

Domácí úkoly z předmětu M1S pro kombinované studium - 2019

Pro získání zápočtu je třeba tyto úkoly správně vyřešit a odevzdat nejméně týden před zkouškou.

1. Vyplňte tabulku pravdivostních hodnot pro následující výrok:

$$[A \iff (B \vee \neg C)] \Rightarrow \neg [C \wedge (A \vee B)]$$

2. Dokažte matematickou indukcí následující tvrzení:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

3. Pro následující množiny určete jejich infimum, supremum, minimum a maximum (pokud existují)

a) $(0, 3)$,

b) $\{0, 1, 2, 3, 4, \frac{7}{4}\}$,

c) $n > \frac{3}{2}, n \in \mathbb{R}$.

4. Pro následující posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ načrtněte graf, rozhodněte o monotonii a omezenosti, určete minimum, maximum, infimum a supremum a vypočítejte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

a) $a_n = n^2 - 8n + 15$,

b) $a_n = 100n - 3^n$,

c) $a_n = 5 + \frac{1}{n+1}$.

5. Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde

a) $a_n = \frac{2^{n+2} + 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}$,

b) $a_n = \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^3}$,

c) $a_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+5}$.

6. Vypočítejte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{2n+5}}{3^{n-1} 2^{n+2}}.$$

7. Zjistěte, zda je řada konvergentní nebo divergentní

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^{2n-1}}.$

8. Načrtněte do jednoho obrázku grafy následujících funkcí s vyznačením význačných bodů (např. průsečíky s osami apod.)

$$\sin(x), \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin(x + \pi) - 5, \quad 3 \sin(3x).$$

9. Pro funkci

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{3}}$$

určete inverzní funkci $g(x) = f^{-1}(x)$ a načrtněte graf obsahující funkce $f(x)$, $g(x)$.

10. Určete body nespojitosti funkce

$$f(x) = \frac{3}{e^{\frac{x}{x-4}} - 1}$$

a jejich typ.

11. Vypočítejte následující limity funkcí

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x + e^x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos(x) - 2x - 4}{5x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-x^2 + 6x - 3}{x+7}}$

12. Vypočítejte derivaci funkce

a) $f(x) = \frac{\cos(2x - 1)}{e^{x^2}}$

b) $f(x) = \ln(\sqrt{2x}) \cdot \sqrt[3]{x^2 - x}$

c) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}(6x - 2)}{3^{x+1}}$

13. Nalezněte a určete lokální extrémy funkce $f(x)$, načrtněte obrázek

$$f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 27x - 1.$$

14. Pro funkci $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$ určete

- definiční obor,
- intervaly monotonie, intervaly konvexnosti a konkávnosti,
- limity v krajních bodech definičního oboru,
- lokální extrémy, obor hodnot,
- případné rovnice asymptot v nevlastních bodech,
- načrtněte průběh grafu funkce, včetně funkčních hodnot významných bodů.

15. Pro funkci $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 3)$ určete

- definiční obor,
- intervaly monotonie, intervaly konvexnosti a konkávnosti,
- limity v krajních bodech definičního oboru,
- lokální extrémy, obor hodnot,
- případné rovnice asymptot v nevlastních bodech,
- načrtněte průběh grafu funkce, včetně funkčních hodnot významných bodů.

16. Pro funkci $f(x) = \frac{3x + 1}{2 - x}$ určete Taylorův polynom druhého stupně v bodě $x_0 = 1$.

17. Vypočítejte následující neurčité integrály

a) $\int \left(\frac{1}{x^4} + 2x^3 - \cos 5x \right) dx$

b) $\int \frac{2}{9x^2 + 1} dx$

c) $\int x^3 e^{2x} dx$