

Příklady – integrální počet

1. Vypočtěte pomocí vhodných úprav a vzorců pro integrály

$$(a) \int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx \quad [\ln |x| - \frac{1}{4}x^{-4} + C]$$

$$(b) \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx \quad [x - 2\operatorname{arctg} x + C]$$

$$(c) \int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad [-x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C]$$

2. Vypočtěte pomocí vlastností integrovaných funkcí a vzorců:

$$(a) \int \operatorname{tg}^2 x dx \quad [-x + \operatorname{tg} x + C]$$

$$(b) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad [\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C]$$

$$(c) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx \quad [\sin x - \cos x + C]$$

$$(d) \int \sin^4 x dx \quad [\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C]$$

$$(e) \int \operatorname{tgh}^2 x dx \quad [x - \operatorname{tgh} x + C]$$

$$(f) \int \frac{dx}{1+\cos x} dx \quad [\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C]$$

$$(g) \int \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x+1}} dx \quad [\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C]$$

3. Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$(a) \int \sqrt[3]{5-6x} dx \quad [-\frac{1}{8}(5-6x)^{\frac{4}{3}} + C]$$

$$(b) \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} dx \quad [-\sqrt{3-2x} + C]$$

$$(c) \int \cos 3x dx \quad [\frac{1}{3} \sin 3x + C]$$

$$(d) \int e^{-3x} dx \quad [-\frac{1}{3}e^{-3x} + C]$$

$$(e) \int \frac{dx}{\cos^2 5x} \quad [\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C]$$

$$(f) \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx \quad [\frac{2}{5} \sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{4}{7} \sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11} \sin^{\frac{11}{2}} x + C]$$

$$(g) \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx \quad [\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + C]$$

$$(h) \int x \sqrt{1-x^2} dx \quad [-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C]$$

$$(i) \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx \quad [\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x + C]$$

$$(j) \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} \quad [\frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{4}x + C]$$

4. Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$(a) \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx \quad [\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + C]$$

$$(b) \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx \quad [\ln |\sin x \cos x| + C]$$

$$(c) \int \operatorname{tg} x dx \quad [\ln |\cos x| + C]$$

$$(d) \int \frac{\sin x}{1+3 \cos x} dx \quad [-\frac{1}{3} \ln |1+3 \cos x| + C]$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \int \frac{dx}{x(1+\ln x)}; \quad x > 0 & \quad [\ln |1 + \ln x| + C] \\ \text{(f)} \quad \int \frac{\cos x}{a^2 + \sin^2 x} dx & \quad [\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x}{a} \right) + C] \end{aligned}$$

5. Pomocí metody per partes a a substituční metody vypočtete

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int x e^{2x} dx & \quad [\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C] \\ \text{(b)} \quad \int \frac{x}{e^x} dx & \quad [-\frac{x+1}{e^x} + C] \\ \text{(c)} \quad \int x^2 e^{3x} dx & \quad [\frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C] \\ \text{(d)} \quad \int x^2 \cos x dx & \quad [(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C] \\ \text{(e)} \quad \int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx & \quad [\frac{2x^2+10x+11}{4} \sin 2x + \frac{2x+5}{4} \cos 2x + C] \\ \text{(f)} \quad \int x^2 \ln x dx & \quad [\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^2}{9} + C] \\ \text{(g)} \quad \int \ln^2 x dx \quad x > 0 & \quad [x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C] \\ \text{(h)} \quad \int \frac{\ln x}{x^3} dx & \quad [-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C] \\ \text{(i)} \quad \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx & \quad [2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C] \\ \text{(j)} \quad \int \arcsin x dx & \quad [x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C] \\ \text{(k)} \quad \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx & \quad [x \operatorname{arctg} x - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C] \\ \text{(l)} \quad \int x \operatorname{arctg} x dx & \quad [\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C] \\ \text{(m)} \quad \int 3^x \cos x dx & \quad [\frac{3^x (\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + (\ln 3)^2} + C] \end{aligned}$$

6. Vypočtete neurčitý integrál z racionální funkce lomené:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int \frac{x^3}{x^2+3x+2} + C dx & \quad [\frac{1}{2} x^2 - 3x + \ln \frac{(x+2)^8}{|x+1|} + C] \\ \text{(b)} \quad \int \frac{2x+7}{x^2+x-2} & \quad [\ln \frac{|x-1|^3}{|x-2|} + C] \\ \text{(c)} \quad \int \frac{dx}{x^2+7x+12} & \quad [\ln \left| \frac{x+3}{x+4} \right| + C] \\ \text{(d)} \quad \int \frac{x dx}{x^3+2x^2-x-2} & \quad [\frac{1}{6} \ln \frac{|(x+1)^3(x-1)|}{(x+2)^4} + C] \\ \text{(e)} \quad \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx & \quad [\frac{1}{x} - \ln |x| + \ln |x-2| + C] \\ \text{(f)} \quad \int \frac{5x-1}{x^3-3x-2} dx & \quad [-\frac{2}{x+1} + \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C] \\ \text{(g)} \quad \int \frac{x+4}{x^3+4x^2+4x} dx & \quad [\frac{1}{x+2} + \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C] \\ \text{(h)} \quad \int \frac{dx}{x^4-2x^3+2x-1} & \quad [-\frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C] \\ \text{(i)} \quad \int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx & \quad [-\frac{1}{x+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} + \operatorname{arctg} x + C] \end{aligned}$$

7. Vypočtete integrál z iracionální funkce

$$\text{(a)} \quad \int \frac{1}{1-\sqrt{x}} dx \quad [-2\sqrt{x} - 2 \ln |\sqrt{x} - 1| + C]$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx & \quad [2\sqrt{x} - 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + C] \\ \text{(c)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx & \quad [2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C] \end{aligned}$$

8. Vypočtěte integrály goniometrických funkcí

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int \frac{1}{\cos x} dx & \quad \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C \right] \\ \text{(b)} \quad \int \sin^5 x dx & \quad \left[-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C \right] \\ \text{(c)} \quad \int \sin^2 x dx & \quad \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C \right] \\ \text{(d)} \quad \int \cos^2 x dx & \quad \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C \right] \\ \text{(e)} \quad \int \sin^2 x \cos^2 x dx & \quad \left[\frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C \right] \\ \text{(f)} \quad \int \sin^4 x dx & \quad \left[\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \right] \\ \text{(g)} \quad \int \cos^4 x dx & \quad \left[\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \right] \end{aligned}$$

9. Vypočtěte integrály transcendentních funkcí

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int \frac{dx}{(1+e^x)^2} & \quad \left[x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + C \right] \\ \text{(b)} \quad \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx & \quad \left[e^x - \ln(1+e^x) + C \right] \\ \text{(c)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} & \quad \left[-2 \arcsin(e^{-\frac{x}{2}}) + C \right] \end{aligned}$$

10. Vypočtěte integrály:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_{-1}^2 (x^2 - 5x + 2) dx & \quad \left[\frac{3}{2} \right] \\ \text{(b)} \quad \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx & \quad \left[\frac{63}{24} \right] \\ \text{(c)} \quad \int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2} dx & \quad \left[\frac{7}{4} \right] \\ \text{(d)} \quad \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} dx & \quad \left[\frac{7}{12} \right] \\ \text{(e)} \quad \int_0^{\pi} \sin x dx & \quad \left[2 \right] \end{aligned}$$

11. Vypočtěte pomocí vhodné substituce:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_0^{\sqrt{\ln 2}} x e^{x^2} dx & \quad \left[\frac{1}{2} \right] \\ \text{(b)} \quad \int_0^2 \frac{x^2}{(x^3+2)^2} dx & \quad \left[\frac{2}{15} \right] \end{aligned}$$

$$(c) \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx \quad \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$(d) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx \quad \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$(e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx \quad \left[\frac{\pi}{3} \right]$$

12. Vypočtete integrováním po částech:

$$(a) \int_0^1 x e^{-x} \, dx \quad \left[1 - 2e^{-1} \right]$$

$$(b) \int_1^2 \ln x \, dx \quad \left[2 \ln 2 - 1 \right]$$

$$(c) \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx \quad \left[-2\pi \right]$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx \quad \left[\frac{1}{5} e^{\pi} - \frac{2}{5} \right]$$

$$(e) \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx \quad \left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

13. Vypočtete obsah oblasti ohraničené grafy funkcí $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. $\left[\frac{1}{3} \right]$

14. Vypočtete obsah oblasti ohraničené grafem funkce $y = x - x^3$ a osou x . $\left[\frac{1}{4} \right]$

15. Určete obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = -x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$. $\left[\frac{16}{3} \sqrt{2} \right]$

16. Určete obsah obrazce ohraničeného osou x a grafem funkce $y = -x^2 + 4x - 3$. $\left[\frac{4}{3} \right]$

17. Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2$, $x = y^2$. $\left[\frac{1}{3} \right]$

18. Vypočtete obsah oblasti ohraničené grafy funkcí $y = x^4 - 4x^2$, $y = 4 - x^2$. $\left[\frac{96}{5} \right]$

19. Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$. $\left[1 \right]$

20. Vypočtete obsah oblasti ohraničené křivkami o rovnicích $x^2 + y^2 = 2$, $y = x^2$. $\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \right]$

21. Vypočtete obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$, $g(x) = x^2$. $\left[\pi - \frac{2}{3} \right]$

22. Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = e^x$, $y = e^{-1}$, $x = 1$. $\left[e + e^{-1} - 2 \right]$

23. Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 1$. (Využijte symetrie obrazce.) $\left[\frac{4}{3} \right]$