-\ln a)^2}\ .$$

5.52 Pro $E \in \mathcal{R}^+$

$$k_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro}\ \ t<0\ \vee\ t>1 \\ Et & \text{pro}\ \ t \in <0,1> \\ \frac{E}{2} & \text{pro}\ \ t=1 \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme vytvořit pomocí funkcí $f(t) = Et$ a zpožděných funkcí $f(t-1)$ a $1(t-1)$,a to $k_1(t) = f(t) - f(t-1) -$ $- E\ 1(t-1)$. Pro hledaný obraz dostaneme

$$\mathcal{L}[k_1(t)] = \mathcal{L}[Et] - \mathcal{L}[E(t-1)] - E\ \mathcal{L}[\ 1(t-1)] = \frac{E}{p^2}(1-e^{-p}-pe^{-p})\ .$$

5.53 Pro $E \in \mathcal{R}^+$ a $n \in \mathcal{N}$

$$k_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \\ E(t-n+1) & \text{pro } \ t \in < n-1, n > \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako nekonečný součet zpožděných funkcí $k_2(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k_1(t-k) = k_1(t) + k_1(t-1) + k_1(t-2) + \quad \ldots \ .$
Po zobrazení dostaneme nekonečnou řadu, ve které poznáme geometrickou řadu s kvocientem $q = e^{-p}$, jejíž součet snadno najdeme.

$$\mathcal{L}[k_2(t)] = E\,\frac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{p^2}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kp} = \frac{E}{p^2}\,\frac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{1-e^{-p}} = \frac{E}{p^2} - \frac{E\ e^{-p}}{p(1-e^{-p})}\ .$$

5.54 Pro $E \in \mathcal{R}^+$ a $n \in \mathcal{N}$

$$k_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \\ E(t-2n+2) & \text{pro } \ t \in (\ 2(n-1), 2n-1\ ) \\ -E(t-2n+1) & \text{pro } \ t \in (\ 2n-1, 2n\ ) \\ \frac{E}{2} & \text{pro } \ t = 2n-1 \\ -\frac{E}{2} & \text{pro } \ t = 2n \end{cases}$$

Výsledek : $\mathcal{L}[\ k_3(t)\ ] = \dfrac{E}{p^2}\ \dfrac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{1+e^{-p}}\ .$

5.55 Pro $E \in \mathcal{R}^+$ a $n \in \mathcal{N}$

$$k_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \\ E(t-2n+2) & \text{pro } \ t \in (\ 2(n-1), 2n-1\ ) \\ E - E(t-2n+1) & \text{pro } \ t \in (\ 2n-1, 2n\ ) \end{cases}$$

Výsledek : $\mathcal{L}[\ k_4(t)\ ] = \dfrac{E}{p^2}\ \dfrac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}\ .$

5.56 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$f_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \\ at & \text{pro } \ t \in < \ 0, \frac{1}{a} \ > \\ 1 & \text{pro } \ t > \frac{1}{a} \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme v intervalu $< \ 0, +\infty \ >$ chápat jako rozdíl jednostranné funkce at a zpožděné funkce $a(t - \frac{1}{a})$.
Pro hledaný obraz vyjde $\mathcal{L}[\ f_4(t)\ ] = \mathcal{L}[at] - \mathcal{L}[a(t - \dfrac{1}{a})] = \dfrac{a(1 - e^{-\frac{p}{a}})}{p^2}$.

5.57 Jestliže funkce $f(t)$ a $f'(t)$ jsou zobrazitelné v Laplaceově transformaci ($\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$) a funkce $f(t)$ je spojitá s případnou výjimkou v bodě $t = 0$, potom dokažte, že platí :

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(t)] \ = \ p\ F(p) - \lim_{t \to 0^+} f(t)\ .}$$

Řešení : Definiční integrál pro Laplaceův obraz funkce $f'(t)$ můžeme vzhledem ke spojitosti funkce $f(t)$ v intervalu $(0, +\infty)$ počítat metodou per partes, takže dostaneme

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)\ e^{-pt} dt = \Big[f(t)\ e^{-pt} \Big]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-pt} dt =$$

$$= - \lim_{t \to 0^+} f(t)\ e^{-pt} + p\ \mathcal{L}[f(t)]\ .$$

V př. 5.58 - 5.62 najděte podle vlastnosti z př. 5. 57 Laplaceovy obrazy derivací daných funkcí a výsledky srovnejte se známými obrazy.

5.58 $f(t) = \cos \omega t$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5.57 dostaneme

$$\mathcal{L}\ \left[\frac{d}{dt}\ \cos \omega t \right] = (\ \mathcal{L}[-\omega\ \sin \omega t] = \ )\ p\ \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \lim_{t \to 0+} \cos \omega t =$$

$$= \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} - 1 = \frac{p^2 - p^2 - \omega^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{-\omega^2}{p^2 + \omega^2} = -\omega\ \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\ .$$

5.59 $f(t) = \sin \omega t$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : Protože $\lim\limits_{t\to 0+} \sin \omega t = 0$ vyjde
$\mathcal{L}[\ \dfrac{d}{dt}\ \sin \omega t\ ] = (\ \mathcal{L}[\ \omega\ \cos \omega t\ ] =)\, \mathcal{L}[\ \omega\ \cos \omega t\ ] = \dfrac{\omega\ p}{p^2 + \omega^2}.$

5.60 $g(t) = e^{at} f(t)$, kde $a \in \mathcal{R}^+$ a $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ je obraz jednostranné funkce $f(t)$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5.57 vypočítáme
$\mathcal{L}[\ g'(t)\ ] = p\ \mathcal{L}\ [\ g(t)\ ] - \lim\limits_{t\to 0+} g(t) = p\ \mathcal{L}\ [\ a^{at} f(t)\ ] - e^0 \lim\limits_{t\to 0+} f(t) =$
$= p\ F(p-a) - \lim\limits_{t\to 0+} f(t)$.
Protože však platí pro derivaci součinu $g'(t) = a\ e^{at} f(t) + e^{at} f'(t)$, dostaneme také

$$\mathcal{L}[\ g'(t)\ ] = a\ F(p-a) + (p-a)\ F(p-a) - \lim_{t\to 0+} f(t)\ .$$

5.61 $g(t) = f[a(t-t_0)]$, kde $a \in \mathcal{R}^+$, $t_0 \in \mathcal{R}^+$ a $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ je obraz jednostranné funkce $f(t)$.

Řešení : Funkce $g(t)$ je zpožděná jednostranná funkce, takže limita $\lim\limits_{t\to 0+} g(t) = g(0) = 0$ a na základě výsledku př. 5. 57 dostaneme

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\ f(a(t-t_0))\right] = p\,\mathcal{L}[f(a(t-t_0))] = p\, e^{-t_0 p}\mathcal{L}[f(at)] = \frac{p}{a}\, e^{-t_0 p} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

5.62 Pro $\omega \in \mathcal{R}^+$, $\varphi \in \mathcal{R}^+$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < \frac{\varphi}{\omega} \\ \sin(\omega t - \varphi) & \text{pro } t \geq \frac{\varphi}{\omega} \end{cases}$$

Výsledek : $\mathcal{L}[\sin(\ \omega t - \varphi)\ ] = \dfrac{p}{\omega}\ e^{-\frac{\varphi}{\omega} p} F\left(\dfrac{p}{\omega}\right)$.

5.63 Jestliže $\mathcal{L}[\ f(t)\ ] = F(p)$, vyjádřete obraz druhé derivace $f''(t)$.

Řešení : Vypočítáme obraz derivace z první derivace

$$\mathcal{L}[\ f''(t)\ ] = \mathcal{L}[\ \frac{d}{dt}\ f'(t)\ ] = p\ \mathcal{L}[\ f'(t)\ ] - \lim_{t\to 0+} f'(t) =$$

$$= p\ \left[p\ F(p) - \lim_{t\to 0^+} f(t)\right] - \lim_{t\to 0^+} f'(t) = p^2 F(p) - p \lim_{t\to 0^+} f(t) - \lim_{t\to 0^+} f'(t)\ .$$

5.64 Ověřte pravidlo pro výpočet obrazu druhé derivace na příkladu funkce $f(t) = \cos\omega t$.

Řešení : Podle předcházejícího příkladu

$$\mathcal{L}[\ f''(t)\ ] = p^2\mathcal{L}[\ \cos\omega t\ ] - p = \frac{p^3 - p(p^2+\omega^2)}{p^2+\omega^2} = \frac{-\omega^2 p}{p^2+\omega^2}\ .$$

5.65 Jestliže $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ a existuje vlastní limita $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{f(t)}{t}$, potom dokažte, že platí :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{+\infty} F(q)\ dq\ ,}$$

kde holomorfní funkci komplexní proměnné integrujeme z bodu p po jednoduché křivce, na které $\mathrm{Re}p \to +\infty$.

Řešení : Jestliže funkce $f(t)$ je zobrazitelná, potom funkce $\dfrac{f(t)}{t}$ by nemusela splňovat podmínky zobrazitelnosti v okolí $t = 0$. Ale požadovaná existence vlastní limity $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{f(t)}{t}$ tuto možnost vylučuje. Při integraci definičního integrálu podle parametru q po požadované křivce můžeme zaměnit pořadí integrace a dostaneme

$$\int_p^{+\infty} F(q)dq = \int_p^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-qt}dt\right) dq = \int_0^{+\infty} \left(\int_p^{+\infty} f(t)e^{-qt}dq\right) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\frac{f(t)\ e^{-qt}}{-t}\right]_p^{+\infty} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\ e^{-pt}dt\ , \text{ protože } \lim_{\mathrm{Re}\, q\to +\infty} e^{-qt} = 0\ .$$

V příkladech 5.66 - 5.69 najděte podle vlastnosti z př. 5.65 Laplaceovy obrazy daných funkcí na základě doposud vypočítaných obrazů. Výsledné obrazy jsou v těchto případech funkce, které mají rozvětvovací body jako singulární body. Obor konvergence z definičního integrálu nelze v těchto případech rozšiřovat.

5.66 $f(t) = \dfrac{1-e^t}{t}$.

Řešení : Protože $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1-e^t}{t} = 1$, dostaneme na základě pravidla z př. 5.65

$$\mathcal{L}\left[\frac{1-e^t}{t}\right] = \int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q-1}\right)\,dq = \ln\frac{p-1}{p}\ .$$

5.67 $f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t}$.

Řešení : Protože $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1-\cos t}{t} = 0$, dostaneme na základě pravidla z př. 5.65

$$\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right] = \int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{q}-\frac{q}{q^2+1}\right)\,dq = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+1}{p^2}\ .$$

5.68 $f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$.

Řešení : Protože $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$, dostaneme na základě předcházejícího výsledku a pravidla z př. 5.65

$$\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t^2}\right] = \frac{1}{2}\int_p^{+\infty}\ln\frac{q^2+1}{q^2}\,dq = -\frac{1}{2}\,p\,\ln\frac{p^2+1}{p^2} + \int_p^{+\infty}\frac{dq}{q^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,p\,\ln\frac{p^2+1}{p^2} + [\,\mathrm{arctg}\,q\,]_p^{+\infty} = -\frac{1}{2}\,p\,\ln\frac{p^2+1}{p^2} + \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,p\ .$$

5.69 $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

Výsledek : $\mathcal{L}\left[\dfrac{\sin t}{t}\right] = \mathrm{arccotg}\,p$.

5.70 $f(t) = \dfrac{t - \sin t}{t^2}$.

Výsledek : $\mathcal{L}\left[\dfrac{t - \sin t}{t^2}\right] = \dfrac{1}{p} - \operatorname{arccotg} p$.

5.71 Jestliže $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, potom dokažte, že platí :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{F(p)}{p} \, .}$$

Řešení : Pro každou zobrazitelnou funkci f proměnné t existuje integrál $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$ (jako spojitá funkce horní meze). Pro jeho derivaci platí $\dfrac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\, d\tau = f(t)$ a obraz této derivace je podle předpokladu známá funkce. Proto můžeme podle pravidla z př. 5.57 vyjádřit

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = p\, \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] \, .$$

Odtud již snadno dostaneme požadovaný výsledek.

V př. 5.72 - 5.78 vypočítejte podle vlastnosti z př. 5.71 Laplaceovy obrazy integrálů daných funkcí a výsledky srovnejte se známými obrazy.

5.72 $f(t) = t$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5.71 dostaneme

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \tau\, d\tau\right] = \frac{1}{p}\, \mathcal{L}[\, t\,] = \frac{1}{p^3} \left(= \frac{1}{2}\, \mathcal{L}\, [\, t^2\,] \right) \, .$$

5.73 $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5.71 dostaneme

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{a\tau} d\tau\right] = \frac{1}{p}\, \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p(p-a)} \left(= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{a}\, \mathcal{L}[e^{at} - 1]\right) .$$

5.74 $f(t) = \cos \omega t \ , \ \omega \in \mathcal{R}^+ \ .$

Řešení : Na základě výsledku př. 5.71 dostaneme

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos \omega\tau \ d\tau \ \right] = \frac{1}{p}\ \mathcal{L}[\ \cos \omega t \ ] = \frac{p}{\omega p(p^2+\omega^2)}$$

$$\left(= \frac{1}{\omega}\ \frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega}\ \mathcal{L}[\ \sin \omega t \ ] \right) \ .$$

5.76 $f(t) = \sin \omega t \ , \ \omega \in \mathcal{R}^+ .$

Výsledek : $\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin \omega\tau \ d\tau \ \right] = \dfrac{1}{\omega p} - \dfrac{1}{\omega}\ \dfrac{p}{p^2+\omega^2} \ .$

5.77 $f(t) = e^{-t} \cos t \ .$

Výsledek : $\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-\tau} \cos \tau \ d\tau \ \right] = \dfrac{p+1}{p(p^2+2p+2)}$
$\left(= \dfrac{1}{2}\ (\ \mathcal{L}[\ 1(t)\ ] + \mathcal{L}[\ e^{-t} \sin t \ ] - \mathcal{L}[\ e^{-t} \cos t \ ]\ ) \right) .$

5.78 $f(t) = t \ e^{-t} \ .$

Výsledek : $\mathcal{L}\left[\int_0^t \tau \, e^{-\tau} d\tau\right] = \dfrac{1}{p(p+1)^2} \ \left(= \mathcal{L}[1(t)] - \mathcal{L}[t\, e^{-t}] - \mathcal{L}[e^{-t}] \ \right).$

Připomeňme základní vlastnosti funkce $\Gamma(x)$ (gama), která je pro kladné hodnoty parametru x definována nevlastním integrálem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \ .$$

Dá se ukázat, že pro $x \in \mathcal{R}^+$ platí rovnost $\Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x)$ a vypočítat hodnoty $\Gamma(1) = 1$ a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Na základě těchto hodnot a podle uvedené rovnosti můžeme dostat některé další hodnoty :

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\ \Gamma(1) = 1\ , \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \sqrt{\pi}\ ,$$
$$\Gamma(3) = \Gamma(1+2) = 2\ \Gamma(2) = 2\ , \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \sqrt{\pi}\ \text{, atd.}$$

5.79 Dokažte, že pro $a > -1$ platí :

$$\boxed{\mathcal{L}[\ t^a\ ] = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}\ , \quad \mathrm{Re}\ p > 0\ .}$$

Řešení : V definičním integrálu $\int_0^{+\infty} \tau^a e^{-p\tau} d\tau$ provedeme substituci $t = p\tau\ ,\ \tau = \dfrac{t}{p}\ ,\ d\tau = \dfrac{dt}{p}$ a dostaneme

$$\int_0^{+\infty} \tau^a e^{-p\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{p^a}\, e^{-t} \frac{dt}{p} = \frac{1}{p^{a+1}} \int_0^{+\infty} t^{(a+1)-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}\ .$$

Hodnotu p^{a+1} je třeba chápat tak, aby byla pro kladné reálné hodnoty totožná s obvykle definovanou funkcí reálné proměnné x^{a+1} .

Poznámka : Pro $\alpha \in (-1, 0)$ není funkce t^α podle definice v této sbírce zobrazitelná. Protože však definiční integrál pro Laplaceův obraz funkce t^α konverguje, přidáme funkci z př. 5.79 mezi obrazy. Jako obrazy dostaneme pro $p \neq 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ funkce, jejichž singulární body jsou rozvětvovací body. Obor konvergence z definičního integrálu nelze v těchto případech rozšiřovat.

V př. 5.80 - 5.84 najděte podle obecného vzorce z př. 5.79 Laplaceovy obrazy daných funkcí.

5.80 $\quad f(t) = \dfrac{1+t}{\sqrt{t}}$.

Řešení : Na základě výsledku př. 5.79 najdeme

$$\mathcal{L}\left[\frac{1+t}{\sqrt{t}}\right] = \mathcal{L}\left[\, t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\, p^{\frac{3}{2}}}(2p+1\,) = =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\left(1+\frac{1}{2p}\right)\ ,\ \mathrm{Re}\, p > 0\ .$$

5.81 $f(t) = (1+\sqrt{t})^2$.

Výsledek : $\mathcal{L}\,[\,(1+\sqrt{t})^2] = \mathcal{L}\,[\,1+2\,\sqrt{t}+t\,] = \dfrac{1}{p^2}\,(\,p+\sqrt{\pi\,p}+1\,)$, $\mathrm{Re}\, p\ >\ 0$.

5.82 $f(t) = e^t\sqrt{t}$.

Výsledek : $\mathcal{L}\left[\,e^t\ \sqrt{t}\,\right] = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2(p-1)\,\sqrt{p-1}}$, $\mathrm{Re}\, p > 1$.

5.83 $f(t) = t\sqrt{t}$.

Výsledek : $\mathcal{L}\,[\,t\ \sqrt{t}\,] = \dfrac{3\,\sqrt{\pi}}{4\,p^2\,\sqrt{p}}$, $\mathrm{Re}\, p > 0$.

5.84 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < a \\ \sqrt{t-a} & \text{pro } t \geq a \end{cases}$$

Řešení : Máme zobrazit zpožděnou funkci

$$\mathcal{L}\,[\,\sqrt{t}\,] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,p\,\sqrt{p}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\,[\,\sqrt{t-a}\,] = \frac{e^{-ap}\sqrt{\pi}}{2\,p\,\sqrt{p}}\ .$$

6. Zpětná Laplaceova transformace

V této kapitole se budeme zabývat metodami hledání funkce, ze které vznikl daný Laplaceův obraz.

Definice : Jestliže funkce F je Laplaceův obraz zobrazitelné funkce f, potom se funkce f nazývá **originál (předmět, vzor) funkce** F a budeme používat zápis $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$ nebo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$.

Vzhledem k tomu, že jsme v 1. a 4. kapitole požadovali splnění třetí Dirichletovy podmínky, je v našem pojetí originál k funkci F určen jednoznačně (pokud existuje). Proto můžeme bezprostředně nebo po rozložení na součet jednodušších obrazů použít k nalezení originálu znalost obrazů základních funkcí. Existence originálu je pro některé typy funkcí $F(p)$ zaručena. Např. pro ryze lomenou racionální funkci (a tento případ je ve skutečnosti velmi častý) vždy existuje originál.

Obecný problém existence originálu k funkci F je velmi složitý a nebudeme se jím v této sbírce úloh zabývat. V našich formulacích se mu vyhneme předpokladem, že funkce F je obrazem nějaké funkce f .

Pro nalezení originálu f funkce F se dá dokázat následující obecný výsledek.

Věta : Jestliže F je Laplaceův obraz funkce f a ξ_0 jeho úsečka konvergence, potom platí

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(p)\, e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)\, e^{pt} dp\ ,$$

kde křivka C je libovolná přímka $\operatorname{Re} p = x > \xi_0$ orientovaná souhlasně s imaginární osou. Druhý tvar zápisu názorně vyjadřuje právě tuto integrační cestu, přičemž nevlastní integrál je třeba chápat ve smyslu hlavní hodnoty.

Jestliže $F(p)$ je Laplaceův obraz funkce $f(t)$ a tento obraz $F(p)$ má v komplexní rovině (v množině $\mathcal{C}$) pouze izolované singulární body (kterých může být i nekonečný počet), potom je možné počítat předchozí integrál pomocí reziduí a dostaneme

$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C F(p)\, e^{pt} dt = \sum \operatorname*{res}_{p=p_i} F(p)\, e^{pt}$,

kde p_i jsou všechny singulární body obrazu $F(p)$. Zvláště tento výsledek platí pro meromorfní funkce, tj. takové, které mají v množině $\mathcal{C}$ pouze poly.

Pro zvláštní případ racionální lomené funkce $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$, která má pouze jednoduché kořeny jmenovatele (označíme je p_i), jejichž počet n je pro racionální lomenou funkci konečný, platí tzv. 2. Heavisideův vzorec

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(p)}{Q(p)}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(p_i)}{Q(p_i)}\, e^{p_i t} \ .$$

Použití Heavisideova vzorce je zvláště výhodné pro reálné kořeny. Vzorec se dá zobecnit i na vícenásobné kořeny, ale tím se značně zkomplikuje stejně jako výpočet rezidua pro poly vyššího řádu.

V příkladech 6. 1 - 6. 16 najděte originály k daným funkcím na základě znalosti jednoduchých obrazů po případných jednoduchých úpravách.

6.1. $F(p) = \dfrac{a}{p}$, $a \in \mathcal{R}$.

Řešení : Podle př. 4.1 po vytknutí konstanty zřejmě dostaneme $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{p}\right] = a\ 1(t)$.

6.2. $F(p) = \dfrac{1}{p+2}$.

Řešení : Podle př. 4.3 pro $a = -2$ dostaneme $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p+2}\right] = e^{-2t}$.

6.3. $F(p) = \dfrac{1}{p - \ln a}$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Podle př. 4.3 vyjde $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p-\ln a}\right] = e^{(\ln a)t} = \left(e^{\ln a}\right)^t = a^t$.

6.4. $F(p) = \dfrac{2(p+1)}{p^2+2}$.

Řešení : Obraz rozložime na součet dvou obazů, vyjdeme z výsledku př. 5.2 a 5.4 a dostaneme $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2(p+1)}{p^2+2}\right] = 2\ \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2+2}\right] +$
$+\ \dfrac{2}{\sqrt{2}}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{p^2+2}\right] = 2\ \cos\sqrt{2}\ t + \sqrt{2}\ \sin\sqrt{2}\ t$.

6.5. $F(p) = \dfrac{3p}{p^2+p+1}$.

Řešení : Protože jmenovatel tohoto obrazu má komplexní kořeny, upravíme nejdříve jmenovatel zlomku na tvar $\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.
Podle výsledků př. 5.14 a 5.16 vidíme, že takový jmenovatel mají obrazy funkcí $e^{-\frac{t}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$ a $e^{-\frac{t}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$. Proto daný obraz upravíme na součet obrazů těchto funkcí avzhledem k jednoznačnosti můžeme ihned zapsat hledaný originál

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3p}{p^2+p+1}\right] = 3\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+\frac{1}{2}}{p^2+p+1}\right] - \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{p^2+p+1}\right] =$$

$$= 3\,e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ t - \sqrt{3}\,e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ t = e^{-\frac{t}{2}}\left(3\ \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ t - \sqrt{3}\ \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ t\right) .$$

6.6. $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2+2p+2}$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{p-1}{p^2+2p+2}\right] = e^{-t}(\cos t - 2\ \sin t)$.

6.7. $F(p) = \dfrac{2p}{p^2+2p+5}$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2p}{p^2+2p+2}\right] = e^{-t}(2\ \cos 2t - \sin 2t)$.

6.8. $F(p) = \dfrac{Mp+N}{p^2+2ap+b^2}$, $a \in \mathcal{R}^+,\ b \in \mathcal{R}^+, a^2-b^2 < 0$.

Řešení : Protože jmenovatel obrazu má při splnění dané podmínky komplexní kořeny, budeme postupovat stejně jako v předcházejících příkladech. Jmenovatel zlomku upravíme na tvar
$(p+a)^2 + b^2 - a^2$ a označíme $\sqrt{b^2 - a^2} = \omega$. Potom provedeme opět takové úpravy, abychom mohli použít výsledky př. 5.14 a 5.16 a zapsat hledané originály

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Mp+N}{p^2+2ap+b^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{M(p+a)+N-Ma}{(p+a)^2+b^2-a^2}\right] =$$

$$= e^{-at}\left(M \ \cos\omega\ t - \frac{N-Ma}{\omega}\sin\omega\ t\right) \ .$$

6.9. $F(p) = \dfrac{p}{p^2+2p+1}$.

Řešení : V tomto případě má jmenovatel obrazu dvojnásobný kořen, takže můžeme zapsat $p^2+2p+1 = (p+1)^2$. Obraz je třeba zjednodušit (úpravou nebo rozložením na parciální zlomky) a podle výsledků př. 4.3 a 5.37 dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2p+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1-1}{(p+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^2}\right] =$$

$$= e^{-t} - t\ e^{-t} = e^{-t}(1-t) \ .$$

6.10. $F(p) = \dfrac{1}{p^2-6p+9}$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2-6p+9}\right] = t\ e^{3t}$.

6.11. $F(p) = \dfrac{p}{(p+2)^3}$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{(p+2)^3}\right] = e^{-2t}(t-t^2)$.

6.12. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p-2)^3}$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{p+2}{(p-2)^3}\right] = e^{2t}(t+2\ t^2)$.

6.13. $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)^n}$, $n \in \mathcal{N}$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(p+1)^n}\right] = \dfrac{1}{(n-1)!}e^{-t}t^{n-1}$ (viz př. 5.40).

6.14. $F(p) = \dfrac{p^3}{(p^2+4)^2}$.

Řešení : Jmenovatel obrazu tohoto typu se vyskytoval ve výsledku př. 5.41 a 5.43. Pokusíme se upravit daný obraz na takový tvar (v tomto případě se to podaří) a zapíšeme hledaný originál

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p^3}{(p^2+4)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p^3+4p-4p}{(p^2+4)^2}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4p}{(p^2+2^2)^2}\right] = \cos 2t - t \ \sin 2t \ .$$

6.15. $F(p) = \dfrac{p+1}{(p^2+2p+5)^2}$.

Řešení : Protože jmenovatel obrazu má komplexní kořeny, upravíme jmenovatel zlomku na tvar $\left((p+1)^2+2^2\right)^2$. Daný obraz srovnáme s výsledkem př. 5.50 a můžeme zapsat hledaný originál

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{(p^2+2p+5)^2}\right] = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(p+1)}{[(p+1)^2+2^2]^2}\right] = \frac{1}{4}\ e^{-t}\sin 2\ t\ .$$

6.16. $F(p) = \dfrac{2p+1}{(p^2+p+1)^2}$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2p+1}{(p^2+p+1)^2}\right] = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ t\ e^{-\frac{t}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.

6.17. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

Řešení : Na tomto příkladě ukážeme jeden z možných postupů, kterým můžeme tento dosti složitý problém vyřešit. Jako obrazy, ze kterých by mohl vzniknout daný obraz, přicházejí v úvahu obrazy funkcí $\sin t$, $\cos t$, $t\ \sin t$ $\left(\frac{2p}{(p^2+1)^2} \text{ podle př. 5.43 pro } \omega = 1 \right)$, $t\ \cos t$

$\left(\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}\right.$ podle př. 5.41 $\Big)$. Získat správnou kombinaci těchto obrazů odhadem je velmi obtížné, takže provedeme rozklad na součet uvedených čtyř obrazů metodou neurčitých koeficientů. Musí platit

$$\frac{p^2}{(p^2+1)^2} = \frac{A}{p^2+1} + \frac{Bp}{p^2+1} + \frac{2Cp}{(p^2+1)^2} + \frac{D(p^2-1)}{(p^2+1)^2} \text{ , odtud}$$

$$p^2 = (A+Bp)(p^2+1) + 2Cp + D(p^2-1) \ .$$

Podmínky pro rovnost mnohočlenů vedou k jednoduché soustavě lineárních rovnic, která má jediné řešení $A = D = \frac{1}{2}$, $B = C = 0$. Hledaný originál je tedy $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p^2}{(p^2+1)^2}\right] = \frac{1}{2}(\sin t + t\ \cos t)$.

6.18. $F(p) = \dfrac{p^3+16}{(p^2+4)^2}$.

Řešení : Jako v předcházejícím příkladě usuzujeme, že hledaný obraz může vzniknout z obrazů funkcí $\sin 2t$, $\cos 2t$, $t\ \sin 2t$ $\left(\frac{4p}{(p^2+2^2)^2}\right.$ podle př. 5.43 pro $\omega = 2$ $)$, $t\ \cos 2t$ $\left(\frac{p^2-2^2}{(p^2+2^2)^2}\right.$ podle př. 5.41 $\Big)$. Provedeme rozklad na součet uvedených čtyř obrazů metodou neurčitých koeficientů, takže musí platit

$$\frac{p^3+16}{(p^2+4)^2} = \frac{2A}{p^2+4} + \frac{Bp}{p^2+4} + \frac{4Cp}{(p^2+4)^2} + \frac{D(p^2-4)}{(p^2+4)^2} \text{ , odtud}$$

$$p^3 + 16 = (2A+Bp)(p^2+4) + 4Cp + D(p^2-4) \ .$$

Podmínky pro rovnost mnohočlenů vedou k jednoduché soustavě lineárních rovnic, která má jediné řešení $A = B = 1$, $C = -1, D = -2$. Originál je tedy $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p^3+16}{(p^2+4)^2}\right] = \sin 2t + \cos 2t - t\ \sin 2t - 2t\ \cos 2t$.

6.19. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+1)^2}\right] = \frac{1}{2}(\sin t - t\ \cos t)$.

– – – – – – – – – –

6.20. Dokažte, že libovolný Laplaceův obraz $F(p) = \dfrac{ap^3+bp^2+cp+d}{(p^2+\omega^2)^2}$ ($\omega \in \mathcal{R}^+$) je možné jednoznačně rozložit na součet Laplaceových obrazů funkcí $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $t\sin\omega t$, $t\cos\omega t$.

Řešení : Pro rozklad daného zlomku na součet uvedených čtyř zlomků metodou neurčitých koeficientů dostaneme

$$\frac{ap^3+bp^2+cp+d}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{A\omega}{p^2+\omega^2} + \frac{Bp}{p^2+\omega^2} + \frac{2C\omega p}{(p^2+\omega)^2} + \frac{D(p^2-\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^2} \ .$$

Z rovnosti mnohočlenů

$$ap^3+bp^2+cp+d = (A\omega+Bp)(p^2+\omega^2)+2C\omega p+D(p^2-\omega^2) \ \ \text{tj}$$

$$ap^3+bp^2+cp+d = A\omega p^2+A\omega^3+Bp^3+B\omega^2 p+2C\omega p+Dp^2-D\omega^2$$

dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} & B & & & = & a \\ A\omega & & & +D & = & b \\ & B\omega^2 & +2C\omega & & = & c \\ A\omega^3 & & & -D\omega^2 & = & d \end{array}$$

Pro $\omega \in \mathcal{R}^+$ je splněna nutná a postačující podmínka pro to, aby tato soustava lineárních rovnic měla jediné řešení, tj.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\omega & 0 \\ \omega^3 & 0 & 0 & -\omega^2 \end{vmatrix} = 4\,\omega^4 \neq 0 \ .$$

V příkladech 6. 21 - 6. 42 najděte reálné vyjádření originálů k racionálním ryze lomeným obrazům. Využijte znalosti základních typů obrazů a provádějte rozklad na součet parciálních zlomků metodou neurčitých koeficientů. Tvar těchto zlomků nemusí být stejný jako byl v integrálním počtu (viz př. 6.20). Výpočet koeficientů v rozkladu se dá provést pomocí reziduí (pro jednoduché reálné kořeny) a kombinovat s řešením soustavy lineárních rovnic. Podrobné výpočty koeficientů nebudou v řešení uváděny.

6.21. $F(p) = \dfrac{p+2}{p^2+2p-3}$.

Řešení : Protože jmenovatel obrazu má reálné kořeny ($p_1 = 1$, $p_2 = -3$), je vhodné obraz rozložit na součet
$\dfrac{p+2}{p^2+2p-3} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p+3}$, kde pro rovnost vyjde $A = \dfrac{3}{4}$, $B = \dfrac{1}{4}$.
Hledaný originál je tedy $f(t) = \dfrac{1}{4}\,(3\,e^t + e^{-3t})$.

6.22. $F(p) = \dfrac{(p+1)(p+2)}{(p+3)(p+4)(p+5)}$.

Řešení : Protože jmenovatel obrazu má reálné kořeny ($p_1 = -3$, $p_2 = -4$, $p_3 = -5$), rozložíme obraz na součet
$\dfrac{(p+1)(p+2)}{(p+3)(p+4)(p+5)} = \dfrac{A}{p+3} + \dfrac{B}{p+4} + \dfrac{C}{p+5}$.
Koeficienty vypočítáme např. pomocí reziduí : $A = 1,\ B = -6,\ C = 6$.
Hledaný originál je tedy $f(t) = e^{-3t} - 6\,e^{-4t} + 6\,e^{-5t}$.

6.23. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)}$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{2}(-e^{-t} + 4e^{-2t} - e^{-3t})$.

6.24. $F(p) = \dfrac{p^2+p+1}{(p^2-1)(p+2)}$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t} + 2e^{-2t})$.

6.25. $F(p) = \dfrac{p}{p^4-5p^2+4}$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{6}(e^{2t} + e^{-2t} - e^t - e^{-t})$.

6.26. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2-3p+2)^2}$.

Řešení : Protože jmenovatel obrazu má dvojnásobné reálné kořeny ($p_1 = 1,\ p_2 = 2$), rozložíme obraz na součet
$\dfrac{p^2}{(p^2-3p+2)^2} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p-2} + \dfrac{C}{(p-1)^2} + \dfrac{D}{(p-2)^2}$.

Koeficienty A a B můžeme vypočítat pomocí reziduí : $A = 4,\ B = -4$.

Zbývající koeficienty můžeme vypočítat z rovnosti zlomků nebo pomocí limit (viz [4], př. 10.23) : $C = 1,\ D = 4$. Hledaný originál je tedy $f(t) = 4\ e^t - 4\ e^{2t} + t\ e^t + 4\ t\ e^{2t}$.

6.27. $F(p) = \dfrac{p^2+1}{(p^2-1)(p-1)}$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t} - 2\ t\ e^{-t})$.

6.28. $F(p) = \dfrac{p}{p^3-p^2-p+1}$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{4}(e^t - e^{-t} - 2\ t\ e^{t})$.

6.29. $F(p) = \dfrac{6p}{p^3+8}$.

Řešení : Jmenovatel zlomku rozložíme podle vzorce na součin $p^3+8 = = (p+2)(p^2-2p+4)$. Protože kvadratický trojčlen má komplexní kořeny, upravíme jej na tvar $(p-1)^2+(\sqrt{3})^2$. Racionální ryze lomenou funkci rozložíme na součet parciálních zlomků metodou neurčitých koeficientů. Zlomky odpovídající kvadratickému trojčlenu zapíšeme tak, aby odpovídaly výsledkům př. 5.14 a 5.16. Takže

$$\frac{3p}{p^3+8} = \frac{A}{p+2} + \frac{B\ \sqrt{3}}{(p-1)^2+(\sqrt{3})^2} + \frac{C(p-1)}{(p-1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

a odtud vyjde rovnost mnohočlenů

$$3p = A(p^2-2p+4) + \sqrt{3}B(p+2) + C(p-1)(p+2)\ .$$

Podmínky pro rovnost vedou k soustavě lineárních rovnic, která má jediné řešení $A = -1,\ C = 1,\ B = \sqrt{3}$.
Hledaný originál je tedy $f(t) = -e^{-2t} + e^t(\ \sqrt{3}\ \sin\sqrt{3}t + \cos\sqrt{3}t\ )$.

6.30. $F(p) = \dfrac{2(3p+1)}{(p-1)(p^2+2p+5)}$.

Výsledek : $f(t) = e^t - e^{-t}(\ \cos 2t + 2\sin 2t\ )$.

6.31. $F(p) = \dfrac{2p^2+1}{p^3-p^2+p-1}$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{2}(\ 3\ e^t + \cos t + \sin t\ )$.

6.32. $F(p) = \dfrac{3(p+1)}{1-p^3}$.

Výsledek : $f(t) = 2\ (e^{-\frac{t}{2}} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ t - e^t)$.

6.33. $F(p) = \dfrac{8p}{(p^2+2p+1)(p^2+2p+5)}$.

Řešení : Jmenovatel zlomku rozložíme na součin $(p+1)^2(p^2+2p+5)$. Protože druhý kvadratický trojčlen má komplexní kořeny, upravíme jej na tvar $(p+1)^2+2^2$. Ryze lomenou racionální funkci pak rozložíme na součet parciálních zlomků metodou neurčitých koeficientů.

$$\frac{8p}{(p+1)^2(p^2+2p+5)} = \frac{A}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1} + \frac{C\ (p+1)}{(p+1)^2+2^2} + \frac{2D}{(p+1)+2^2}$$

a odtud vyjde rovnost mnohočlenů

$$8p = A(p^2+2p+5) + B(p+1)(p^2+2p+5) + C(p+1)^3 + 2D\ (p+1)^2 \ .$$

Podmínky pro rovnost vedou k soustavě lineárních rovnic, která má jediné řešení $A=-2,\ B=2,\ C=-2,\ D=1$.
Hledaný originál je tedy $f(t) = e^{-t}(\ 2-2t+\sin 2t - 2\cos 2t\ )$.

6.34. $F(p) = \dfrac{4}{p^4-1}$.

Výsledek : $f(t) = e^t - e^{-t} - 2\sin t$.

6.35. $F(p) = \dfrac{p}{p^4+3p^2+2}$.

Výsledek : $f(t) = \cos t - \sqrt{2}\ \cos t$.

6.36. $F(p) = \dfrac{6}{p^4+5p^2+4}$.

Výsledek : $f(t) = 2\ \sin t - \sin 2t$.

6.37. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$, $a \in \mathcal{R}^+$, $b \in \mathcal{R}^+$, $a \neq b$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{ab(a^2-b^2)}(a\ \sin bt - b \sin at\ )$.

6.38. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$, $a \in \mathcal{R}^+$, $b \in \mathcal{R}^+$, $a \neq b$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{(a^2-b^2)}(a\ \sin at - b \sin bt\ )$.

6.39. $F(p) = \dfrac{(p+1)^2}{(p^2+p+1)(p^2+2p+3)}$.

Řešení : Kvadratické trojčleny ve jmenovateli mají komplexní kořeny a můžeme je zapsat ve tvaru $\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ a $(p+1)^2 + (\sqrt{2})^2$. Zlomek proto můžeme rozložit na součet parciálních zlomků

$$\frac{(p+1)^2}{(p^2+p+1)(p^2+2p+3)} = \frac{A(p+\frac{1}{2})+B}{p^2+p+1} + \frac{C(p+1)+D}{p^2+2p+3} \ .$$

Odtud vyjde rovnost mnohočlenů

$$p^2+2p+1 = \left[A\left(p+\frac{1}{2}\right)+B\right](p^2+2p+3)+[C(p+1)+D](p^2+p+1) \ .$$

Podmínky pro rovnost vedou k soustavě lineárních rovnic, která má jediné řešení $A = D = \dfrac{2}{3},\ B = 0,\ C = -\dfrac{2}{3}$.

Hledaný originál je tedy

$$f(t) = \frac{1}{3}\ (\ 2\ e^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ t + \sqrt{2}\ e^{-t} \sin\sqrt{2}\ t - 2\ e^{-t}\cos\sqrt{2}\ t\ ) \ .$$

6.40. $F(p) = \dfrac{2(p^2+2p+3)}{(p^2+2p+5)(p^2+4p+5)}$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{5}\left[e^{-t}(\ 2\cos 2t + \sin 2t\ ) + e^{-2t}(\ 6\sin t - 2\cos t\ )\right]$.

6.41. $F(p) = \dfrac{400}{p(p^2+2p+5)^2}$.

Řešení : Kvadratický trojčlen ve jmenovateli můžeme zapsat ve tvaru $(p+1)^2 + 2^2$ a zlomek proto můžeme rozložit na součet parciálních zlomků (viz př. 6.20)

$$\frac{400}{p(p^2+2p+5)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B(p+1)+2C}{p^2+2p+5} + \frac{D[(p+1)^2-2^2]+4E(p+1)}{(p^2+2p+5)^2} \ .$$

Podmínky pro rovnost vedou k soustavě lineárních rovnic, která má jediné řešení $A = -B = 16,\ C = -13,\ D = 10\ ,\ E = -20$.
Hledaný originál je tedy

$f(t) = 16 + e^{-t}(\ 10\ t\cos 2t - 20\ t\sin 2t - 16\ \cos 2t - 13\sin 2t\ )$.

6.42. $F(p) = \dfrac{1}{p^3(p^2+\omega^2)^2}$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{2\ \omega^6}\ (\ 4\cos\omega t + \omega t\sin\omega t - 4 + \omega^2 t^2\ )$.

V příkladech 6.43 - 6.52 použijte k nalezení originálu 2. Heavisideův vzorec a přitom můžete zhodnotit jeho efektivnost.

6.43. $F(p) = \dfrac{17p^2+3p-26}{p^4-5p+4}$.

Řešení : Trojčlen ve jmenovateli obrazu se dá rozložit na součin $(p^2-1)(p^2-4)$, takže snadno dostaneme singulární body obrazu : $p_1 = 1,\ p_2 = -1,\ p_3 = 2,\ p_4 = -2$. Pro jednoduché kořeny jmenovatele je možné použít Heavisideův vzorec a pro reálné kořeny je to také výhodné. Stačí vypočítat derivaci jmenovatele ($4p^3 - 10p$) a dosazovat postupně do vzorce všechny kořeny. Hledaný originál je tedy $f(t) = e^t + 2e^{-t} + 4e^{2t} - 3e^{-2t}$.

6.44. $F(p) = \dfrac{2p^2 + 7p + 3}{(p+2)(p^2-1)}$.

Výsledek : $f(t) = 2e^t + e^{-t} - e^{-2t}$.

6.45. $F(p) = \dfrac{p^2 + p + 6}{p(p+2)(p^2-p-2)}$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{2}(\ e^{2t} + 4\ e^{-t} - 2\ e^{-2t} - 3\ )$.

6.46. $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p+2)(p^2+4p+3)}$.

Výsledek : $f(t) = \dfrac{1}{24}(\ e^t + 6\ e{-}t - 16\ e^{-2t} + 9\ e^{-3t}\ )$.

6.47. $F(p) = \dfrac{p^2 - 1}{(p+2)(p^2+1)}$.

Řešení : Jmenovatel má jednoduché kořeny $p_1 = -2,\ p_2 = i,\ p_3 = -i$. Dva kořeny jsou sice imaginární, ale dají se snadno dosazovat do mnohočlenů, takže výhodnost použití Heavisideova vzorce se ještě zachovává. Vypočítáme derivaci jmenovatele ($3p^2+4p+1$) a dosazujeme do vzorce všechny kořeny. Koeficienty, které odpovídají imaginárním kořenům, je vhodné upravit $\left(\text{ např. } \dfrac{-2}{-2+4i} = \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5}\right)$, takže pro originál vyjde $f(t) = \dfrac{1}{5}(\ 3\ e^{-2t} + (1+2i)\ e^{it} + (1-2i)\ e^{-it}\ )$. Výsledek bychom ovšem chtěli mít v reálném tvaru, takže je třeba provést další úpravy, které v tomto případě naštěstí nejsou příliš složité. Hledaný originál vyjde $f(t) = \dfrac{1}{5}\Big(\ 3e^{-2t} + e^{it} + e^{-it} + 2i(\ e^{it} - e^{-it})\Big) =$

$= \dfrac{1}{5}\ (\ 3\ e^{-2t} + 2\cos t - 4\sin t\ )$.

6.48. $F(p) = \dfrac{p^2 + 2p + 2}{(p-2)(p^2+1)}$.

Výsledek : $f(t) = 2\ e^{2t} - \cos t$.

6.49. $F(p) = \dfrac{6}{p^4 + 5p^2 + 4}$.

Výsledek : $f(t) = 2\ \sin t - \sin 2t$ (viz př. 6.36).

6.50. $F(p) = \dfrac{2(p^2+2p+3)}{(p^2+2p+5)(p^2+4p+5)}$.

Řešení : Jmenovatel má jednoduché komplexní kořeny $p_1 = -1+2i$, $p_2 = -1-2i$, $p_3 = -2+i$, $p_4 = -2-i$, které je třeba dosazovat do čitatele ($2\ (p^2+2p+3)$) a do derivace jmenovatele ($2\ (2p^3+9p^2+$ $+ 18p+15)$). Toto dosazování je velmi zdlouhavé, takže je vhodné předem vypočítat alespoň mocniny kořenů

p	p^2	p^3
$-1+2i$	$-3-4i$	$11-2i$
$-1-2i$	$-3+4i$	$11+2i$
$-2+i$	$3-4i$	$-2+11i$
$-2-i$	$3+4i$	$-2-11i$

Výsledné hodnoty zlomků je třeba upravit a pro originál dostaneme
$f(t) = \dfrac{e^{-t}}{10}\ [\ (2-i)\ e^{2it} + (2+i)\ e^{-2it}] - \dfrac{e^{-2t}}{5}\ [\ (1+3i)\ e^{it} + (1-3i)\ e^{-it}\ ]$.
Výsledek je třeba dále upravit na reálný tvar
$f(t) = \dfrac{1}{5}\ \Big[\ (\ e^{-t}(\ 2\cos 2t + \sin 2t\ ) - e^{-2t}(\ 2\cos t - 6\sin t\ )\ \Big]$.
Složitost všech výpočtů ukazuje, že v tomto případě je použití Heavisideova vzorce velmi problematické (viz postup při řešení př. 6.40).

7. Konvolutorní součin

Konvolutorní součin $f_1(t) * f_2(t)$ **dvou jednostranných funkcí** definujeme pro $t \geq 0$ integrálem (stejně jako v obecnějším případě v kap.2 na str. 29)

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\ f_2(t-\tau)\ d\tau\ .$$

Rozdíl je pouze v tom, že pro jednostranné funkce $f_1(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a současně $f_2(t-\tau) = 0$ pro $\tau > t$, takže se integruje pouze od 0 do t . Konvolutorní součin jako funkce horní meze musí být spojitá funkce.

Konvolutorní součin má podobné vlastnosti jako násobení čísel, zvláště platí komutativní zákon $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$.

Pro obraz konvolutorního součinu dvou zobrazitelných funkcí platí stejně jako ve Fourierově transformaci v kap. 2

$$\mathcal{L}\ [\ f_1(t) * f_2(t)\ ] = \mathcal{L}\ [\ f_1(t)\ ]\ \mathcal{L}\ [\ f_2(t)\ ]\ .$$

Jestliže kromě zobrazitelnosti obou základních funkcí je také funkce $f_2'(t)$ zobrazitelná a funkce $f_2(t)$ je spojitá pro $t > 0$, potom platí pro obraz derivace konvolutorního součinu

$$\mathcal{L}\ \left[\frac{d}{dt}[\ f_1(t) * f_2(t)\ ]\right] = p\ \mathcal{L}\ [\ f_1(t)\ ]\ \mathcal{L}\ [\ f_2(t)\ ]\ .$$

Za uvedených předpokladů platí pro derivování konvolutorního součinu (tj. integrálu s parametrem t také v horní mezi) podle parametru t

$$\frac{d}{dt}[\ f_1(t) * f_2(t)\ ] = \int_0^t f_1(\tau)\ f_2'(t-\tau)\ d\tau + f_1(t)\ \lim_{t \to 0+} f_2(t)\ .$$

Vzhledem ke komutativnosti konvolutorního součinu můžeme derivaci konvolutorního součinu počítat také podle vzorce

$$\frac{d}{dt}[\ f_1(t) * f_2(t)\ ] = \int_0^t f_2(\tau)\ f_1'(t-\tau)\ d\tau + f_2(t)\ \lim_{t \to 0+} f_1(t)\ ,$$

pokud požadované podmínky splňuje funkce $f_1(t)$.

Uvedené vlastnosti umožňují zapsat originál k součinu obrazů a vypočítat jej explicitně nebo případně alespoň numericky.

V příkladech 7.1 - 7.10 vypočítejte podle definice daný konvolutorní součin dvou jednostranných funkcí.

7.1 $e^{at} \ * \ e^{bt}$, $a \neq b$.

Řešení : Podle definice musíme počítat určitý integrál s integrační proměnnou τ a s parametrem $t > 0$

$$e^{at} \ * \ e^{bt} = \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau = e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)\tau} d\tau = \frac{e^{bt}(e^{(a-b)t-1})}{a-b} =$$

$= \dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$. Snadno se dá zjistit, že je to spojitá funkce včetně $t = 0$.

7.2 $t \ * \ t$.

Výsledek : $t \ * \ t = \dfrac{t^3}{6}$.

7.3 $t \ * \ e^{at}$, $a \neq 0$.

Výsledek : $t \ * \ e^{at} = \dfrac{e^{at} - at - 1}{a^2}$ (ověřte spojitost pro $t = 0$).

7.4 $\sin t \ * \ \cos t$.

Řešení : $\sin t \ * \ \cos t = \displaystyle\int_0^t \sin\tau \ \cos(t-\tau) \ d\tau =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t [\ \sin t \ + \ \sin(2\tau - t)\ ] \ d\tau = \frac{1}{2} \left[\tau \sin t - \frac{\cos(2\tau - t)}{2} \right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2} \left[t \sin t - \frac{\cos t}{2} + \frac{\cos(-t)}{2} \right] = \frac{1}{2} \ t \ \sin t \ .$$

Při výpočtu integrálu jsme použili převod součinu goniometrických funkcí na součet podle vzorce $\sin\alpha \ \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$.

7.5 $\sin t \ * \ \sin t$.

Výsledek : $\sin t \ * \ \sin t = \dfrac{1}{2} \ (\ \sin t - t \ \cos t \ )$.

7.6 $\cos t \ * \ \cos t$.

Výsledek : $\cos t \ * \ \cos t = \dfrac{1}{2} \ (\ \sin t + t \ \cos t \ )$.

7.7 $e^{at} \ * \ \sin bt$.

Řešení : $e^{at} * \sin bt = \int_0^t e^{a(t-\tau)} \sin b\tau \ d\tau = \int_0^t e^{at} e^{-a\tau)} \sin b\tau \ d\tau =$

$= e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} \sin b\tau \ d\tau = - \ e^{at} \left[\frac{e^{-a\tau}(a \sin b\tau + b \cos b\tau)}{a^2 + b^2} \right]_0^t =$

$= - \ \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} [\ e^{-at}(a \sin bt + b \cos bt - b \ ) \ ] = \frac{b \ e^{at} - a \sin bt - b \cos bt}{a^2 + b^2}$

(při výpočtu integrálu je třeba použít dvakrát metodu per partes).
Snadno se dá zjistit, že výsledná funkce je spojitá i pro $t = 0$.

7.8 $\sin at \ * \ \cos at \ , \ a \neq 0$.

Výsledek : $\sin at \ * \ \cos at = \frac{1}{4a} \ (\ \cos 2at - 1 \ )$ (ověřte spojitost pro $t = 0$).

7.9 $\sin at \ * \ \cos bt \ , \ |a| \neq |b|$.

Výsledek : $\sin at \ * \ \cos bt = \frac{a}{a^2 - b^2} \ (\ \cos at - \cos bt \ )$ (ověřte spojitost pro $t = 0$).

7.10 $\sin at \ * \ \sin at \ , \ |a| \neq |b|$.

Výsledek : $\sin at \ * \ \sin bt = \frac{a \ \sin bt - b \ \sin at}{a^2 - b^2}$ (ověřte spojitost pro $t = 0$).

7.11 Zapište integrál $\int_0^t \tau^2 e^{t-\tau} \ d\tau$ pomocí konvolutorního součinu a najděte jeho obraz.

Řešení : Přímým srovnáním s definicí konvolutorního součinu je vidět, že můžeme zapsat $\int_0^t \tau^2 e^{t-\tau} d\tau \ = \ t^2 \ * \ e^t$ a pro obraz musí platit

$$\mathcal{L}\ \left[\int_0^t \tau^2 e^{t-\tau} d\tau\right] = \mathcal{L}\ [\ t^2\ ]\ *\ \mathcal{L}\ [\ e^t\ ] = \frac{\Gamma(3)}{p^3}\ \frac{1}{p-1} = \frac{2}{p^3(p-1)}\ .$$

7.12 Zapište integrál $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\ \sin\tau\ d\tau$ pomocí konvolutorního součinu a najděte jeho obraz.

Řešení : Přímým srovnáním s definicí konvolutorního součinu je vidět, že můžeme zapsat $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\ \sin\tau\ d\tau = t * \sin t$ a pro obraz musí platit

$$\mathcal{L}\ \left[\int_0^t (t-\tau)\ \sin\tau\ d\tau\right] = \mathcal{L}\ [\ t\ ] * \mathcal{L}\ [\ \sin t\ ] = \frac{1}{p^2}\ \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2(p^2+1)}\ .$$

7.13 Zapište integrál $\displaystyle\int_0^t \tau\ e^{-\tau}\ d\tau$ pomocí konvolutorního součinu a najděte jeho obraz.

Řešení : Daný integrál můžeme jednoduchou úpravou převést na tvar konvolutorního součinu

$$\int_0^t \tau\ e^{-\tau} d\tau = e^{-t}\int_0^t \tau\ e^t e^{-\tau} d\tau = e^{-t}\int_0^t \tau\ e^{t-\tau} d\tau = e^{-t}(\ t\ *\ e^t\ )\ .$$

Zobrazíme nejprve konvolutorní součin $\mathcal{L}[\ t\ *\ e^t\ ] = \dfrac{1}{p^2(p-1)}$.

Potom použijeme pravidlo pro násobení originálu exponenciální funkcí (př. 5.9), takže pro výsledný obraz vyjde $\mathcal{L}\ \left[\displaystyle\int_0^t \tau\ e^{-\tau} d\tau\right] = \dfrac{1}{(p+1)^2 p}$.

7.14 Zapište integrál $\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\ d\tau$ pomocí konvolutorního součinu a najděte jeho obraz.

Výsledek : $\mathcal{L}\ [\ e^{-t}(e^t\ *\ \cos t)] = \dfrac{p+1}{p(p^2+2p+2)}$.

7.15 Zapište integrál $\displaystyle\int_0^t \tau^2 e^{\tau} d\tau$ pomocí konvolutorního součinu a najděte jeho obraz.

Výsledek : $\mathcal{L}\ [\ e^t(t^2\ *\ e^{-t}\ ] = \dfrac{2}{p(p-1)^3}$.

7.16 Zapište integrál $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\ \sqrt{\tau}\ d\tau$ pomocí konvolutorního součinu a najděte jeho obraz.

Řešení : Vzhledem k definici konvolutorního součinu dostaneme

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t (t-\tau)\ \sqrt{\tau}\ d\tau\right] = \mathcal{L}[\ t\ *\ \sqrt{t}\ ] = \mathcal{L}\ [\ t\ ]\ \mathcal{L}\ [\ \sqrt{t}\ ] =$$

$$= \frac{1}{p^2}\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p\ \sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^3\ \sqrt{p}}\ .$$

7.17 Zapište integrál $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{2\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$ pomocí konvolutorního součinu a najděte jeho obraz.

Výsledek : $\mathcal{L}\ \left[\ e^{2t}\ *\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right] = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(p-2)\ \sqrt{p}}$.

7.18 Pro zobrazitelnou funkci $f(t)$ zapište integrál $\displaystyle\int_0^t f(\tau)\ d\tau$ pomocí konvolutorního součinu a najděte jeho obraz.

Řešení : Integrovanou funkci si můžeme představit vynásobenou jednotkovou funkcí, takže $\displaystyle\int_0^t f(\tau)\ d\tau = \int_0^t f(\tau)\ 1(t-\tau)\ d\tau = f(t)\ *\ 1(t)$. Po zobrazení v Laplaceově transformaci vyjde $\mathcal{L}[\ f(t) * 1(t)\ ] = \dfrac{F(p)}{p}$. Tím jsme vlastně znovu odvodili výsledek z příkladu 5.71.

– –   – –   – –   – –   – –

V příkladech 7.19 - 7.27 najděte pomocí obrazu konvolutorního součinu hodnotu daného integrálu ($t > 0$) .

7.19 $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\ \cos\tau\ d\tau$.

Řešení : Integrál má tvar konvolutorního součinu, takže snadno najdeme jeho obraz

$$\mathcal{L}\ \left[\int_0^t (t-\tau)\cos\tau\ d\tau\right] = \mathcal{L}\ [\ t\ *\ \cos t\ ] = \frac{1}{p^2}\ \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p(p^2+1)}\ .$$

Po rozkladu na parciální zlomky snadno dostaneme požadovaný integrál jako originál k tomuto obrazu

$$\int_0^t (t-\tau)\ \cos\tau\ d\tau = t\ *\ \cos t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p^2+1)}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right] = 1 - \cos t\ .$$

7.20 $\displaystyle\int_0^t \sin\tau\ \cos(t-\tau)\ d\tau$.

Výsledek : $\displaystyle\int_0^t \sin\tau\ \cos(t-\tau)\ d\tau = \sin t\ *\ \cos t =$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p^2+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\ t\ \sin t \quad \text{(podle př. 5.43) .}$$

7.21 $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^2\ \sqrt{\tau}\ d\tau$.

Řešení : Integrál má tvar konvolutorního součinu a můžeme najít jeho obraz (viz př. 5.79)

$$\mathcal{L}\ \left[\int_0^t (t-\tau)^2\sqrt{\tau}\ d\tau\right] = \mathcal{L}\ [\ t^2\ *\ \sqrt{t}\ ] = \frac{2}{p^3}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{p^4\sqrt{p}}\ .$$

Originál k tomuto obrazu najdeme opět podle výsledku př. 5.79

$$\int_0^t (t-\tau)^2\,\sqrt{\tau}\;d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{9}{2}}}\right] = \frac{\sqrt{\pi}\;t^{\frac{7}{2}}}{\Gamma(\frac{9}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\;t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{16}{105}\;t^3\,\sqrt{t}\;.$$

7.22 $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\;\tau\;\sqrt{\tau}\;d\tau\;.$

Výsledek : $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\;\tau\;\sqrt{\tau}\;d\tau = \frac{4}{35}\;t^3\,\sqrt{t}\;.$

7.23 $\displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau\;(t-\tau)}}\;.$

Výsledek : $\displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau\;(t-\tau)}} = \pi\;.$

7.24 $\displaystyle\int_0^\pi e^\tau \sin 2\tau\;d\tau\;.$

Řešení : Vzhledem k tomu, že $\sin 2\tau = \sin(2\pi - 2\tau) = \sin 2(\pi-\tau)$, je daný integrál roven hodnotě konvolutorního součinu $e^t * \sin t$ pro $t=\pi$. Jeho hodnotu můžeme najít zobrazením v Laplaceově transformaci

$$\mathcal{L}\;[\;e^t\;*\;\sin t\;] = \frac{2}{(p-1)(p^2+4)}$$

a potom zpětným nalezením originálu rozkladem na parciální zlomky

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(p-1)(p^2+4)}\right] = \frac{1}{5}\;\mathcal{L}^{-1}\left[\;\frac{2}{p-1} - \frac{2p}{p^2+4} - \frac{1}{p^2+4}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\;(\;2e^t - 2\cos 2t - \sin 2t\;)\;.$$

Po dosazení $t=\pi$ dostaneme hledanou hodnotu integrálu $\dfrac{2}{5}\,(e^\pi - 1)$.

7.25 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\tau} \ \cos\tau \ d\tau$.

Výsledek : $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\tau} \ \cos\tau \ d\tau = -\ \frac{1}{2}\ (\ e^{\pi}+1)$.

7.26 $\displaystyle\int_0^{1} (1-\tau)^2 \ \tau^2 \ d\tau$.

Řešení : Daný integrál je roven hodnotě konvolutorního součinu $t^2 \ * \ t^2$ pro $t=1$. Jeho hodnotu můžeme najít zobrazením a potom zpětným nalezením originálu

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^3}\ \frac{2}{p^3}\right] = \frac{1}{30}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\ \frac{5!}{p^6}\right] = \frac{1}{30}\ t^5 \ .$$

Po dosazení $t=1$ dostaneme hledanou hodnotu integrálu

$$\int_0^{1} (1-\tau)^2\tau^2 \ d\tau = \frac{1}{30} \ .$$

7.27 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tau}{\sqrt{t-\tau}} \ d\tau$.

Výsledek : $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tau}{\sqrt{t-\tau}} \ d\tau = \frac{4}{3}$.

V příkladech 7.28 - 7.32 najděte pomocí konvolutorního součinu originál k danému obrazu.

7.28 $F(p) = \dfrac{4}{(p^2+4)^2}$.

Řešení : Daný obraz můžeme chápat jako obraz konvolutorního součinu $\sin 2t \ * \ \sin 2t$, takže pro originál platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(p^2+4)^2}\right] = \int_0^{t} \sin 2\tau \ \sin 2(t-\tau) \ d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{t} [\cos 2(2\tau - t) - \cos 2t] \ d\tau = \frac{1}{2}\ \left[\frac{1}{4}\sin 2(2\tau - t) - \tau \ \cos 2t\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{8} \; [\; \sin 2t - \sin(-2t)] - \frac{1}{2} \; t \;\; \cos 2t \;] = \frac{1}{4} \; \sin 2t - \frac{1}{2} \; t \;\; \cos 2t \; .$$

Při výpočtu integrálu jsme použili převod součinu goniometrických funkcí na součet podle vzorce

$$\sin\alpha \;\; \sin\beta = \frac{1}{2} \; [\; \cos\,(\alpha-\beta) - \cos\,(\alpha+\beta) \;] \; .$$

7.29 $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+4)^2}$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{p^2}{(p^2+4)^2}\right] = \dfrac{1}{4} \; \sin 2t + \dfrac{1}{2} \; t \;\; \cos 2t$.

7.30 $F(p) = \dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$, $a \neq b$.

Výsledek : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}\right] = \dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$ (viz př. 7.1).

7.31 $F(p) = \dfrac{p}{(p-a)(p-b)}$, $a \neq b$.

Řešení : Daný obraz můžeme chápat jako obraz derivace konvolutorního součinu $e^{at} * e^{bt}$, takže pro originál platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p-a)(p-b)}\right] = \frac{d}{dt}(\; e^{at} * \; e^{bt}) = \int_0^t e^{a\tau} \; b \; e^{b(t-\tau)} d\tau + e^{at} =$$

$$= b\int_0^t e^{(a-b)\tau} \;\; e^{bt} d\tau + e^{at} = b \; e^{bt} \frac{e^{(a-b)t}-1}{a-b} + e^{at} = \frac{a \; e^{at} - b \; e^{bt}}{a-b} \; .$$

7.32 $F(p) = \dfrac{p^3}{(p^2+1)^2}$.

Řešení : Daný obraz můžeme chápat jako obraz derivace konvolutorního součinu $\cos t \; * \; \cos t$, takže pro originál platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p^3}{(p^2+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\; p \; \frac{p}{p^2+1} \; \frac{p}{p^2+1} \;\right] = \frac{d}{dt}(\; \cos t \; * \; \cos t \;) =$$

$$= -\int_0^t \sin\tau \ \cos(t-\tau)\ d\tau + \cos t = -\frac{1}{2}\ t\ \sin t + \cos t \quad (\text{ viz př. } 7.20 \text{ }).$$

Výsledek můžeme srovnat s výsledkem př. 6.14.

8. Použití Laplaceovy transformace

Základní myšlenka při používání Laplaceovy transformace je poměrně jednoduchá. Daný problém neřešíme v původním tvaru, ale po zobrazení v Laplaceově transformaci. Pokud se podaří najít Laplaceův obraz hledané funkce, musíme potom samozřejmě k tomuto výsledku najít originál (a to často není snadné). Tento postup použijeme pro diferenciální rovnice, soustavy diferenciálních rovnic a pro řešení některých elektrických obvodů. Obrazy daných funkcí budeme označovat odpovídajícími velkými písmeny.

V příkladech 8.1 - 8.17 řešte pomocí Laplaceovy transformace lineární diferenciální rovnice s počátečními podmínkami. Zamyslete se nad tím, jak souvisí tento postup výpočtu s klasickým postupem při řešení lineárních diferenciálních rovnic. Metodou Laplaceovy transformace vyjde přímo jediné požadované řešení a není třeba znát obecnou teorii a metody řešení diferenciálních rovnic.

8.1 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\,\dfrac{dx(t)}{dt} + 3\,x(t) = 3\,e^{-2t}\ ;\quad x(0) = 1\ ,\ \left(\dfrac{dx(t)}{dt}\right)_0 = 0\ .$

Řešení : Předpokládáme, že hledaná neznámá funkce $x(t)$ a její derivace jsou spojité pro $t > 0$. Její obraz označíme $\mathcal{L}\,[x(t)] = X(p)$ a potom obrazy derivací jsou $\mathcal{L}\,[x'(t)] = p\,X(p) - x(0) = p\,X(p) - 1$ (podle př. 5.57) a $\mathcal{L}\,[x''(t)] = p^2X(p) - p\,x(0) - x'(0) = p^2X(p) - p$ (podle př. 5.63). Počáteční podmínky chápeme jako limity příslušných funkcí pro $t \to 0+$. Je ovšem třeba zobrazit také funkci na pravé straně rovnice.

Jako obraz dané diferenciální rovnice dostaneme rovnici

$$p^2X(p) - p + 4\,[p\,X(p) - 1] + 3\,X(p) = \frac{3}{p+2}$$

a odtud najdeme obraz hledané funkce

$$(p^2 + 4p + 3)\,X(p) = \frac{3}{p+2} + p + 4 = \frac{p^2 + 6p + 11}{p+2}\ ,$$

$$X(p) = \frac{p^2 + 6p + 11}{(p+2)(p^2 + 4p + 3)}\ .$$

Tento obraz byl vypočítán na základě konkrétních počátečních podmínek, takže vede jednoznačně k výslednému originálu. Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má reálné kořeny (totožné s kořeny charakteristické rovnice při klasickém řešení), takže originál můžeme najít např. podle Heavisideova vzorce (derivace jmenovatele je $3p^2 + 12p + 11$)

$$x(t) = 3\ e^{-t} - 3\ e^{-2t} + e^{-3t}\ .$$

8.2 $x'' + 3\ x' + 2\ x = 6\ e^t\ ,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2\ .$

Výsledek : $x(t) = e^{-t} - e^{-2t} + e^t\ .$

8.3. $x'' - 2\ x' - 3\ x = 3 - 4\ e^t\ ,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 3\ .$

Výsledek : $x(t) = e^{-t} + e^{3t} + e^t - 1\ .$

8.4 $x'' + 2\ x' + 5\ x = e^{2t}\ ,\ x(0) = 2,\ x'(0) = -1\ .$

Řešení : Po zobrazení dané diferenciální rovnice dostaneme

$$p^2 X(p) - 2p + 1\ \ + 2\ [p\ X(p) - 2] + 5\ X(p) = \frac{13}{p-2}$$

a odtud po úpravách dostaneme obraz hledané funkce

$$(p^2 + 2p + 5)\ X(p) = \frac{13}{p-2} + 2p - 1 + 4 = \frac{2p^2 - p + 7}{p-2}\ ,$$

$$X(p) = \frac{2p^2 - p + 7}{(p-2)(p^2 + 2p + 5)}\ .$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má komplexní kořeny $-1 + 2i$, $-1 - 2i$, (Tyto kořeny jsou totožné s kořeny charakteristické rovnice při klasickém řešení a podle obecné teorie jim odpovídají reálná partikulární řešení $e^{-t}\cos 2t,\ e^{-t}\sin 2t$; takové funkce skutečně ve výsledku vyjdou.) Pro hledání originálu můžeme použít např. rozklad obrazu na parciální zlomky

$$\frac{2p^2 - p + 7}{(p-2)(p^2 + 2p + 5)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B(p+1) + 2C}{p^2 + 2p + 5}\ .$$

Z rovnosti čitatelů $2p^2-p+7 = A(p^2+2p+5)+B(p+1)(p-2)+2C(p-2)$ dostaneme soustavu lineárních rovnic
$A + B = 2$, $2\ A - B + 2\ C = -1$, $5\ A - 2\ B - 4\ C = 7$,
která má jediné řešení $A = 1,\ B = 1,\ C = -1$.
Hledaný originál je tedy $x(t) = e^{2t} + e^{-t}(\ \cos 2t - \sin 2t\ )$.

8.5 $x'' + 2\ x' + 2\ x = e^{-t}$, $x(0) = 2,\ x'(0) = 1$.

Výsledek : $x(t) = e^{-t}(\ \cos t + \sin t + 1\ )$.

8.6 $x'' + 4\ x' + 8\ x = 1$, $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$.

Výsledek : $x(t) = \frac{1}{8}\left[1 + e^{-2t}(\ 3\ \sin 2t - \cos 2t\ )\right]$.

8.7 $x'' + x = 3\ \sin 2t$, $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$.

Výsledek : $x(t) = \cos t + 2\ \sin t - \sin 2t$.

8.8 $x'' + (a + b)\ x' + ab\ x = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$, $a \in \mathcal{R}^+$, $b \in \mathcal{R}^+$, $a \neq b$.

Výsledek : $x(t) = \dfrac{x_0}{a-b}\ (\ a\ e^{-bt} - b\ e^{-at})$.

8.9 $x'' + 2a\ x' + (a^2 + b^2)\ x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $b \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : $x(t) = \dfrac{1}{b}\ e^{-at} \sin bt$.

8.10 $x''(t) + 3\ x(t) + 2\ x(t) = 2t^2 + 1$; $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

Řešení : Po zobrazení dané diferenciální rovnice dostaneme

$$p^2X(p) - 2p + 3\ [\ p\ X(p) - 2] + 2\ X(p) = 2\ \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p}$$

a odtud vypočítáme obraz hledané funkce

$$(p^2+3p+2)\ X(p) = \frac{4+p^2}{p^3} + 2p + 6 = \frac{4+p^2+6p^3+2p^4}{p^3}\ ,$$

$$X(p) = \frac{4+p^2+6p^3+2p^4}{p^3(p^2+3p+2)}\ .$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má dva nenulové reálné různé kořeny a kromě toho $p_3 = 0$ je trojnásobný kořen jmenovatele. Podle klasické teorie musí mít partikulární řešení nehomogenní rovnice tvar $At+Bt+C$ a taková funkce ve výsledku skutečně vyjde. Pro hledání originálu můžeme použít např. rozklad obrazu na parciální zlomky

$$\frac{4+p^2+6p^3+2p^4}{p^3(p^2+3p+2)} = \frac{2A}{p^3} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p} + \frac{D}{p+1} + \frac{E}{p+2}\ ,$$

kde vyjde $A = 1,\ B = -3,\ C = 4,\ D = E = -1$. Hledaný originál je tedy

$$x(t) = t^2 - 3\ t + 4 - e^{-t} - e^{-2t}\ .$$

8.11 $x'' + 2\ x' + 5\ x = 10\ t\ ,\ \ x(0) = 0\ ,\ x'(0) = 0\ .$

Výsledek : $x(t) = \dfrac{1}{5}\ \left[10\ t - 4 + e^{-t}(\ 4\ \cos 2t - 3\sin 2t\ )\right]\ .$

8.12 $x'' + 4\ x' + 5\ x = 8\ \sin t\ ,\ \ x(0) = 0\ ,\ x'(0) = 1\ .$

Výsledek : $x(t) = e^{-2t}\ (\ \cos t + 2\sin t\ )\ + \sin t - \cos t\ .$

8.13 $x''(t) + 3\ x(t) + 2\ x(t) = e^{-t}\ ;\ \ x(0) = 2\ ,\ x'(0) = 0\ .$

Řešení : Po zobrazení dané diferenciální rovnice dostaneme

$$p^2X(p) - 2p + 3\ [p\ X(p) - 2] + 2\ X(p) = \frac{1}{p+1}$$

a odtud vypočítáme obraz hledané funkce

$$(p^2+3p+2)\ X(p) = \frac{1}{p+1} + 2p + 6 = \frac{2p^2+8p+7}{p+1}\ ,$$

$$X(p) = \frac{2p^2 + 8p + 7}{(p+1)(p^2 + 3p + 2)} \ .$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má reálné kořeny (totožné s kořeny charakteristické rovnice při klasickém řešení), ale jeden ($p_1 = -1$) je stejný jako kořen jmenovatele obrazu pravé strany. Znamená to, že funkce e^{-t} z pravé strany je řešením příslušné homogenní rovnice. Podle klasické teorie musí mít řešení nehomogenní rovnice tvar Ate^{-t}. Tato funkce ve výsledku skutečně vyjde, protože ve jmenovateli obrazu se objeví $(p+1)^2$. Pro hledání originálu můžeme použít např. rozklad obrazu na parciální zlomky

$$\frac{2p^2 + 8p + 7}{(p+1)^2(p+2)} = \frac{A}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} \ .$$

Z rovnosti čitatelů $2p^2+8p+7 = A(p+2)+B(p+1)(p+2)+C(p+1)^2$ dostaneme soustavu lineárních rovnic
$B \ + \ C = 2$, $A + 3\ B + 2\ C = 8$, $2\ A + 2\ B + C = 7$,
která má jediné řešení $A = 1$, $B = 3$, $C = -1$.
Hledaný originál je tedy $x(t) = t\ e^{-t} + 3\ e^{-t} - e^{-2t}$.

8.14 $x'' - 3\ x' + 2\ x = e^{2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

Výsledek : $x(t) = 2\ e^t - e^{2t} + t\ e^{2t}$.

8.15 $x''(t) + 2\ x(t) + 2\ x(t) = 2\ e^{-t} \cos t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -3$.

Řešení : Po zobrazení dané diferenciální rovnice dostaneme

$$p^2 X(p) - p + 3 + 2\ [p\ X(p) - 1] + 2\ X(p) = \frac{2(p+1)}{p^2 + 2p + 2}$$

a odtud vypočítáme obraz hledané funkce

$$(p^2 + 2p + 2)\ X(p) = \frac{2(p+1)}{p^2 + 2p + 2} + p - 1 = \frac{p^3 + p^2 + 2p}{p^2 + 2p + 2} \ ,$$

$$X(p) = \frac{p^3 + p^2 + 2p}{(p^2 + 2p + 2)^2} \ .$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má komplexní kořeny (totožné s kořeny charakteristické rovnice při klasickém řešení), které jsou současně kořeny obrazu pravé strany. Znamená to, že funkce $e^{-t}\cos t$ je řešením příslušné homogenní rovnice. Podle klasické teorie musí mít řešení nehomogenní rovnice tvar $t\ e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$ a taková funkce ve výsledku skutečně vyjde. Obraz rozložíme na parciální zlomky (viz př. 6.41)

$$\frac{p^3+p^2+2p}{(p^2+2p+2)^2} = \frac{A[(p+1)^2-1]+2B(p+1)}{(p^2+2p+2)^2} + \frac{C(p+1)+D}{p^2+2p+2} \ ,$$

kde vyjde $A=0,\ B=1,\ C=1,\ D=-2$.
Hledaný originál je tedy $x(t) = e^{-t}\ (\ t\ \sin t + \cos t - 2\ \sin t\ )$.

8.16 $x'' + 4\ x = 4\ \sin 2t$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$.

Výsledek : $x(t) = \cos 2t + \sin 2t - t\ \cos 2t$.

8.17 $x'' + 4\ x' + 8\ x = 4\ e^{-2t}\sin 2t$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$.

Výsledek : $x(t) = e^{-2t}\ (\ \cos 2t + \sin 2t - t\ \cos 2t\ )$.

V příkladech 8. 18 - 8. 22 řešte pro různé funkce $u(t)$ diferenciální rovnici
$L\ \dfrac{d\ i(t)}{dt} + R\ i(t) = u(t)$, $i(0)=0$, $L\in\mathcal{R}^+$, $R\in\mathcal{R}^+$,
která popisuje průběh proudu se sériově zapojenou cívkou (indukčnost L) a ohmickým odporem R po připojení elektromotorického napětí $u(t)$.
V těchto příkladech bude vidět, že použití Laplaceovy transformace je zvláště výhodné v případě, kdy na pravé straně rovnice je jednoduchá funkce, která se však nedá analyticky vyjádřit jediným zápisem pro všechna $t>0$.

8.18 $u(t) = E\ \sin\omega t$, $E\in\mathcal{R}^+$, $\omega\in\mathcal{R}^+$.

Řešení : Po zobrazení dané diferenciální rovnice dostaneme

$$L\ p\ I(p) + R\ I(p) = \frac{E\ \omega}{p^2+\omega^2} \quad \text{a odtud} \quad I(p) = \frac{E\ \omega}{(Lp+R)(p^2+\omega^2} \ .$$

Obraz rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{E\ \omega}{(Lp+R)(p^2+\omega^2)} = \frac{E}{L}\ \left[\frac{A}{p+\frac{L}{R}} + \frac{Bp+C\omega}{p^2+\omega^2}\ \right]\ .$$

Z rovnosti mnohočlenů $\omega = A\ (p^2+\omega^2) + (Bp+C)(p+\dfrac{R}{L})$ vyjde

$$A = \frac{L^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}\ ,\quad B = -\frac{L^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}\ ,\quad C = \frac{L\ R}{R^2+L^2\omega^2}\ .$$

Odtud dostaneme hledaný originál

$$i(t) = \frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\ (\ e^{-\frac{R}{L}t} - L\ \omega\ \cos\omega t + R\ \sin\omega t\ )\ .$$

Goniometrické funkce se často upravují podle součtového vzorce na jedinou sinovou funkci. Existuje jediný ostrý úhel φ , pro který platí

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\ ,\quad \sin\varphi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\ .$$

Nalezený originál můžeme tedy upravit na tvar

$$i(t) = \frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\ e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\ (\ \sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi\ ) =$$

$$= \frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\ e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\ \sin\ (\omega t-\varphi)\ .$$

Z výsledku je vidět, že pro větší hodnoty t se stane vliv exponenciální funkce zanedbatelný a průběh proudu je dán funkcí sinus, která má stejnou frekvencí ω , ale působením cívky je vzhledem k $u(t)$ zpožděná.

8.19 $u(t) = u_0$ (konstanta).

Výsledek : $i(t) = \dfrac{u_0}{R}\ \left[1(t) - e^{-\frac{R}{L}\ t}\right]\ .$

Pro větší hodnoty t bude mít proud téměř konstantní hodnotu, jako by v obvodu cívka nebyla.

8.20 Pro $a \in \mathcal{R}^+$, $E \in \mathcal{R}^+$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \; t < 0 \; \vee \; t > a \\ \frac{E}{2} & \text{pro } \; t = 0 \; \vee \; t = a \\ E & \text{pro } \; t \in (\, 0, a \,) \end{cases}$$

Řešení : Po zobrazení dané diferenciální rovnice dostaneme

$$(Lp{+}R)\, I(p) = E\, \frac{1 - e^{-ap}}{p} \quad \text{a odtud} \quad I(p) = \frac{E}{p(Lp+R)} - \frac{E\, e^{-ap}}{p(Lp+R)} \,.$$

Nejprve najdeme originál k první funkci rozložením na parciální zlomky

$$\frac{E}{p(Lp+R)} = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right) \,, \; \text{takže} \;\; i_1(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) \,.$$

Originál druhé funkce je zpožděná funkce $i_1(t-a)$, která je pro $t < a$ rovna nule. Výsledný originál je proto v intervalu $(\, 0, a \,)$ roven funkci $i_1(t)$ a pro $t > a$ je roven rozdílu $i_1(t) - i_1(t-a)$. Takže

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) & \text{pro } \; t \in <\; 0, a \,) \\ \frac{E}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}(t-a)} - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = \frac{E\, e^{-\frac{R}{L} t}}{R} \left(e^{\frac{R}{L} a} - 1 \right) & \text{pro } \; t > a \,. \end{cases}$$

Dosazením $t = a$ do obou částí dostaneme $i(a) = \dfrac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} a} \right)$, takže funkce $i(t)$ je spojitá (obr. 1). Po výpočtu derivací se dá ověřit. že také derivace $i'(t)$ je spojitá funkce.

8.21 Pro $E \in \mathcal{R}^+$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \\ t & \text{pro } \ t \in <\ 0, E\ > \\ E & \text{pro } \ t > E \end{cases}$$

Výsledek : Výsledný proud se dá zapsat ve tvaru

$$i(t) = \begin{cases} \frac{t}{R} - \frac{L}{R^2} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) & \text{pro } \ t \in <\ 0, E\ > \\ \frac{E}{R} - \frac{L\ e^{-\frac{R}{L}t}}{R^2} \left(e^{\frac{R\ E}{L}} - 1\right) & \text{pro } \ t > E\ . \end{cases}$$

Ověřte, že funkce $i(t)$ a také $i'(t)$ jsou spojité (obr. 2).

8.22

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \ \vee \ t > \pi \\ \sin t & \text{pro } \ t \in <\ 0, \pi\ > \end{cases}$$

Řešení : Obraz funkce $u(t)$ najdeme pomocí obrazu zpožděné funkce (viz. př. 5.27). Po zobrazení dané diferenciální rovnice dostaneme

$$(Lp + R)\ I(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{p^2 + 1} \quad \text{a odtud} \quad I(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(Lp + R)}\ .$$

Nejprve najdeme podobně jako v př. 8.20 originál k první části zlomku (s čitatelem 1) rozložením na parciální zlomky

$$\frac{1}{(p^2 + 1)(Lp + R)} = \frac{1}{L} \left(\frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{C}{p + \frac{R}{L}} \right)\ .$$

Z rovnosti čitatelů zlomků $1=(Ap+B)(p+\dfrac{R}{L})+C(p^2+1)$ dostaneme soustavu lineárních rovnic $B\,\dfrac{R}{L}+C=1$, $B+A\,\dfrac{R}{L}=0$, $A+C=0$. Tato soustava má jediné řešení

$$A=-\frac{L^2}{R^2+L^2}\ ,\quad B=\frac{R\,L}{R^2+L^2}\ ,\quad C=\frac{L^2}{R^2+L^2}\ .$$

Originál k první části zlomku (s čitatelem 1) je tedy

$$i_1(t)=\frac{1}{R^2+L^2}\ \left(\ L\ e^{-\frac{R}{L}t}-L\cos t+R\sin t\ \right)\ .$$

Originál druhé části zlomku je zpožděná funkce $i_1(t-\pi)$, která je pro $t<\pi$ rovna nule. Výsledný originál je proto v intervalu $<\ 0,\pi\ >$ roven funkci $i_1(t)$ a pro $t>\pi$ je roven součtu $i_1(t)+i_1(t-a)$, kde se obě goniometrické funkce anulují. Takže

$$i(t)=\begin{cases}\frac{1}{R^2+L^2}\ \left(\ L\ e^{-\frac{R}{L}t}-L\cos t+R\sin t\ \right) & \text{pro}\ \ t\in<\ 0,\pi\ )\\ \frac{L}{R^2+L^2}\ e^{-\frac{R}{L}t}\ \left(\ 1+e^{\frac{R}{L}\ \pi}\ \right) & \text{pro}\ \ t>\pi\ .\end{cases}$$

Dosazením $t=\pi$ do obou částí dostaneme $i(\pi)=\dfrac{L}{R^2+L^2}\left(\ e^{-\frac{R}{L}\pi}+1\ \right)$, takže funkce $i(t)$ je spojitá. Po výpočtu derivací se dá ověřit, že také derivace $i'(t)$ je spojitá funkce.

V příkladech 8. 23 - 8. 25 řešte pro různé funkce $f(t)$ diferenciální rovnici $m\ \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+c\ x(t)=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $m\in\mathcal{R}^+$, $c\in\mathcal{R}^+$, která popisuje pohyb tělesa s hmotností m na pružině s elastickou konstantou c při zanedbatelném odporu (tření) a při působení vnější síly $f(t)$. Neznámá funkce $x(t)$ popisuje výchylku tělesa z rovnovážné polohy v závislosti na čase.

8.23 Pro $a\in\mathcal{R}^+$, $F\in\mathcal{R}^+$

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{pro}\ \ t<0\ \vee\ t>a\\ \frac{F}{2} & \text{pro}\ \ t=0\ \vee\ t=a\\ F & \text{pro}\ \ t\in(\ 0,a\ )\end{cases}$$

Řešení : Po zobrazení dostaneme algebraickou rovnici

$$m\, p^2 X(p) + c\, X(p) = F\, \frac{1 - e^{-ap}}{p} \quad \text{a odtud} \quad X(p) = \frac{F}{m}\, \frac{1 - e^{-ap}}{p(p^2 + \frac{c}{m})}\ .$$

Nejprve rozložíme na parciální zlomky první část zlomku :

$$\frac{F}{m}\, \frac{1}{p(p^2 + \frac{c}{m})} = \frac{F}{c}\, \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \frac{c}{m}} \right)\ .$$

Originál k této funkci je

$$x_1(t) = \frac{F}{c}\, \left(1 - \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t \right)\ .$$

Druhá část originálu je zpožděná funkce $x_1(t - a)$.
Hledaný originál můžeme zapsat ve tvaru

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F}{c}\, \left(1 - \cos \sqrt{\frac{c}{m}}\, t \right) & \text{pro } t \in <\ 0, a\ ) \\ \frac{F}{c}\, \left(\cos \sqrt{\frac{c}{m}}\, (t - a) - \cos \sqrt{\frac{c}{m}}\, t \right) & \text{pro } t > a\ . \end{cases}$$

Funkce $x(t)$ je znázorněna na obr. 3. Dá se dokázat, že pro $t = a$ jsou funkce $x(t)$ a $x'(t)$ spojité (ověřte). Rozdíl kosinů v druhé části výsledku (pro $t > a$) můžeme upravit podle goniometrického vzorce na jedinou sinovou funkci

$$x(t) = \frac{2F}{c}\, \sin \frac{a}{2} \sqrt{\frac{c}{m}}\, \sin \frac{2t - a}{2} \sqrt{\frac{c}{m}}\ .$$

Vidíme, že pro $t > a$ se ve funkci $x(t)$ násobí konstantou $\sin \frac{a}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}$, která může být také rovna nule (např. pro $a = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$).

8.24 Pro $a \in \mathcal{R}^+$, $F \in \mathcal{R}^+$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ t < 0 \\ \frac{F}{2} & \text{pro } \ t = 0 \\ F & \text{pro } \ t > 0 \end{cases}$$

Výsledek : $x(t) = \dfrac{F}{c} \left(1 - \cos \sqrt{\dfrac{c}{m}} t \right)$.

8.25 $f(t) = F \sin \omega t$, $F \in \mathcal{R}^+$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Po zobrazení dané diferenciální rovnice dostaneme

$$m\, p^2 X(p) + c\, X(p) = \frac{F\, \omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{a odtud} \quad X(p) = \frac{F\, \omega}{(mp^2 + c)(p^2 + \omega^2)} \; .$$

Mohou nastat dvě možnosti :

1) $\omega \neq \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

V tomto případě obraz rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{F\, \omega}{(mp^2 + c)(p^2 + \omega^2)} = \frac{F}{m} \left[\frac{Ap + B}{p^2 + \frac{c}{m}} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2} \right] \; .$$

Z rovnosti mnohočlenů $\omega = (Ap+B)\,(p^2+\omega^2)+(Cp+D)(p^2+\dfrac{c}{m})$ vyjde

$$A = 0 \; , \; C = 0 \; , B = \frac{\omega}{\omega^2 - \frac{c}{m}} \; , \; D = -\frac{\omega}{\omega^2 - \frac{c}{m}} \; .$$

Odtud dostaneme hledaný originál

$$x(t) = \frac{F}{m\, \omega^2 - c} \left(\omega \sqrt{\frac{m}{c}} \, \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t - \sin \omega t \right) \; .$$

2) $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

V tomto případě dostaneme obraz $X(p) = \dfrac{F}{m} \dfrac{\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$.

Originál ke zlomku se dá hledat pomocí konvoluce nebo užitím obrazu derivace $x_1(t)$ (s podmínkou $x_1(0) = 0$)

$$\mathcal{L}[x_1'(t)] = p\, X_1(p) = \frac{p\, \omega}{(p^2 + \omega^2)^2} \; .$$

Odtud dostaneme snadno (viz př. 5.43) $x_1'(t) = \dfrac{1}{2}\, t\, \sin\omega t$ a integrací (per partes) $x_1(t) = \dfrac{1}{2\,\omega^2}\, (\sin\omega t - \omega\, t\, \cos\omega t\,)$.
Hledaný originál je tedy $x(t) = \dfrac{F}{2\, m\, \omega}(\,\sin\omega t - \omega\, t\, \cos\omega t\,)$.
V tomto případě působící síla $f(t) = F\, \sin\omega t$ má stejnou frekvenci jako vlastní kmity soustavy a způsobí rozkmitání soustavy (vlivem funkce $t\, \cos\omega t$).

V příkladech 8. 26 - 8. 35 řešte soustavy lineárních diferenciálních rovnic s danými počátečními podmínkami. Jako řešení vyjdou konkrétní hledané funkce a není třeba znát žádnou obecnou teorii pro řešení soustav.

8.26 $$\frac{dx}{dt} = x + y + e^t\ ,$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x + 4y - e^t\ ,\ x(0) = 1\ ,\ \ y(0) = 1\ .$$

Řešení : Označíme Laplaceovy obrazy neznámých funkcí $X(p)$, $Y(p)$.
Po zobrazení dané soustavy diferenciálních rovnic dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé obrazy

$$\begin{aligned} p\,X - 1 &= \quad X\ +\ Y + \frac{1}{p-1}\ ,\\ pY - 1\ &= -2\,X + 4\,Y - \frac{1}{p-1}\ . \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} (p-1)\,X &= \quad Y + \frac{p}{p-1}\ ,\\ (p-4)\,Y\ &= -2\,X + \frac{p-2}{p-1}\ . \end{aligned}$$

Do první rovnice vynásobené $p - 4$ dosadíme z druhé rovnice a vypočítáme

$$(p-1)(p-4)\,X = -2X + \frac{p-2}{p-1} + \frac{p(p-4)}{p-1}\ ,\quad \text{takže}$$

$$X(p) \;=\; \frac{p^2-3p-2}{(p^2-5p+6)(p-1)} \;.$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má reálné kořeny, takže pro výpočet originálu můžeme použít Heavisideův vzorec a vyjde
$x(t) = 4\,e^{2t} - e^{3t} - 2\,e^{t}$.
Při výpočtu $y(t)$ bychom mohli postupovat podobným způsobem, ale můžeme také $y(t)$ vypočítat dosazením $x(t)$ do první zadané rovnice. Dostaneme $y(t) = 4\,e^{2t} - 2\,e^{3t} - e^{t}$.

8.27 $\dfrac{dx}{dt} = x + y$,

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 4y \;,\; x(0) = 0 \;,\; y(0) = -1 \;.$$

Výsledek : $x(t) = e^{2t} - e^{3t}$, $y(t) = e^{2t} - 2\,e^{3t}$.

8.28 $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y$,

$$\frac{dy}{dt} = 4x - y \;,\; x(0) = 0 \;,\; y(0) = 1 \;.$$

Výsledek : $x(t) = \dfrac{1}{5}(\,e^{3t} - e^{-2t}\,)$, $y(t) = \dfrac{1}{5}(\,e^{3t} + 4\,e^{-2t})$.

8.29 $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 3\,e^{-t}$,

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{-t} \;,\; x(0) = 1 \;,\; y(0) = 1 \;.$$

Řešení : Označíme Laplaceovy obrazy neznámých funkcí $X(p)$, $Y(p)$. Po zobrazení dané soustavy diferenciálních rovnic dostaneme po úpravě soustavu rovnic pro neznámé obrazy

$$\begin{aligned}(p-2)\;X &= -Y + \frac{p+4}{p+1}\;,\\ (p-2)\;Y &= X + \frac{p+2}{p+1}\;.\end{aligned}$$

Do první rovnice vynásobené $p-2$ dosadíme z druhé rovnice a vypočítáme

$$(p-2)(p-2)\ X = -X - \frac{p+2}{p+1} + \frac{(p-2)(p+4)}{p+1}\ , \quad \text{takže}$$

$$X(p) \ = \ \frac{p^2+p-10}{(p^2-4p+5)(p+1)}\ .$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má komplexní kořeny. Po rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{p^2+p-10}{(p^2-4p+5)(p+1)} = \frac{A(p-2)+B}{p^2-4p+5} + \frac{C}{p+1}$$

vypočítáme z rovnosti čitatelů $p^2+p-10 = [A(p-2)+B](p+1) + {}$ $+\, C(p^2-4p+5)$ neznámé koeficienty $A=2$, $B=-1$, $C=-1$. Potom již snadno dostaneme hledaný originál

$$x(t) = e^{2t}(\ 2\cos t - \sin t\ ) - e^{-t}\ .$$

Dosazením $x(t)$ do první zadané rovnice dostaneme $y(t) = e^{2t}(\ 2\sin t + \cos t\ )$.

8.30 $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 2$,

$\dfrac{dy}{dt} = x + 2y + 1$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Výsledek : $x(t) = e^{2t}(\ \cos t + \sin t\ ) - 1$, $y(t) = e^{2t}(\ \sin t - \cos t\ )$.

8.31 $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 5t$,

$\dfrac{dy}{dt} = x + 2y + 2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Výsledek : $x(t) = e^{2t}(\ 2\cos t - \sin t\ ) - 2t - 1$, $y(t) = e^{2t}(\ 2\sin t + \cos t\ ) + t$.

8.32 $$\frac{dx}{dt} = -2x - y + \sin t \ ,$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x + 2y + \cos t \ , \ x(0) = 0 \ , \ \ y(0) = 0 \ .$$

Výsledek : $x(t) = -2t + 2\ \sin t\ ,\ \ y(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t\ .$

8.33 $$\frac{dx}{dt} + 3x - y + 3 = 2 \ ,$$

$$\frac{dy}{dt} + 2x + y = 3 \ , \ x(0) = 0 \ , \ \ y(0) = 1 \ .$$

Řešení : Po zobrazení dané soustavy diferenciálních rovnic dostaneme po úpravě soustavu rovnic pro neznámé obrazy

$$\begin{aligned} (p+3)\ X &= \quad Y + \frac{2}{p} \ , \\ (p+1)\ Y &= -2\ X + \frac{p+3}{p} \ . \end{aligned}$$

Do první rovnice vynásobené $p+1$ dosadíme z druhé rovnice a vypočítáme

$$(p+1)(p+3)\ X = -2\ X - \frac{2(p+1)}{p} + \frac{p+3}{p} \ , \qquad \text{takže}$$

$$X(p) \ = \ \frac{3p+5}{p(p^2+4p+5)} \ .$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má komplexní kořeny. Po rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{3p+5}{p(p^2+4p+5)} = \frac{A(p+2)+B}{p^2+4p+5} + \frac{C}{p}$$

vypočítáme z rovnosti čitatelů zlomků $3p+5 = A(p+2)p + Bp +$ $+ C(p^2+4p+5)$ neznámé koeficienty $A = -1\ ,\ B = 1\ ,\ C = 1\ .$ Potom již snadno dostaneme hledaný originál

$$x(t) = e^{-2t}(\ \sin t - \cos t\ ) + 1\ .$$

Dosazením $x(t)$ do první zadané rovnice dostaneme
$y(t) = e^{-2t}\ 2\sin t + 1$.

8.34 $\dfrac{dx}{dt} - y = \cos t$,

$$\frac{dy}{dt} + x = 0 \ , \ x(0) = -1 \ , \ \ y(0) = 1 \ .$$

Řešení : Po zobrazení dané soustavy diferenciálních rovnic dostaneme po úpravě soustavu rovnic pro neznámé obrazy

$$\begin{aligned} p\,X &= \ \ Y - 1 \ + \frac{p}{p^2+1} \ , \\ p\,Y &= \ -X + 1 \ . \end{aligned}$$

Do první rovnice vynásobené p dosadíme z druhé rovnice a vypočítáme

$$p^2\,X = -\,X - p + \frac{p^2}{p^2+1} + 1 \ , \quad \text{takže} \ X(p) \ = \ \frac{-p^3 + 2p^2 - p + 1}{(p^2+1)^2} \ .$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má dvojnásobné komplexní kořeny. V tomto komplikovanějším případě můžeme postupovat podobně jako v př. 6.17 a dostaneme rozklad

$$\frac{-p^3 + 2p^2 - p + 1}{(p^2+1)^2} = \frac{3}{2}\ \frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\ \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \ .$$

Potom již dostaneme hledaný originál $x(t) = \dfrac{3}{2}(\sin t - \cos t) + \dfrac{1}{2}\,t\ \cos t$.
Dosazením $x(t)$ do první zadané rovnice dostaneme
$y(t) = \sin t + \cos t - \dfrac{1}{2}\ t\ \sin t$.

8.35 $\dfrac{dx}{dt} - y = \cos t$,

$$\frac{dy}{dt} + x = 1 \ , \ x(0) = 2 \ , \ \ y(0) = \frac{1}{2} \ .$$

Výsledek : $x(t) = \sin t + \cos t + \dfrac{1}{2}\ t\ \cos t + 1$,
$y(t) = \dfrac{1}{2}\ \cos t - \sin t - \dfrac{1}{2}\ t\ \cos t$.

V příkladech 8. 36 - 8. 39 řešte pomocí obrazové impedance (viz [2], str. 156) úlohy v elektrickém obvodu s nulovými počátečními podmínkami. V tomto jednodušším připadě je pro ohmický odpor $Z = R$, pro cívku $Z = L\ p$ a pro kondenzátor $Z = \dfrac{1}{C\ p}$ (všechny konstanty chápeme jako kladná reálná čísla). Při tomto označení tedy pro každý z těchto elektrických prvků platí $U(p) = Z(p)\ I(p)$. Při seriovém zapojení je výsledná impedance $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$ a při paralelním zapojení platí $\dfrac{1}{Z} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{Z_i}$.
Všechny impedance $Z(p)$ jako funkce komplexní proměnné mají určité společné vlastnosti (viz [2], str.160 - Bruneovy funkce).

8.36 Určete průběh proudu v obvodu na obr. 4 , když v čase $t = 0$ připojíme zdroj konstantního elektromotorického napětí u_0 , $u_0 \in \mathcal{R}$.

Řešení : Všechny prvky jsou v obvodu zapojeny sériově, takže obrazová impedance je $Z(p) = R + Lp + \dfrac{1}{Cp}$ a můžeme snadno vypočítat

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{u_0}{p}\ \frac{C\ p}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{u_0}{L}\ \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}\ p + \frac{1}{CL}}\ .$$

Pro stručnost označíme $a = \dfrac{R}{2L}$ a $\omega^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2} = \dfrac{4L - R^2C}{4L^2C}$.

1. Pro cívku s dosti velkou indukčností je $\omega^2 > 0$ ($4L > R^2C$) a můžeme zapsat kořeny jmenovatele $p_{1,2} = -a \pm i\ \omega$. Výsledný proud vzniklý po sepnutí má tvar $i(t) = \dfrac{u_0}{L\ \omega}\ e^{-at} \sin \omega t$ a je vidět, že se po určité době utlumí. Je to celkem zřejmé, protože při konstantním napětí v obvodu s kondenzátorem nemůže protékat proud.

2. Pro cívku s malou indukčností je $\omega^2 < 0$ ($4L < R^2C$) a kořeny

jmenovatele jsou reálné $p_{1,2} = -a \pm \sqrt{-\omega^2}$. Výsledný proud vzniklý po sepnutí má tvar $i(t) = \dfrac{u_0}{2\ L\ \sqrt{-\omega^2}}\ (\ e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\ )$. Po určité době se také utlumí , protože obě hodnoty $p_1,\ p_2$ jsou záporné (dokažte).

3. V případě, že $\omega = 0$ dostaneme pro výsledný proud $i(t) = \dfrac{u_0}{L}\ t\ e^{-at}$. I v tomto případě se proud po určité době utlumí.

8.37 Určete průběh proudu v obvodu na obr. 5 , když v čase $t = 0$ připojíme zdroj konstantního elektromotorického napětí u_0 , $u_0 \in \mathcal{R}$.

Řešení : Kondenzátor a odpor R_2 jsou zapojeny paralelně, takže odpovídající obrazová impedance je $Z_3 = \dfrac{1}{\frac{1}{R_2} + C\ p} = \dfrac{R_2}{1 + CR_2\ p}$.

Další zapojení v obvodu je seriové, takže výsledná obrazová impedance

$$Z(p) = R + Lp + \frac{R_2}{1 + R_2 C\ p} = \frac{R_1 + CR_1R_2\ p + L\ p + CLR_2\ p^2 + R_2}{1 + CR_2\ p}$$

a můžeme snadno vypočítat

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{u_0}{p}\ \frac{1 + CR_2\ p}{CLR_2p^2 + (L + CR_1R_2)p + R_1 + R_2}\ .$$

Pro stručnost označíme $a = \dfrac{L + CR_1R_2}{2CLR_2}$,

$$b^2 = \frac{(L + CR_1R_2)^2 - CLR_2(R_1 + R_2)}{4C^2L^2R_2^2} = \frac{(L - CR_1R_2)^2 - 4CLR_2^2}{4C^2L^2R_2^2}\ .$$

Vyřešíme případ, kdy $b^2 > 0$. Můžeme zvolit $b \in \mathcal{R}^+$ a zapsat kořeny kvadratického trojčlenu ve tvaru $p_{1,2} = -a \pm b$. Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$I(p) = \frac{u_0}{R_1 + R_2}\,\frac{1}{p} + \frac{u_0}{CLR_2(p_1 - p_2)}\left(\frac{1 + CR_2\ p_1}{p_1(p - p_1)} - \frac{1 + CR_2\ p_2}{p_2(p - p_2)}\right) .$$

Výsledný proud vzniklý po sepnutí je tedy

$$i(t) = \frac{u_0}{R_1 + R_2}\ 1(t) + u_0\ \frac{(1 + CR_2\ p_1)p_2 e^{p_1 t} - (1 + CR_2\ p_2)p_1 e^{p_2 t}}{CLR_2(p_1 - p_2)p_1 p_2} .$$

Dá se ověřit, že oba kořeny p_1, p_2 musí být záporné, takže exponenciální funkce se po určité době utlumí. Potom nastane situace, jako by celkový odpor byl $R_1 + R_2$ (při konstantním napětí cívka neklade odpor a kondenzátorem proud neprochází).

8.38 Určete průběh proudu v obvodu na obr. 6 , když v čase $t = 0$ připojíme zdroj elektromotorického napětí $u(t) = u_0 \sin\,\omega t$, $u_0 \in \mathcal{R}$, $\omega \in \mathcal{R}^+$.

Výsledek : $i(t) = \dfrac{u_0}{R^2 + L^2\omega^2}(\ L\ \omega\ e^{-\frac{R}{L}t} + R\ \sin\omega t - L\ \omega\ \cos\omega t\ )$.

Na rozdíl od řešení př. 8.20 se postupuje formálně a tvoří se součet impedancí $R + L\ p$. Vyjde samozřejmě stejný výsledek.

8.39 Určete průběh napětí u_2 v obvodu podle obr. 7 , když v čase $t = 0$ připojíme konstantní zdroj elektromotorického napětí u_0 , $u_0 \in \mathcal{R}$.

Výsledek : $u_2(t) = u_0 \dfrac{R_2 L}{\sqrt{D}} \left(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t} \right)$, kde

$$D = \left(R_1 R_2 - \frac{L}{C} \right)^2 - \frac{4LR_2^2}{C} \text{ a } p_{1,2} = \frac{-(R_1 R_2 + \frac{L}{C}) \pm \sqrt{D}}{2L(R_1 + R_2)} .$$

Tento výsledek se dá použít i v případě, že $D < 0$. V tomto případě má napětí tlumený harmonický průběh. Zvláštní situace nastane pro $D = 0$.

Poslední úloha je jednoduchý příklad použití Laplaceovy transformace při řešení parciální diferenciální rovnice. Je třeba zdůraznit, že počet úloh v parciálních rovnicích, které lze tímto způsobem efektivně řešit, je dost omezený. V žádném případě nemůžeme Laplaceovu transformaci chápat jako univerzální metodu.

8.40 Řešte parciální diferenciální rovnici (tzv. smíšenou úlohu)

$$a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\ ,\quad x\in\mathcal{R}^+\ ,\quad t\in\mathcal{R}^*\ ,\quad a\in\mathcal{R}^+\ ,$$

$$u(x,0)=0\ ,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\ ,\quad u(0,t)=f(t)\ ,$$

která umožňuje stanovit napětovou vlnu $u(x,t)$ pro ideální polonekonečné vedení bez napětí a proudu, kdy v okamžiku $t=0$ na začátek vedení ($x=0$) připojíme elektromotorické napětí $f(t)$.

Řešení : Najdeme Laplaceův obraz dané parciální diferenciální rovnice vzhledem k proměnné t a v obrazech ponecháme x jako parametr. Vzhledem k nulovým počátečním podmínkám pro t dostaneme velmi jednoduchou obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$a^2\,\frac{d^2U(x,p)}{dp^2}=p^2\,U(x,p)\ ,\quad U(0,p)=\mathcal{L}[f(t)]=F(p)\ ,\quad \text{neboli}$$

$$\frac{d^2U(x,p)}{dp^2}\ -\ \left(\frac{p}{a}\right)^2\ U(x,p)\ =\ 0\ ,\quad U(0,p)=F(p)\ .$$

Protože koeficient $\dfrac{x}{a}$ nezávisí na proměnné p . má obecné řešení této diferenciální rovnice tvar (jako u rovnice s konstantními koeficienty)

$$U(p,x)\ =\ C_1(p)\ e^{\frac{x}{a}p}+\ C_2(p)\ e^{-\frac{x}{a}p}\ ,$$

Protože $\dfrac{x}{a}>0$, neexistoval by originál k funkci $e^{\frac{x}{a}p}$. Proto zvolíme $C_1(p)=0$ (možnost volby máme vzhledem k jedné chybějící počáteční podmínce) a potom vyjde $C_2(p)=F(p)$. Obraz hledané funkce je tedy $U(x,p)=F(p)\,e^{-\frac{x}{a}}$. Tato funkce má tvar obrazu zpožděné funkce (viz př. 5.18), takže snadno najdeme originál $u(x,t)=f(t-\dfrac{x}{a})$.

Rejstřík