Fyzikální úlohy – mechanika

1. FYZIKÁLNÍ ÚLOHA

Těleso padá volným pádem z výšky 45 m. Určete dobu jeho pádu a rychlost dopadu. Tíhové zrychlení je 10 m·s^{-2}.

---

s = 45 m
g = 10 m·s^{-2}
t = ?
v = ?

Pro dráhu tělesa padajícího volným pádem platí vztah

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Jestliže známe dráhu s a tíhové zrychlení g, můžeme bez problému vyjádřit ze vzorce dobu pádu t a následně dosadit konkrétní hodnoty.

$$t^2 = \frac{2s}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} = \mathbf{3\ s}$$

Rychlost volného pádu se počítá pomocí vzorce

$$v = gt.$$

Vzhledem k tomu, že známe jak tíhové zrychlení g, tak i námi dopočítanou dobu pádu t, stačí pouze do vztahu dosadit hodnoty.

$$v = 10 \cdot 3 = \mathbf{30\ m \cdot s^{-1}}$$

Těleso padá 3 s, rychlost dopadu je 30 m·s$^{-1.}$

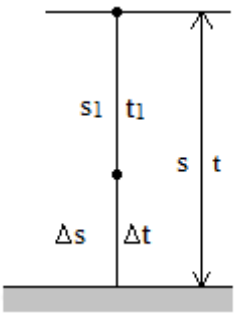
2. FYZIKÁLNÍ ÚLOHA

Těleso urazilo při volném pádu posledních 60 m dráhy za dvě sekundy. Jak dlouho a z jaké výšky těleso padalo? Tíhové zrychlení je 10 m·s^{-2}.

---

g =10 m·s^{-2}
Δt = 2 s
Δs = 60 m
s = ?

Abychom si celou situaci lépe představili, nakreslíme obrázek.



t je doba volného pádu z výšky *s* a t_1 je doba volného pádu z výšky s_1

1. ZPŮSOB ŘEŠENÍ:

Dráha tělesa Δs za dobu Δt je rovna rozdílu drah

$$\Delta s = s - s_1.$$

Pro dráhu volného pádu platí vztah

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

který můžeme dosadit do rozdílu drah:

$$\Delta s = \tfrac{1}{2} g t^2 - \tfrac{1}{2} g {t_1}^2 = \tfrac{1}{2} g (t^2 - {t_1}^2).$$

Dobu volného pádu z výšky s_1 lze vyjádřit vztahem $t_1 = t - \Delta t$.

$$\Delta s = \frac{1}{2} g (t^2 - (t - \Delta t)^2)$$

Vztah následně můžeme s využitím matematického vzorce

$$(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

upravit:

$$\Delta s = \frac{1}{2} g (t^2 - t^2 + 2t\Delta t - \Delta t^2)$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} g \cdot 2t \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2.$$

Nyní máme rovnost, ve které známe g, Δt, Δs a neznáme pouze t, které si jednoduše vyjádříme a dopočítáme.

$$2\Delta s = g \cdot 2t \cdot \Delta t - g \Delta t^2$$

$$\frac{2\Delta s}{g \Delta t} = 2t - \Delta t$$

$$\frac{2\Delta s}{g \Delta t} + \Delta t = 2t$$

$$t = \frac{2\Delta s + g \Delta t^2}{2 g \Delta t} = \frac{2 \cdot 60 + 10 \cdot 2^2}{2 \cdot 10 \cdot 2} = \mathbf{4\ s}.$$

Dráha tělesa, které padá volným pádem, se počítá již zmíněným vztahem

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

do něhož stačí pouze dosadit konkrétní hodnoty

$$s = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 = \mathbf{80\ m}.$$

Těleso padalo po dobu 4 s z výšky 80 m.

2. ZPŮSOB ŘEŠENÍ: (úvahou)

Volný pád je rovnoměrně zrychlený pohyb. Proto můžeme určit dráhu, kterou těleso urazí v časovém intervalu Δt vztahem

$$\Delta s = v_p \cdot \Delta t,$$

kde v_p je průměrná rychlost na úseku Δs.

Průměrnou rychlost lze jednoduše vypočítat ze zadaných hodnot

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{60}{2} = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Nyní si stačí uvědomit, že při volném pádu majícím nulovou počáteční rychlost je zrychlení g = 10 m·s^{-2}. To znamená, že každou sekundu se rychlost padajícího tělesa zvětší o 10 m·s^{-1}. Průměrná rychlost na posledních 60 m je 30 m·s^{-1}. Od začátku pohybu je tedy dosažena za 3 s. Zároveň je tato rychlost dosažena v polovině dvousekundového intervalu Δt (tedy po 1 s). Z toho vyplývá, že těleso padalo 2 s než vstoupilo do sledovaného úseku Δs a ve sledovaném úseku padalo taktéž 2 s. Celý volný pád trval **4 s**.

Nyní můžeme vypočítat výšku pádu tělesa ze vzorce

$$s = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 = \mathbf{80\ m}.$$

Těleso padalo 4 s z výšky 80 m.

3. FYZIKÁLNÍ ÚLOHA

Řidič automobilu začne při rychlosti 20 m·s^{-1} brzdit. Automobil se při brzdění pohybuje se stálým zrychlením o velikosti 4 m·s^{-2}. Určete dobu, za kterou automobil zastaví, a vypočtěte brzdnou dráhu. Nakreslete graf závislosti dráhy automobilu na čase.

---

v_0 = 20 m·s^{-1}
a = 4 m·s^{-2}
t = ?
s = ?

Pro velikost rychlosti hmotného bodu, který se pohybuje rovnoměrně zpomaleně s počáteční rychlostí v_0 a zrychlením a, platí:

$$v = v_0 - at.$$

Vyjádřením t a následným dosazením hodnot vypočítáme dobu, během níž automobil zastaví. (Je nutné si uvědomit, že rychlost v bude nulová, protože automobil v čase t stojí.)

$$t = \frac{v_0 - v}{a} = \frac{20 - 0}{4} = \mathbf{5\ s}$$

Závislost dráhy rovnoměrně zpomaleného pohybu na čase udává vztah

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2.$$

Po dosazení dostaneme dráhu, kterou automobil ujede než zabrzdí.

$$s = 20 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 = \mathbf{50\ m}$$

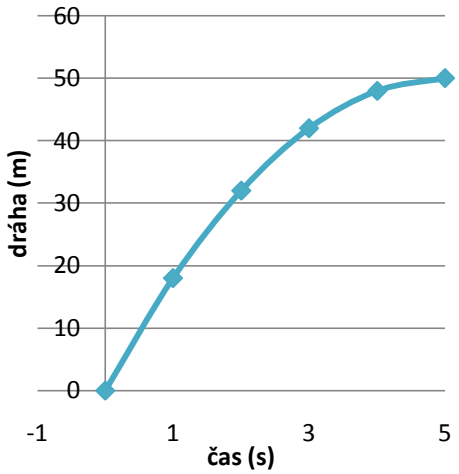
Automobil zastavil za 5 s, jeho brzdná dráha je 50 m.

Abychom mohli nakreslit závislost dráhy automobilu na čase, sestavíme si tabulku podle zmiňovaného vzorce

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2.$$

čas t (s)	0	1	2	3	4	5
dráha s (m)	0	18	32	42	48	50

Posledním krokem je zanesení hodnot do grafu.



4. FYZIKÁLNÍ ÚLOHA

Jaká je nejkratší vzdálenost, na které může zastavit automobil, který jede po vodorovné silnici rychlostí 72 km·h^{-1}, je-li součinitel smykového tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky 0,25? Předpokládejte, že automobil jede s vyřazeným rychlostním stupněm, a všechny další odporové síly zanedbejte.

---

v = 72 km·h^{-1} = 20 m·s^{-1}
f = 0,25
s = ?

1. ZPŮSOB ŘEŠENÍ

Dráhu, na které automobil zastaví, vypočítáme dosazením do vzorce

$$s = \frac{1}{2} a t^2.$$

Vzhledem k tomu, že neznáme čas ani zrychlení, musíme si tyto veličiny vyjádřit pomocí součinitele smykového tření a rychlosti.
Jako první použijeme Newtonův zákon síly

$$F = m \cdot a,$$

kde m je hmotnost tělesa, a zrychlení.

Vyjádření třecí síly je druhým důležitým vztahem

$$F = f \cdot F_n,$$

f je součinitel smykového tření a $\boldsymbol{F_n}$ kolmá tlaková síla mezi tělesy.

Porovnáme-li dva vzorce pro výpočet síly a následně $\boldsymbol{F_n}$ rozepíšeme pomocí gravitační konstanty a hmotnosti ($F_n = m \cdot g$), vyjádříme zrychlení.

$$F = m \cdot a = f \cdot F_n$$
$$m \cdot a = f \cdot m \cdot g$$
$$a = f \cdot g$$

Prostřednictvím zrychlení už snadno nalezneme vztah pro čas.

$$v = a \cdot t \ \rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{v}{fg}$$

Po dosazení:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}fg\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}fg\left(\frac{v}{fg}\right)^2 = \frac{1}{2}fg\frac{v^2}{f^2g^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{fg} = \frac{20^2}{2 \cdot 0{,}25 \cdot 10} = \frac{400}{5} = \mathbf{80\ m}$$

Nejkratší vzdálenost, na které může zastavit automobil, je 80 m.

2. ZPŮSOB ŘEŠENÍ (úvahou)

Kinetická energie jedoucího automobilu je vyjádřena vztahem

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Při brzdění se přemění na vnitřní energii, přičemž práce vykonaná proti třecí síle $\boldsymbol{F_t}$ do úplného zastavení tělesa musí být rovna právě počáteční kinetické energii.

Práci proti třecí síle vyjádříme vztahem

$$W = F_t \cdot s,$$

kde s je nejkratší dráha, na které může automobil zastavit.
Pro třecí sílu $\boldsymbol{F_t}$ platí rovnost

$$F_t = F_n \cdot f = m \cdot g \cdot f.$$

Vzhledem k tomu, že se kinetická energie a práce vykonaná proti třecí síle rovnají, můžeme vyjádřit bez problému dráhu s:

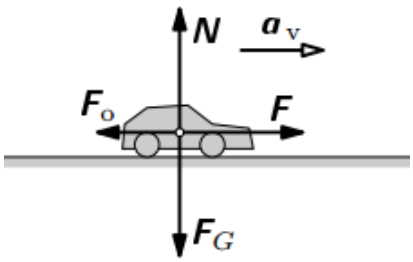
$$\mathrm{E_k = W}$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{mv^2 = F_t \cdot s = m \cdot g \cdot f \cdot s}$$
$$\mathrm{s} = \frac{\mathrm{v}^2}{2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{f}} = \frac{20^2}{2 \cdot 10 \cdot 0{,}25} = \mathbf{80\ m}$$

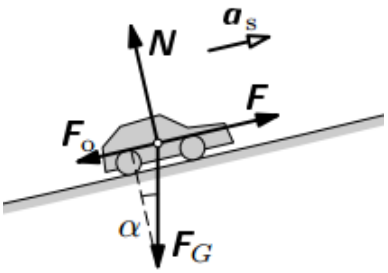
Nejkratší vzdálenost, na které může zastavit automobil, je 80 m.

5. FYZIKÁLNÍ ÚLOHA

Osobní automobil se rozjíždí po vodorovné silnici se zrychlením velikosti $a_v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a při stálém stoupání se zrychlením velikosti $a_s = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Vypočtěte úhel stoupání za předpokladu, že se tahová síla motoru ani valivý odpor nezměnily. Odpor vzduchu zanedbejte.

$a_v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
$a_s = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
$\alpha = ?$





Tahovou sílu auta označíme $\boldsymbol{F}$, odporovou sílu $\boldsymbol{F_o}$, tíhovou sílu $\boldsymbol{F_G}$ a sílu, kterou do kola tlačí silnice **N**. Tahová síla **F** působí ve směru pohybu, $\mathbf{F_0}$ proti směru.

Pohybová rovnice auta jedoucího po vodorovné silnici:

$$ma_v = F - F_0.$$

Tíhová síla $\boldsymbol{F_G}$ a síla **N** se vyrušily, neboť jsou stejně velké a působí v opačných směrech.

Pohybová rovnice auta jedoucího do kopce:

$$ma_s = F - F_0 - mg \sin \alpha.$$

V tomto případě se síla $\mathbf{F_G}$ se silou **N** nevyruší. Nepůsobí v opačných směrech. Musíme jí tedy započítat.

Jestliže do druhé pohybové rovnice dosadíme za $F - F_0$ vztah z první rovnice, dostaneme

$$ma_s = ma_v - mg \sin \alpha,$$

v takovém případě můžeme dělit hmotností m

$$a_s = a_v - g \sin \alpha.$$

Nyní stačí vyjádřit sinα a dosadit zadané hodnoty.

$$\sin \alpha = \frac{a_v - a_s}{g}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 - 1{,}6}{10} = 0{,}04$$

$$\alpha = \mathbf{2{,}3°}$$

Silnice stoupá pod úhlem 2,3°.