Cvičení – KMT/MCH2 (diferenciální pohybové rovnice)

1. Auto jedoucí počáteční rychlostí  a mající hmotnost 800 kg začne brzdit konstantní brzdnou silou 2400 N. Za jak dlouho zastaví a jaká bude jeho brzdná dráha?

F = m\*a a = -3m/s2. v0 = 30 m/s. t = v0/a = 10 s. s=vp\*t=15\*10 = 150 m.

1. Uvažujme, že v předchozím případě auto nebude brzdit v důsledku konstantní síly, ale že tato síla bude přímo úměrná rychlosti auta (tj. , což odpovídá odporu vzduchu při laminárním proudění (tzv. Stokesův vzorec) Najděte závislost rychlosti na čase  a rovněž závislost uražené dráhy na čase  pro tento případ.

F = m\*a

-k\*v = m\*a

-k\*v = m\*(dv/dt)

Separace promennych : -k/m\*dt = dv/v

1. Jak se situace změní, když bude odporová síla přímo úměrná 2. mocnině rychlosti (tj.

F = m\*a

-k\*v = m\*a

-k\*v2 = m\*(dv/dt)

Separace promennych : -k/m\*dt = dv/v2

4. Uvažujeme auto rozjíždějící se s konstantním výkonem *P*. Sestavte pohybovou rovnici a stanovte závislost rychlosti na čase *v(t)* a dráhy na čase *s(t)* pro případ, že můžeme zanedbat odporovou sílu vzduchu působící proti pohybu auta. Zanedbejte odpor vzduchu.

***Řešení:*** *Vyjdeme ze známého vztahu mezi výkonem, výslednou silou a rychlostí Výslednou sílu F rozepíšeme podle 2. Newtonova zákona ve tvaru Dále si uvědomíme, že zrychlení je derivací rychlosti podle času: Postupmným dosazením dostáváme diferenciální rovnici 1. řádu pro neznámou funkci rychlosti na čas v(t): .*

*Tuto diferenciální rovnici vyřešíme metodou separace proměnných. Musíme si však uvědomit, že ke zjištění jednoznačného (partikulárního) řešení, které požadujeme, je třeba mít u rovnice 1. řádu jednu počáteční podmínku. Tou je ovšem nulová rychlost na začátku pohybu, tj. v(0)=0. Řešení bychom mohli provést klasickým postupem z matematiky, tj. s nalezením obecného řešení a následným dosazením počáteční podmínky. Ve fyzice se však častěji postupuje tak, že po separování „nasadíme” rovnou určité integrály, přičemž dolní meze jsou dány počátačním stavem sledovaných proměnných (v našem případě oboje 0, protože v čase 0 s je rychlost nulová) a horní meze jsou dány stavem koncovým, což je v našem případě obecně rychlost v a čas t (hledáme obecnou závislost). Získáváme tak:*

*.*

*Při integraci jsme dávali pozor na to, že výkon P a hmotnost m jsou konstanty, můžeme je tudíž dát před integrál. Zjistili jsme závislost rychlosti na čase a požadovou dráhu na čase s(t) již určíme snadno pomocí integrace rychlosti na čase:*

*Máme tak zjištěnu i časovou závislost dráhy. Ještě ukažme výhodu uvedeného přístupu s výpočtem určitých integrálů po separaci s mezemi danými počátečními a koncovými podmínkami. Uvažujme, že úloha by nebyla zadána na obecné stanovení rychlosti na čase v(t), ale ptali bychom se, jaká bude konkrétně rychlost v čase 5 s. V takovém případě by horní meze u výše uvedené diferenciální rovnice nebyly obecně v a t, ale za čas bychom uvedli 5 sekund, u ryhclosti bychom pak měli přímo rychlost v tomto čase Dostali bychom:*

*Při znalosti hmotnosti auta m a výkonu P bychom tak získali rovnou číselnou hodnotu rychlosti po uplynutí 5 sekund po rozjezdu z klidu.*

5. Řešte předchozí příklad za předpokladu, že odporová síla vzduchu je přímo úměrná rychlosti *v,* tj.  Sestavte pohybovou rovnici a určete, jaké maximální rychlosti může auto dosáhnout.

6. Uvažujme volný pád kuličky ve vzduchu s odporovou silou vzduchu přímo úměrnou 2. mocnině rychlosti kuličky. Zanedbejte vztlakovou sílu ve vzduchu a určete:

a) maximální možnou rychlost kuličky *v*max.

b) závislost rychlosti kuličky na čase *v*(*t*)

c) závislost rychlosti kuličky na uražené dráze *v*(*s*).

7. Rotor s počáteční úhlovou rychlostí  je brzděn momentem síly přímo úměrným druhé mocnině velikosti úhlové rychlostí (tj.  Určete závislosti úhlové rychlosti a úhlové dráhy uražené během brzdění na čase, tj. 

M = J\*ε

-k\*ω2 = J\*ε

-k\* ω 2 = m\*(dω/dt)

Separace promennych : -k/J\*dt = dω/ω 2

8. Uvažujeme rotor roztáčející se s  výkonem *P* klesajícím s rostoucí úhlovou rychlostí vztahem kde *A* i *B* jsou konstanty.

a) sestavte pohybovou rovnici.

b) určete, jaké maximální úhlové rychlosti může rotor dosáhnout.

c) řešte pohybovou rovnici a stanovte závislost rychlosti na čase *ω(t)* pro případ, že můžeme zanedbat odporovou sílu vzduchu.

**Nápověda k příkladům 7 a 8:** Výkon rotoru se spočte pomocí vztahu 

**Řešení:**

a) Při sestavení pohybové rovnice využijeme rotační analogii známého vztahu mezi výkonem, výslednou silou a rychlostí (viz předchozí příklad) V případě rotace nahradíme výslednou sílu *F* výsledným momentem sil *M* a rychlost *v* úhlovou rychlostí Dostáváme tam vztah Nyní aplikujeme vztah pro rotaci tuhého tělesa (analogii 2. Newtonova zákona) ve tvaru kde *J* je moment setrvačnosti rotoru vzhledem k řešené ose. Uvědomíme si, že úhlové zrychlení *ε* je časovou derivací úhlové rychlosti *ω*, tj. . Nyní dosadíme (včetně v zadání uvedeného vztahu pro závislost výkonu *P* na úhlové rychlosti *ω*) a získáváme pohybovou diferenciální rovnici pro neznámou funkci *ω(t):*

Hodnoty *A, B* a *J* jsou přitom konstanty.

b) K nalezení maximální úhlové rychlosti si stačí uvědomit, že tato rychlost bude dosažena v okamžiku, kdy se již zprvu narůstající úhlová rychlost (rotor se roztáčí z klidu) dále nemění v důsledku poklesu výkonu. Neměnnost úhlové rychlosti je ale ekvivalentní nulovosti její časové derivace a tím i celé pravé strany výše uvedené pohybové rovnice. Tím pádem pro maximální rychlost dostávámepo úpravě jednoduchý vztah:

*.*

*c*) Nyní provedeme samotné řešení pohybové rovnice odvozené v části a. Jde o separovatelnou diferenciální rovnici, přičemž integraci provedeme stejně jako v minulé úloze pomocí určitého integrálu v mezích daných počátečním stavem (dolní mez, počáteční čas i rychlost jsou rovny nule, protože se rotor roztáčel z klidu) a koncovým stavem (horní mez, protože nám jde o časovou závislost *ω(t*), budou uvedeny obecné hodnoty *ω a t).*

Při integraci jsme na pravé straně užili trik, že pokud máme v čitateli připravenu derivaci jmenovatele, je výsledkem integrálu přirozený logatitmus jmenovatele (derivaci jmenovatele jsme si tam uměle připravili). Je třeba dávat pozor na to, že u logaritmu je nutné poctivě dosadit i dolní mez. Následně je třeba užít pravidlo pro rozíl logaritmů a poté odlogaritmovat tak, abychom dostali časovou závislost úhlové rychlosti *ω*. Získaný výsledek je rozumný, protože při uvážení velkého času bude exponenciela konvergovat k nule a úhlová rychlost se tak bude blížit k mezní hodnotěPrávě tuto mezní hodnotu jsme však získali v předchozí části úlohy.

9. Ocelovou kuličku o hmotnosti *m* položíme do sklenice s medem. Odporová síla ***F***odp, působící na kuličku, je přímo úměrná její rychlosti.

a) Určete, jak velkou maximální rychlost *v*max může kulička dosáhnout.

b) Určete průběh velikosti rychlosti *v*(*t*) kuličky.