1. (omezenost, monotónie posloupností) Vypočtěte prvních pět členů daných posloupností a rozhodněte o jejich omezenosti a monotónnosti.

   (a) $a_n = (-1)^{n-1}(3 - \frac{2}{n+1})$
   (b) $a_n = (-1)^{n-2}\frac{n+2}{n}$
   (c) $a_n = \frac{n}{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$
   (d) $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{n\sqrt{n^2+1}}$
   (e) $a_n = \frac{4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+3)}{4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}$
   (f) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{(2n)! + (n-1)!}{(n+1)!}$
   (g) $a_n = \frac{4^n}{\sqrt{n+2}\cdot 3^n}$
   (h) $a_n = \frac{2^{n+1}}{n\cdot 3^n}$
   (i) $a_n = \frac{2^n}{(3+(-1)^n)^n}$
   (j) $a_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$
   (k) $a_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+3}$
   (l) $a_n = \sqrt[n]{n}$
   (m) $a_n = \frac{\ln n}{n}$.

2. (limity posloupností) Stanovte $\sup\{a_n\}$, $\inf\{a_n\}$, $\overline{\lim}\ a_n$, $\underline{\lim}\ a_n$ a $\lim_{n\to\infty} a_n$ daných posloupností.

   (a) $a_n = n + 3$
   (b) $a_n = \frac{4}{3n+1}$
   (c) $a_n = (-1)^{n-1}(3 - \frac{2}{n+1})$
   (d) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+1}$
   (e) $a_n = \frac{5n^2+3}{-n^2+1}$
   (f) $a_n = \frac{3n^3+8}{2n^2+5n+9}$
   (g) $a_n = \frac{-n+1}{\sqrt{n^2+1}}$
   (h) $a_n = \sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}$
   (i) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$
   (j) $a_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$
   (k) $a_n = \frac{n}{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$
   (l) $a_n = \frac{5^n}{3^n}$
   (m) $a_n = \frac{2^n}{2+3^n}$
   (n) $a_n = \frac{n}{3^n}$
   (o) $a_n = \frac{n+2}{\ln(n+1)}$
   (p) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$
   (q) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n!}{n^{n-1}}$
   (r) $a_n = \frac{2^{n+1}}{n\cdot 3^n}$
   (s) $a_n = \frac{(n+2)^n}{n^n}$
   (t) $a_n = \frac{(n-3)^n}{n^n}$
   (u) $a_n = \sqrt[n]{4}$
   (v) $a_n = \sqrt[n]{n+1}$.

3. (základní vlastnosti funkcí) Najděte definiční obor, rozhodněte o sudosti, lichosti, omezenosti funkce $f$.

   (a) $f(x) = \sin(x+\pi)$
   (b) $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{2})$
   (c) $f(x) = \mathrm{tg}\,(-x)$
   (d) $f(x) = \sqrt{6+x-x^2}$
   (e) $f(x) = |x^2 - 2x + 1|$
   (f) $f(x) = 1 + |x^3 - 1|$
   (g) $f(x) = e^{-|x|}$
   (h) $f(x) = \ln|x|$
   (i) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
   (j) $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$
   (k) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \arccos x$
   (l) $f(x) = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{|x|}$
   (m) $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$
   (n) $f(x) = \frac{1}{|x|^3}$.

4. (limity funkcí) Spočítejte následující limity.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^3)}{6x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-1}{1-x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\sin x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x^2}{-x}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+1}{3x^2+2}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^4)}{6x}$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x \cdot x}{x}$

(n) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{5x}}{x+7}$

(o) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x+1}}{x-2}$

(p) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3^x}{2^x+e^x}$.

5. (nespojitost) Stanovte body a druh nespojitosti funkcí.

(a) $f(x) = \operatorname{sign} x$

(b) $f(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$

(e) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{|x|}$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$

(g) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

(h) $f(x) = \dfrac{2^x-1}{4^x-1}$

(i) $f(x) = \dfrac{x}{\ln|2x|}$

(j) $f(x) = \ln|x-3|$

(derivace) Spočítejte derivace následujících funkcí.

(a) $f(x) = \arccos(3x+2)$

(b) $f(x) = 3^{-4x}$

(c) $f(x) = 1-|x^2-2|$

(d) $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(e) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2x}$

(f) $f(x) = \cos\dfrac{x}{x+1} \cdot \operatorname{tg} 3x$

(g) $f(x) = x^x$, $x>0$

(h) $f(x) = (3x)^{\operatorname{cotg} x}$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

(j) $f(x) = \operatorname{argtgh}\sqrt{x}$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})\cdot\cosh 2x$

(l) $f(x) = \arcsin\sqrt[3]{1-x^2}$

(m) $f(x) = \dfrac{1}{|x|^3}\cdot\sin x$

6. (monotónnost) Stanovte oblasti monotónnosti, stacionární body a extrémy funkce $f$.

(a) $f(x) = 2+x-x^2$

(b) $f(x) = 3-x^3$

(c) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

(d) $f(x) = xe^{-x}$

(e) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

(f) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2} - \ln(1+x)$, $x>-1$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$

(h) $f(x) = \cosh x$, $x\in\mathbb{R}$

(i) $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$

(j) $f(x) = x+\ln(1+x^2)$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(l) $f(x) = (x-2)e^{|x|}$

7. (křivost)

Určete intervaly konvexnosti, konkávnosti, inflexní tečny a asymptoty funkce $f$.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

(c) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{3x^3}$

(d) $f(x) = x\ e^x$

(e) $f(x) = (x-3) \cdot e^{|x|}$

(f) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

(g) $f(x) = |x| \cdot e^x$

(h) $f(x) = \ln x - \dfrac{x^3}{3}$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$

(j) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$

(k) $f(x) = e^x \cdot |x|^3$

(l) $f(x) = (x+2)^4 \cdot (x-1)$

(m) $f(x) = (1-x^2)^3$

(n) $f(x) = (x-3)^2 \cdot \mathrm{e}^{-|x|}$

(o) $f(x) = (x-2) \cdot e^{|x|}$

8. (Základní primitivní funkce)

Najděte primitivní funkci k funkci $f$.

(a) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $f(x) = \dfrac{4}{3+3x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{-5}{2-2x^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{3+2x+x^2}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^3-5x^2+4x+3}{x^2-5x+6}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+12x-15}{x^3-2x^2+5x}$

(i) $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2(x-1)}$

(j) $f(x) = \dfrac{-1}{\cos^2 3x}$

(k) $f(x) = e^{2x} + \dfrac{-3}{2^x}$

(l) $f(x) = \dfrac{6}{-3\sinh^2 x}$

(m) $f(x) = \dfrac{1}{3\cosh^2(5x+1)}$

(n) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2-1}}$

(o) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{x^2+4}}$

Najděte primitivní funkci k funkci $f$.

(a) $f(x) = x \sin x$

(b) $f(x) = x^2 \cos x$

(c) $f(x) = \arcsin x$

(d) $f(x) = \arccos 2x$

(e) $f(x) = x\operatorname{arctg} x$

(f) $f(x) = |\ln x|$

(g) $f(x) = xe^{-x}$

(h) $f(x) = \cos x \sin x$

(i) $f(x) = \cos 3x \cos 2x$

(j) $f(x) = \sin(-3x) \sin 5x$

(k) $f(x) = \dfrac{-3}{\cos 4x}$

(l) $f(x) = \cos^2 x$

(m) $f(x) = \sin^3 2x$

(n) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

(o) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x + 3}$

9. (určitý integrál) Vypočítejte

(a) $\int_0^1 x(2-x)^{12}\,dx$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$

(c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

(d) $\int_1^e x\ln x\,dx$

(e) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

(f) $\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}\,dx$

(g) $\int_0^\pi \frac{1}{3+2\sin x}\,dx$

(h) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

(i) $\int_1^e \ln\sqrt{x}\,dx$

(j) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx$

10. (nevlastní integrály) Vypočítejte

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

(c) $\int_0^\infty \operatorname{arctg} x\,dx$

(d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

(e) $\int_{-4}^4 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$

(f) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

(g) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+4x^2}$

(h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

(j) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx$

(k) $\int_0^\infty \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

(l) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx\,.$

11. (separace) Metodou separace proměnných (popř. přechodem k separovatelným proměnným) vyřešte diferenciální rovnice

(a) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$

(b) $(x^2+1)(y^2-1)+xyy'=0$

(c) $y'=\sin(x-y)$

(d) $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

(e) $y^2+(x^2-xy)y'=0$

(f) $(x+y)^2y'=4$

(g) $x-y+xy'=0$

(h) $y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)=xy'$

(i) $(x^2-1)y'+2xy^2=0\,;\ y(0)=1$

(j) $e^xy-y'(e^x+1)=0\,.$

12. (variace konstanty) Metodou variace konstanty vyřešte diferenciální rovnice

(a) $xy'-2y=2x^4$

(b) $xy'+y+1=0$

(c) $y'-\frac{\cos x}{\sin x}y=e^x\sin x$

(d) $(x+1)y'-2y=(x+1)^4$

(e) $y'-y=2x-3$

(f) $y'+(y-1)\operatorname{tg} x=0$

(g) $xy'-\frac{y}{x+1}=x\,;\ y(1)=2$

(h) $y'+\frac{y}{x}=x$

(i) $y'+y\cos x=\cos x\,.$