ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Sbírka příkladů k předmětu Lineární systémy 1

Jan Krejčí, korektura Martin Goubej

2018

Obsah

1 Předmluva

Tato sbírka úloh je určena především studentům Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni jako doplňkový materiál k předmětu Lineární Systémy 1 (zkratka KKY/LS1) vyučovaném na Katedře kybernetiky.

V tomto vydání jsou diskutovány vybrané části tohoto předmětu (tj. toto vydání není obsahově vyčerpávající náplň předmětu KKY/LS1). Důraz je kladen zejména na diferenciální rovnice, které se v tomto kurzu běžně nevyučují, ale jejich znalost je klíčová k pochopení látky. Upozorňujeme, že některé požadované části teorie KKY/LS1 byly pro svojí jednoduchost vynechány (např. testování řiditelnosti, pozorovatelnosti, nebo robustnosti ve stabilitě). Příslušné příklady lze najít ve skriptech k předmětu.

Poslední kapitola je chápána jako bonusová z toho důvodu, že její obsah (diskrétní systémy) je předmětem studia zejména v navazujícím kurzu KKY/LS2.

Na začátku každé kapitoly je stručně shrnuta důležitá teorie, načež následuje několik řešených příkladů. Všechny příklady jsou vypracovány postupně po elementárních úkonech ve snaze co nejlépe osvětlit čtenáři principy postupu jejich řešení. Na konci každého oddílu či kapitoly je několik dalších příkladů s výsledky určených k samostatnému procvičení.

Pokud v tomto vydání čtenář nalezne chyby, nechť se neváhá obrátit na autory. Vítány jsou jakékoliv pozitivní i (konstruktivně) negativní ohlasy, náměty a připomínky.

Plzeň, 2017
Plzeň, 2018 (drobná úprava)

Jan Krejčí (jkrejci@students.zcu.cz)

Martin Goubej (mgoubej@ntis.zcu.cz)

1.1 Značení

Symbol	Význam
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	množina kladných reálných čísel včetně nuly
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\widehat{n}$	$\{m \in \mathbb{N} : m \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$
$\underline{\widehat{n}}$	$\{m \in \mathbb{N}_0 : m \leqslant n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	matice
$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	diagonální matice s prvky $a_1, \ldots, a_n$ na hlavní diagonále
$\mathbf{I}$	jednotková matice, $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\mathbf{O}, \mathbf{0}$	nulová matice, nebo vektor
$\det(\mathbf{A})$	determinant matice $\mathbf{A}$
$\mathrm{rank}(\mathbf{A})$, $\mathrm{r}(\mathbf{A})$	hodnost matice $\mathbf{A}$
$\widehat{\mathsf{A}}, \widehat{\mathsf{B}}, \widehat{\mathsf{C}}$	operátory
$f'(x), f''(x), f'''(x)$	první, druhá, třetí derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$\dot{f}(t), \ddot{f}(t), \dddot{f}(t)$	první, druhá, třetí derivace funkce $f(t)$ podle proměnné t
$f^{(n)}(x)$	n-tá derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$\frac{d^n}{d\xi^n} f$	n-tá derivace funkce f podle proměnné ξ
$d^n f,\ d^n \mathbf{f}$	n-tý totální diferenciál funkce f, $\mathbf{f}$
$\cap,\ \cup$	množinový průnik, sjednocení
$Dom(f)$	definiční obor funkce f
$Ran(f)$	obor hodnot funkce f
$\approx,\ \doteq$	přibližně
$\sim$	ekvivalence množin, nebo funkcí

2 Lineární obyčejné diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

2.1 Úvod k diferenciálním rovnicím

Diferenciální rovnice, zkráceně DR, jsou takové rovnice, ve kterých vystupují výrazy obsahující derivace hledané neznámé funkce nezávislé proměnné (až do řádu n). Na rozdíl od rovnic algebraických (např. kvadratická rovnice) není řešením číslo, ale funkce vyhovující předpisu dané DR. V teorii systémů dávají obecné DR do vztahu vstupy $\mathbf{u}(t)$ [1] a výstupy $\mathbf{y}(t)$, popřípadě stav systému $\mathbf{x}(t)$. Obecně použitelný analytický způsob řešení libovolných DR neexistuje, analytické metody existují pouze pro řešení některých speciálních tvarů DR. Ostatní DR lze řešit numericky. Diferenciální rovnice mohou mít obecně nekonečně řešení. Při práci s dynamickými systémy často sledujeme vývoj výstupu nebo stavu v důsledku zadaných počátečních podmínek a funkce vstupu. Při hledání řešení potom klademe požadavky na hledanou funkci ve tvaru $y^{(k)}(t_0) \in \mathbb{R}\ (\forall)k \in \widehat{\underline{n-1}}$, poté může mít příslušná DR jen jedno konkrétní řešení[2]
Diferenciálním operátorem (např. $\widehat{\mathsf{L}}$, nebo $\widehat{\mathsf{D}}$) rozumíme nějakou kombinaci koeficientů (čísla/funkce) a derivací[3], působících na hledanou, nebo vstupní funkci.
V lineárních systémech pracujeme často se skalární lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty, zkráceně L-ODR s KK, řádu $n > 0$ a jejich soustavami řádu 1 (stavový model).

Definovat skalární L-ODR s KK n-tého řádu můžeme například následovně.

- Homogenní[4] rovnice $\widehat{\mathsf{L}}[y(t)] = 0$:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0, \qquad a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \widehat{\underline{n}}. \tag{1}$$

- Nehomogenní rovnice $\widehat{\mathsf{L}}[y(t)] = \widehat{\mathsf{D}}[u(t)]$:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k}y(t) = \sum_{l=0}^{m\le n} b_l \frac{d^l}{dt^l}u(t), \qquad a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \widehat{\underline{n}}, \quad b_l \in \mathbb{R}\ \forall l \in \widehat{\underline{m}}. \tag{2}$$

Koeficient u n-té (nejvyšší) derivace často uvažujeme bez újmy na obecnosti jako $a_n = 1$ (pokud $a_n \neq 1$, můžeme hodnotou tohoto koeficientu díky linearitě DR vydělit obě strany

[1] Abychom mohli určit řešení DR, vstupní funkce musí být zadána: např. $u(t) = \sin(t)$.
[2] Úloha zadaná s takovými podmínkami se nazývá "Cauchyova", nebo "počáteční".
[3] Značení: $\dot{y}(t) \equiv y'(t) \equiv y^{(1)}(t) \equiv \frac{d}{dt}y(t) \equiv \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$
[4] Homogenitou je zde myšleno, že rovnost platí i pro $\alpha \in \mathbb{R}$ násobek libovolného řešení.

a dostáváme novou ekvivalentní rovnici). Jejich celkové řešení je součtem homogenního a partikulárního řešení ve tvaru

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{n} D_k(t) e^{\lambda_k t},\ \lambda_k \in \mathbb{C}\ \forall k \in \widehat{n}. \tag{3}$$

kde λ_k jsou kořeny charakteristické rovnice (odpovídající pólům při popisu systému), C_k jsou konstantní koeficienty a D_k funkce času určující příspěvek dílčích fundamentálních funkcí (módů) do celkové odezvy. Homogenní řešení y_h má v teorii systémů typicky fyzikální význam odezvy výstupu systému na zadané počáteční podmínky bez působení vstupu (tj. řešení homogenní rovnice při zadaných počátečních podmínkách $y^{(k)}(t_0), k \in \widehat{n-1}$) a y_p představuje výsledek působení vstupu při nulových počátečních podmínkách (řešení nehomogenní rovnice pro $y^{(k)}(t_0) = 0(\forall)k$.

Zkoušku správnosti řešení lze provést jednoduše dosazením funkce $y(t)$ do předpisu DR. Nelineární diferenciální rovnice jsou namísto lineární kombinace derivací hledané funkce popsány obecně libovolnou funkcí $f(t, y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$.

Soustavu prvního řádu L-ODR s KK můžeme definovat následovně.

- Homogenní soustava rovnic prvního řádu $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad a_{i,j} \in \mathbb{R}\ \forall i, j \in \widehat{n}. \tag{4}$$

- Nehomogenní rovnice $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u(t), \qquad a_{i,j} \in \mathbb{R}\ \forall i, j \in \widehat{n}, \quad b_l \in \mathbb{R}\ \forall l \in \widehat{n} \tag{5}$$

Postup řešení má stejné schéma jako u skalárních rovnic s tím rozdílem, že namísto charakteristického polynomu řešíme úlohu na vlastní čísla a vlastní směry (resp. vektory). Soustavu rovnic prvního řádu můžeme sestrojit z jedné diferenciální rovnice popisující systém vhodnou volbou tzv. stavových proměnných $x_i(t)$, tak získáme tzv. stavový model systému.

2.2 Metody řešení v časové oblasti

2.2.1 Přímá integrace

Přímá integrace je nejjednodušší metodou řešení DR, aplikovatelnou na rovnice ve tvaru[5]

$$\frac{d}{dt}y(t) = u(t), \tag{6}$$

$y(t)$ můžeme tedy chápat jako primitivní funkci k funkci $u(t)$ na nějakém intervalu I a integrovat tedy funkci $u(t)$ podle t. Takový postup je matematicky zcela korektní.
Můžeme rovnici řešit ale i jinak: rovnost vynásobíme dt a obě strany integrujeme. Tento postup je matematicky ilegální - derivace je limita, a ne matematicky "čistý" podíl, ale pro naše účely takový postup často použít můžeme, pokud vyjdeme z definice derivace $\frac{d}{dt}y(t) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ (po vynásobení Δt dostáváme hodnotu $y(t)$ sčítáním $u(t)$ přes nekonečně malé časové úseky $\Delta t \to 0$, což odpovídá integrování). Výsledkem tedy je

$$\Rightarrow y(t) = \int u(t)dt = U(t) + C,\ \ C \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

kde integrační konstanta má obvykle význam počáteční podmínky. Jedná se tedy o cvičení klasického integrování[6] - původní tvar ovšem chápeme jako diferenciální rovnici s cílem najít funkci $y(t)$. To bývá součástí složitějších metod, které využíváme v předmětu LS1.

◦ **Poznámka:** při řešení Cauchyovských úloh[7] (tj. se zadaným požadavkem na $y(t_0) \in \mathbb{R}$) lze efektivně využít následující integrál (po vyjádření $y(t)$ dostaneme řešení rovnou):

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau = [U(\tau)]_{t_0}^{t} = U(t) - U(t_0). \tag{8}$$

Řešené příklady: přímá integrace

Příklad 1. Řešte diferenciální rovnici se zadanou počáteční podmínkou

$$\dot{y}(t) = t,$$
$$y(0) = 1.$$

[5] Rovnice tohoto tvaru popisují systém nazývaný "integrátor", nebo také "integrační člen prvního řádu".

[6] Rovnost funkcí platí samozřejmě jen na nějakém definičním oboru - intervalu I, případně v celém $\mathbb{R}$ (maximální řešení), tedy $Dom(y) = Dom(u) = Dom(U) = I$.

[7] Cauchyova (počáteční) podmínka: $t_0 = 0$, tj. $y(0) \in \mathbb{R}$. Naproti tomu okrajové podmínky jsou dvě: $t_{\text{počáteční}}, t_{\text{koncová}}, \quad y(t_{\text{počáteční}}), y(t_{\text{koncová}}) \in \mathbb{R}$.

Řešení:

• Integrujeme pravou stranu diferenciální rovnice, získáme tak obecné řešení

$$y(t) = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

• Dosadíme počáteční podmínku a určíme konstantu C

$$y(0) = 1 = \frac{0^2}{2} + C, \ \Rightarrow \ C = 1.$$

• Nakonec dosadíme za C, a určíme podmínky rovnosti. Tak získáme finální tvar výsledku a tedy celkové řešení zadané diferenciální rovnice s počátečními podmínkami (tj. řešení počáteční úlohy)

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{t^2}{2} + 1}}, \ Dom(y) = \mathbb{R}.$$

◦ **Poznámka:** výsledek lze snadno získat použitím vzorce (8)

$$y(t) = \int_0^t \tau d\tau + y(0) = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t + 1 = \frac{t^2}{2} + 1.$$

◦ **Poznámka:** výsledek lze poněkud obtížněji získat použitím obecnějšího postupu řešení L-ODR s KK (popsáno v úvodní části):

- konstantní řešení $y(t) \equiv K$ očividně neexistuje,
- řešení homogenní rovnice vypadá následovně:

$$\dot{y}(t) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda^1 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{FS} = \{e^{0t}\} = \{1\} \ \Rightarrow \ y_h(t) = C \cdot 1, \ C \in \mathbb{R},$$

- řešením homogenní rovnice je tedy konstanta,
- řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstant vypadá následovně:

$$C \in \mathbb{R} \text{ nahradíme funkcí času: } C(t) \ \Rightarrow \ y_p(t) = C(t) \cdot 1, \ \text{derivujeme:}$$

$$\dot{y}(t) = \dot{C}(t), \ \text{dosadíme do výchozí rovnice: } \dot{C}(t) = t \ \Rightarrow \ C(t) = \frac{t^2}{2},$$

- obecné řešení pak bude rovno součtu $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$,

$$y(t) = C + \frac{t^2}{2}, C \in \mathbb{R},$$

- jak vidíme, výsledek je totožný jako při řešení první metodou.

◦ **Poznámka:** derivováním se lze snadno přesvědčit o správnosti výsledku (zkouška).

Příklad 2. Řešte diferenciální rovnici s nulovými počátečními podmínkami

$$\dddot{y}(t) = \sin(t),$$
$$\ddot{y}(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0,\ y(0) = 0.$$

Řešení:

• Integrujeme[8] pravou stranu diferenciální rovnice třikrát po sobě

$$\ddot{y}(t) = \int \sin(t)dt = -\cos(t) + A,\ A \in \mathbb{R},$$
$$\dot{y}(t) = \int \ddot{y}(t)dt = \int [-\cos(t) + A]dt = -\sin(t) + At + B,\ A, B \in \mathbb{R},$$

○ **Poznámka:** abychom nemuseli po následující (poslední) integraci psát $\frac{A}{2}$, definujeme konstantu $K \triangleq \frac{A}{2}$. Protože $A \in \mathbb{R}$, tak i $K \in \mathbb{R}$. Výsledek se trochu zjednoduší. Určíme obecné řešení zadané diferenciální rovnice

$$y(t) = \int \dot{y}(t)dt = \int [-\sin(t) + At + B]dt = \cos(t) + Kt^2 + Bt + C,\ K, B, C \in \mathbb{R},$$
$$\Rightarrow y(t) = cos(t) + Kt^2 + Bt + C,\ K, B, C \in \mathbb{R}.$$

• Dosadíme počáteční podmínky a určíme konstanty

$$\ddot{y}(0) = -\cos(0) + A = -1 + A = 0 \ \Rightarrow\ A = 1\ (K = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}),$$
$$\dot{y}(0) = -\sin(0) + 1 \cdot 0 + B = 0 + 0 + B = 0 \ \Rightarrow\ B = 0,$$
$$y(0) = cos(0) + \frac{1}{2}0^2 + 0 \cdot t + C = 1 + 0 + 0 + C = 0 \ \Rightarrow\ C = -1.$$

• Nakonec dosadíme za konstanty a určíme podmínky rovnosti. Tak získáme finální tvar výsledku a tedy obecné řešení zadané počáteční úlohy

$$\underline{\underline{y(t) = cos(t) + \frac{1}{2} \cdot t^2 - 1}},\ Dom(y) = \mathbb{R}.$$

Příklad 3. Řešte diferenciální rovnici se zadanou podmínkou

$$\dot{x}(t) - t = \frac{t-3}{t^2+t},$$
$$x(1) = 0.$$

[8] Je třeba nezapomenout na integrační konstanty!

Řešení:

• Rozložíme racionálně lomenou funkci na pravé straně na parciální zlomky[9]

$$\frac{t-3}{t(t+1)} = \frac{r_1}{t+1} + \frac{r_2}{t} = \left| \begin{array}{c} \text{např.} \\ \text{residuová věta} \end{array} \right| = \frac{4}{t+1} - \frac{3}{t}.$$

• Převedeme t na pravou stranu a integrujeme s použitím vzorce (8)

$$x(t) = \int_1^t \left(\frac{4}{\tau+1} - \frac{3}{\tau} + \tau\right) d\tau = \left[4\ln|\tau+1| - 3\ln|\tau| + \frac{\tau^2}{2}\right]_1^t =$$

$$= 4\ln|t+1| - 3\ln|t| + \frac{t^2}{2} - 4\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

• Výsledek zadané Cauchyho úlohy tedy můžeme zapsat jako

$$\underline{\underline{x(t) = 4\ln|t+1| - 3\ln|t| + \frac{t^2}{2} - 4\ln 2 - \frac{1}{2}}},\ Dom(x) = \mathbb{R}.$$

Příklad 4. Vypočítejte impulsní a přechodovou charakteristiku integrátoru.

Řešení:

• Pro obecnost předpokládejme, že vstup $u(t)$ je násoben konstantou $k \in \mathbb{R}$. Dále předpokládejme, že systém byl v čase $t_0 = 0$ v klidu (nulová počáteční podmínka), záporný čas neuvažujeme. Na základě toho pak sestavíme Cauchyho úlohu

$$\dot{y}(t) = ku(t),$$
$$y(0) = 0.$$

a) Impulsní charakteristika

• Impulsní charakteristika je z definice odezva na Diracovu $\delta(t)$ distribuci, tedy $u(t) = \delta(t)$

$$\dot{y}(t) = k\delta(t),$$

$$y(t) - y(0) = \int_0^t k\delta(\tau) d\tau = k\underline{1}(t),$$

$$\underline{\underline{y(t) = k\underline{1}(t)}},\ Dom(y) = \mathbb{R}^+,$$

kde $\underline{1}(t)$ je jednotkový skok[10].

[9] MELICHAR, Jiří - GOUBEJ, Martin: Lineární systémy 1, učební text, KKY 2016, str. 35-37, Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky.

[10] Funkce $\underline{1}(t)$ je také známá jako $H(t)$, Heavisideova funkce. $\underline{1}(t) = 0,\ t < 0,\ \underline{1}(t) = 1, t \geq 0$.

b) Přechodová charakteristika

• Přechodová charakteristika je z definice odezva na jednotkový skok, tedy $u(t) = \underline{1}(t)$,

$$\dot{y}(t) = k\underline{1}(t),$$
$$y(t) - y(t) = \int_0^t k\underline{1}(\tau)d\tau = kt,$$
$$\underline{\underline{y(t) = kt}},\ t \in \mathbb{R}^+.$$

○ **Poznámka:** výsledky ověřte se skripty[11].

Příklady na samostatné procvičení

Řešte následující diferenciální rovnice s uvedenými podmínkami.

Příklad 1. $\dot{y}(t) = 3t^2 + t + 5,\ y(1) = 2$

($y(t) = t^3 + \frac{t^2}{2} + 5t - \frac{9}{2}$)

Příklad 2. $\dot{y}(t) = \frac{2}{t},\ y(1) = 15$

($y(t) = 2\ln|t| + 15$)

Příklad 3. $\dot{y}(t) - e^{-t} = 1,\ y(0) = -1$

($y(t) = t - e^{-t}$)

2.2.2 Separace proměnných

Metoda separace proměnných se využívá pro diferenciální rovnice ve tvaru

$$g(t) + f(y)\dot{y} = 0, \tag{9}$$

formálně správné řešení (z teorie funkcí více proměnných) je tvaru

$$H(t, y(t)) = \int_\alpha^t g(\tau)d\tau + \int_\beta^y f(s)ds = C,\ C \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

• V prvním kroku hledáme konstantní řešení (ptáme se, jestli $\exists K \in \mathbb{R} : y(t) \equiv K$).

Rovnice tvaru (9) lze řešit i jinak: vynásobením rovnice dx ji převedeme do tvaru, že na jedné straně rovnosti se vyskytuje jedna proměnná, y(t), a na druhé straně druhá

[11]MELICHAR, Jiří - GOUBEJ, Martin:Lineární systémy 1, učební text, KKY 2016, kap. 3.2, str. 51, Impulsní a přechodové funkce elementárních členů.

proměnná, t, s příslušnými diferenciály. Takovou rovnici pak můžeme "integrovat" - každou stranu podle příslušné proměnné

$$f(y)dy = -g(t)dt, \tag{11}$$

$$\int f(y)dy = -\int g(t)dt + C,\ C \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Tímto postupem jsme očividně dospěli ke stejnému výsledku jako v poněkud komplikovanějším řešení v bodě (10).

○ **Poznámka:** rovnice, které toto splňují, často nejsou lineární.

○ **Poznámka:** speciálními případy rovnic se separovanými proměnnými jsou *homogenní lineární DR prvního řádu* (tedy s, i bez konstantních koeficientů).

Řešené příklady: metoda separace

Příklad 1. Řešte homogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty, s parametrem a, se zadanou počáteční podmínkou

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0,\ a \in \mathbb{C}$$
$$y(0) = 1.$$

Řešení:

• Hledáme konstantní řešení - ptáme se, jestli existuje $K \in \mathbb{R}$, tak že $y(t) = K$

$$y(t) = K \ \Rightarrow\ \dot{y}(t) = 0,\ \text{dosadíme do rovnice}\ \Rightarrow\ aK = 0\ \Rightarrow\ y(t) = 0 = K.$$

Rovnici tedy řeší funkce[12] $y(t) = 0$. Toto řešení na závěr spojíme s obecným, i s celkovým řešením.

• $\dot{y}$ přepíšeme na $\frac{dy}{dt}$ a odseparujeme proměnné, máme na paměti, že $y = y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = -ay\ \Rightarrow\ \frac{dy}{y} = -adt.$$

• Integrujeme obě strany rovnice[13]

$$\int \frac{dy}{y} = -\int adt,$$
$$\ln|y| = -at + C = \ln e^{-at} + \ln e^{C} = \ln e^{C} e^{-at},\ C \in \mathbb{R},$$

• Definujeme novou konstantu za účelem zjednodušení

$$D = e^{C},\ \text{a tedy}\ D \in \mathbb{R}^{+},$$
$$\ln|y| = \ln De^{-at},\ D \in \mathbb{R}^{+},$$
$$|y| = De^{-at},\ D \in \mathbb{R}^{+}.$$

[12]Pro homogenní DR (s, i bez KK) je vždy konstantním řešením nula.

[13]Všimněme si, že rovnice je opravdu tvaru (9), tedy $a + \frac{1}{y(t)}\dot{y}(t) = 0$

• Výraz na pravé straně rovnosti je vždy kladný. Abychom odstranili absolutní hodnotu vlevo, musíme připustit záporné hodnoty vpravo. Definujeme tedy novou konstantu

$$\begin{aligned} E = \pm D,\ & \text{a tedy } E \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ y = Ee^{-at},\ & E \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

• Toto řešení spojíme s konstantním řešením - zjišťujeme, že konstanta E může být i nulová. Obecné řešení zadané DR je tedy tvaru

$$y = Ee^{-at},\ E \in \mathbb{R}.$$

• Dosadíme počáteční podmínku a dopočítáme celkové řešení zadané počáteční úlohy

$$y(0) = 1 = Ee^0 \ \Rightarrow \ E = 1, \ \Rightarrow \ \underline{\underline{y(t) = e^{-at}}},\ Dom(y) = \mathbb{R}.$$

Příklad 2. Řešte homogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu bez KK, se zadanou počáteční podmínkou

$$\begin{aligned} t^{-1}\dot{y}(t) + 4y(t) &= 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení:

• Hledáme konstantní řešení - ptáme se, jestli existuje $K \in \mathbb{R}$, tak že $y(t) = K$

$$y(t) = K \ \Rightarrow \ \dot{y}(t) = 0,\ \text{dosadíme do rovnice} \ \Rightarrow \ 4K = 0 \ \Rightarrow \ y(t) = 0 = K.$$

Rovnici tedy řeší funkce[14] $y(t) = 0$. Toto řešení na závěr spojíme s obecným, i s celkovým řešením.

• $\dot{y}$ přepíšeme na $\frac{dy}{dt}$ a odseparujeme proměnné, máme na paměti, že $y = y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = -4ty \ \Rightarrow \ \frac{1}{y}dy = -4tdt.$$

• Integrujeme obě strany rovnice[15]

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= -\int 4tdt, \\ \ln|y| &= -\frac{4}{2}t^2 + C,\ C \in \mathbb{R}, \\ |y| &= e^{-2t^2+C} = e^C e^{-2t^2} = De^{-2t^2},\ D \triangleq\ e^C,\ D \in \mathbb{R}^+, \\ y &= Ee^{-2t^2},\ E \triangleq\ \pm D,\ E \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

[14] Pro homogenní lineární DR (s, i bez KK) je vždy konstantním řešením nulová funkce.

[15] Všimněme si, že rovnice je opravdu tvaru (9), tedy $4t + \frac{1}{y}\dot{y} = 0$

• Toto řešení spojíme s konstantním řešením - zjišťujeme, že konstanta E může být i nulová. Obecné řešení zadané DR je tedy tvaru[16]

$$y = Ee^{-2t^2},\ E \in \mathbb{R}.$$

• Dosadíme počáteční podmínku a dopočítáme celkové řešení zadané počáteční úlohy

$$y(0) = 0 = Ee^0 \ \Rightarrow\ E = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{y(t) = 0}},\ Dom(y) = \mathbb{R}.$$

○ **Poznámka:** zadaná diferenciální rovnice by mohla popisovat nějaký nelineární systém[17].

Příklad 3. Řešte nelineární diferenciální rovnici

$$\dot{y} + t^2\dot{y} = y^2 - 1,\ y = y(t).$$

Řešení:

• Hledáme konstantní řešení - ptáme se jestli existuje $K \in \mathbb{R}$, tak že $y(t) = K$

$$y(t) = K \ \Rightarrow\ \dot{y}(t) = 0,\ \text{dosadíme do rovnice} \ \Rightarrow\ 0 = K^2 - 1 \ \Rightarrow\ K_{1,2} = \pm 1 = y(t).$$

Rovnici tedy řeší funkce $y(t) = \pm 1$. Toto řešení na závěr spojíme s obecným, i s celkovým řešením. Uvidíme, že toto nulové konstantní řešení hraje v tomto příkladě zásadní roli.
• $\dot{y}$ přepíšeme na $\frac{dy}{dt}$

$$(1 + t^2)\frac{dy}{dt} = y^2 - 1,$$

• Odseparujeme proměnné (rovnici upravíme do tvaru (11))[18]

$$\frac{1}{y^2 - 1}dy = \frac{1}{1 + t^2}dt.$$

• Integrujeme obě strany rovnice zvlášť

$$\text{L:} \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \left| \begin{array}{c} \text{rozklad na} \\ \text{parciální zlomky} \end{array} \right| = \int (\frac{0.5}{y - 1} - \frac{0.5}{y + 1})dy = \frac{1}{2}(\ln|y - 1| - \ln|y + 1|) + C_1,$$

$$\text{R:} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \left| \text{tabulky} \right| = \arctan(t) + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

---

[16]Všimněme si, že kdybychom v předchozím příkladě zvolili za parametr $a = 4t$, dostali bychom špatné řešení, protože jsme předpokládali, že $a \neq a(t)$.

[17]Lineární systémy jsou popsány pouze lineárními diferenciálními rovnicemi **s konstantními koeficienty**, řešená DR je sice lineární, ale nemá konstantní koeficienty.

[18]Všimněme si, že rovnice je opravdu tvaru (9), tedy $\frac{-1}{1+t^2} + \frac{1}{y^2-1}\dot{y} = 0$.

• Jelikož nalezení explicitního vyjádření řešení jako funkci $y = y(t)$ je v tomto případě zdlouhavé (lze to - zkuste sami), můžeme se smířit s implicitně zadanou funkcí $H(t, y(t)) = C_3$ a prohlásit jí za formální řešení

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \arctan(t) + C,\ C \in \mathbb{R},\ y \neq \pm 1,$$

spojíme s konstantním řešením, a získáme tak dvě funkce které řeší zadanou DR

a) $\underline{\underline{y(t) = \pm 1}},\ t \in \mathbb{R},$

b) $\underline{\underline{H(t, y) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \arctan(t) = C}},\ C \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\},\ t \in \mathbb{R}$

Příklady na samostatné procvičení

Řešte následující diferenciální rovnice s uvedenými podmínkami.

Příklad 1. $\dot{y}(t) - \frac{1}{t+1}y(t) = 0,\ y(0) = 2$

($y(t) = 2t + 2$)

Příklad 2. $\dot{y}(t) - e^t y(t) = 0,\ y(0) = e^2$

($y(t) = ee^{e^t}$)

Příklad 3. $y(t)\dot{y}(t) = t,\ y(0) = 0$

($y(t) = \pm t$)

2.2.3 Homogenní L-ODR s KK vyšších řádů

Tyto rovnice jsou ve tvaru (pro řád n)

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0,$$
$$\underline{\underline{a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\},}}$$

postup řešení:

- sestrojíme charakteristický polynom ($y^{(i)}(t)$ nahradíme λ^i),
- nalezneme kořeny charakteristického polynomu (čísla λ_k),
- sestavíme Fundamentální systém funkcí, formálně FS $= \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}$,

  - mohou nastat následující možnosti:

Kořen char. polynomu	**Příslušná fundamentální funkce**
jednoduchý reálný kořen λ	$\{e^{\lambda t}\}$
k-násobný kořen λ	$\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}\}$
komplexně sdružený kořen $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$

- sestrojíme homogenní řešení[19] $y_h(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k e^{\lambda_k t}$, kde $C_k \in \mathbb{R}$,

◦ **Poznámka:** při nulových počátečních podmínkách je řešením vždy funkce $y(t) = 0$.

Řešené příklady:

Příklad 1. Řešte homogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty, s parametrem a, se zadanou počáteční podmínkou

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0, \ a \in \mathbb{C}$$
$$y(0) = 1.$$

Řešení:

• Sestrojíme charakteristický polynom ($y^{(i)}(t)$ nahradíme λ^i) a nalezneme jeho kořeny,

$$\lambda + a = 0, \ \Rightarrow \ \lambda_1 = -a.$$

• Sestavíme Fundamentální systém funkcí a z něj obecné řešení

$$\text{FS} = \{e^{\lambda_1 t}\} = \{e^{-at}\}, \ \Rightarrow \ y_h = Ae^{-at}, \ A \in \mathbb{R}.$$

• Dosadíme počáteční podmínku, dopočítáme konstantu A a učíme celkové homog. řešení

$$y(0) = 1 = Ae^0 \ \Rightarrow \ A = 1, \ \Rightarrow \ \underline{\underline{y_h = e^{-at}}}, \ Dom(y_h) = \mathbb{R}.$$

◦ **Poznámka:** Tento příklad jsme řešili metodou separace mnohem obtížněji.

Příklad 2. Řešte homogenní diferenciální rovnici se zadanými počátečními podmínkami

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 0,$$
$$y(0) = \dot{y}(0) = 1.$$

[19] Homogenním řešením je lineární obal fundamentálních funkcí, viz. lineární algebra.

Řešení:

• Sestrojíme charakteristický polynom ($y^{(i)}(t)$ nahradíme λ^i) a nalezneme jeho kořeny,

$$\lambda^2 + \lambda = 0,\ \lambda(\lambda+1) = 0,\ \Rightarrow\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,$$

• Sestavíme Fundamentální systém funkcí a z něj obecné homogenní řešení

$$\mathrm{FS} = \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\} = \{1, e^{-t}\},\ \Rightarrow\ y_h = A + Be^{-t},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

• Abychom mohli dosadit počáteční podmínky, musíme derivovat $y_h(t)$

$$\dot{y}_h(t) = -Be^{-t},\ B \in \mathbb{R}.$$

• Dopočítáme konstanty A, B a učíme celkové řešení

$$\begin{array}{rcl} y(0) = 1 = A + Be^0 & \Rightarrow & A + B = 1, \\ \dot{y}(t) = 1 = -Be^0 & \Rightarrow & B = -1, \end{array} \Rightarrow\ A = 2,$$

$$\underline{\underline{y_h = 2 - e^{-t}}},\ Dom(y_h) = \mathbb{R}.$$

Příklad 3. Řešte homogenní diferenciální rovnici

$$\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) = 0,$$

Řešení:

• Sestrojíme charakteristický polynom ($y^{(i)}(t)$ nahradíme λ^i) a nalezneme jeho kořeny,

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0,\ \lambda^2(\lambda+1) = 0,\ \Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1,$$

• Sestavíme Fundamentální systém funkcí a z něj obecné homogenní řešení

$$\mathrm{FS} = \{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_3 t}\} = \{1, t, e^{-t}\},\ \Rightarrow\ \underline{\underline{y_h = A + Bt + Ce^{-t}}},\ A, B, C \in \mathbb{R},\ Dom(y_h) = \mathbb{R}.$$

Příklad 4. Řešte okrajovou úlohu

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Řešení:

• Sestrojíme charakteristický polynom ($y^{(i)}(t)$ nahradíme λ^i), nalezneme jeho kořeny, určíme Fundamentální systém funkcí a obecné řešení homogenní rovnice

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$
$$\lambda = \pm i\ \Rightarrow\ \mathrm{FS} = \{\cos t, \sin t\},$$
$$y_h(t) = A\cos t + B\sin t,\ A, B \in \mathbb{R}.$$

• Z okrajový podmínek dopočítáme konstanty A, B, C

$$\begin{array}{r} y(0) = 0 = A, \\ y(\pi) = 0 = -A, \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{y(t) = B\sin t}},\ B \in \mathbb{R},\ Dom(y) = \mathbb{R}.$$

∘ **Poznámka:** takto zadaná okrajová úloha má tedy nekonečně mnoho řešení.

Příklady na samostatné procvičení

Řešte následující diferenciální rovnice s uvedenými podmínkami.

Příklad 1. $\ddot{y}(t) - 16y(t) = 0$

($y(t) = Ae^{4t} + Be^{-4t}$)

Příklad 2. $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 0$

($y(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t}$)

Příklad 3. $\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 0$

($y(t) = Ae^{2t}\cos(t) + Be^{2t}\sin(t)$)

Příklad 4. $\dddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 0$

($y(t) \doteq Ae^{-0.45t} + Be^{0.22t}\cos(1.46t) + Ce^{0.22t}\sin(1.46t)$)

2.2.4 Nehomogenní L-ODR - variace konstant

Metoda variace konstant je základní metodou řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic. Používá se pro rovnice typu $\widehat{\mathsf{L}}[y(t)] = u(t)$,

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k}y(t) = u(t) \tag{13}$$
$$a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \underline{\widehat{n}}.$$

Metoda spočívá v tom, že konstanty tvořící fundamentální systém (lineární obal fundamentálních funkcí) prohlásíme za funkce t. Scénář řešení by mohl vypadat následovně:

- vyřešíme homogenní rovnici,
- v homogenním řešení "variujeme" konstanty = vyměníme je za funkce od t a prohlásíme ho za partikulární řešení,

- hledáme ony "variované" konstanty = derivujeme $y_p(t)$ až do řádu DR,
  speciálně pro rovnice 1.řádu:

  - dosadíme do DR $y_p(t)$ a $\dot{y}_p(t)$,
  - nederivované "variované" konstanty se vykrátí (principiálně musí),
  - použijeme metodu přímé integrace a najdeme hledanou funkci[20],

  pro rovnice libovolného řádu:

- při derivování $y_p(t)$ budou "vyskakovat" výrazy s derivacemi oněch "variovaných" konstant,

- tyto derivované funkce, bývalé konstanty budeme postupně pokládat rovny nule (jejich součet, viz. příklady),

- jakmile se ale dostaneme k $y_p^{(n)}$, tyto derivované funkce položíme rovny $u(t)$,

  takto vznikne soustava lineárních rovnic:

  - její matici nazveme Wrónského maticí[21] $\mathbf{W}(t)$ (determinant je "Wrónskián"),
  - vektor neznámých obsahuje ony hledané funkce (resp. jejich derivace),
  - pravá strana je tvaru $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u(t) \end{bmatrix}$,

- vyřešením této soustavy získáme ony hledané funkce,

- celkové (obecné) řešení získáme jako součet partikulárního a homogenního řešení.

∘ **Poznámka:** platí princip superpozice, tj. pokud bude rovnice ve tvaru $\widehat{\mathsf{L}}[y(t)] = u_1(t) + \cdots + u_n(t)$, lze ji rozdělit na n rovnic vždy jen s jedním vstupem, které můžete řešit nezávisle na sobě. Výsledkem bude součet dílčích řešení.

∘ **Poznámka:** rovnice ve tvaru (2), tj. s derivacemi vstupní funkce $u(t)$ na pravé straně lze řešit buď'to s použitím principu superpozice[22], nebo mnohem efektivněji následovně,

- řešení homogenní rovnice $\widehat{\mathsf{L}}[y(t)] = 0$,

- výpočet partikulárního řešení $y_p(t)$ pro rovnici $\widehat{\mathsf{L}}[y(t)] = u(t)$,

[20] Integrační konstantu psát není třeba, protože po sloučení homogenního a partikulárního řešení je možné výraz s touto konstantou přidružit k homogennímu řešení.

[21] Wrónského matice je definována pro nějaký soubor n funkcí tak, že první řádek se skládá právě z těchto funkcí a následující řádky z derivací těchto funkcí až do řádu $n-1$, tj, poslední řádek je n-tý a matice je tak vždy čtvercová. Determinantem lze rozhodnout o lineární závislosti daného souboru funkcí.

[22] Vypočtením m derivací vstupní funkce (je-li dostatečně diferencovatelná) a řešení rovnice pro každou tuto funkci $b_i u^{(i)}(t)$ $\forall i \in \underline{\widehat{m}}$ zvlášť'.

- výsledné partikulární řešení bude tvaru

$$y(t) = b_0 y_p(t) + b_1 \dot{y}_p(t) + b_2 \ddot{y}_p(t) + \cdots + b_m y_p^{(m)}(t). \tag{14}$$

○ **Poznámka:** Řešíme-li počáteční úlohu pro homogenní rovnici, získáme vždy soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$\mathbf{W}(0) \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1}(0) \cdot \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}, \tag{15}$$

kde $C1, \ldots, C_n$ jsou hledané konstanty u fundamentálních funkcí.

Řešené příklady: rovnice prvního řádu (s i bez konstantních koeficientů)

Příklad 1. Řešte nehomogenní L-ODR s konstantními koeficienty

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t),$$

a) $u(t) = \underline{1}(t)$

b) $u(t) = t + 3$

c) $u(t) = e^t$

Řešení:

- Vyřešíme homogenní rovnici $\dot{y}(t) + y(t) = 0$

$$\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -1 \;\Rightarrow\; y_h(t) = Ae^{-t},\; A \in \mathbb{R}.$$

Řešíme nehomogenní rovnici[23]:

- Konstantu A prohlásíme za funkci času ($y_h(t)$ tak přejde v $y_p(t)$), a derivujeme $y_p(t)$ až do řádu diferenciální rovnice (abychom mohli za všechny derivace $y(t)$ do rovnice dosadit)

$$y_p(t) = A(t)e^{-t},$$
$$\dot{y}_p(t) = \dot{A}(t)e^{-t} + A(t)(-e^{-t}),$$

- Dosadíme za všechny derivace $y(t)$ do rovnice, s ohledem na pravou stranu $u(t)$

a) $u(t) = \underline{1}(t)$

$$\dot{A}(t)e^{-t} - \cancel{A(t)e^{-t}} + \cancel{A(t)e^{-t}} = \underline{1}(t),$$
$$\dot{A}(t)e^{-t} = \underline{1}(t),$$
$$\dot{A}(t) = \underline{1}(t)e^{t}.$$

[23] Celkové řešení je součtem homogenního a partikulárního řešení, tedy $y_c(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

- Použijeme metodu přímé integrace[24], konstantu psát nemusíme,

$$A(t) = \int \underline{1}(t)e^t dt = \int 0e^t dt = 0,\ t < 0$$
$$= \int 1e^t dt = e^t,\ t \geq 0.$$

- Partikulární řešení tedy můžeme zapsat jako

$$\Rightarrow\ y_p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ A(t)e^{-t} = e^t \cdot e^{-t} = e^{t-t} = e^0 = 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

- Obecné řešení zadané DR zapíšeme jako součet $y_p(t) + y_h(t) = y_c(t)$,

$$\underline{\underline{y_c(t) = Ae^{-t} = y_h(t)}},\ \text{protože } y_p(t) = 0 \text{ pro } t < 0,$$
$$\underline{\underline{y_c(t) = 1 + Ae^{-t}}},\ t \geq 0,\ Dom(y_c) = \mathbb{R}.$$

b) $u(t) = t + 3$

$$\dot{A}(t)e^{-t} - \cancel{A(t)e^{-t}} + \cancel{A(t)e^{-t}} = t + 3,$$
$$\dot{A}(t) = (t + 3)e^t.$$

- Použijeme metodu přímé integrace, konstantu psát nemusíme,

$$A(t) = \int te^t dt + 3\int e^t dt = (t-1)e^t + 3e^t = te^t + 2e^t,$$

- Partikulární řešení tedy můžeme zapsat jako

$$y_p(t) = A(t)e^{-t} = (te^t + 2e^t)e^{-t} = te^{t-t} + 2e^{t-t} = t + 2.$$

- Obecné řešení zadané DR zapíšeme jako součet $y_p(t) + y_h(t) = y_c(t)$,

$$\underline{\underline{y_c(t) = t + 2 + Ae^{-t}}},\ Dom(y_c) = \mathbb{R}.$$

c) $u(t) = e^t$

$$\dot{A}(t)e^{-t} - \cancel{A(t)e^{-t}} + \cancel{A(t)e^{-t}} = e^t,$$
$$\dot{A}(t) = e^t \cdot e^t = e^{t+t} = e^{2t},$$
$$\text{přímá integrace, } A(t) = \int e^{2t} dt = \frac{e^{2t}}{2}.$$

[24]Funkce $\underline{1}(t)$ je také známá jako $H(t)$, Heavisideova funkce. $\underline{1}(t) = 0,\ t < 0,\ \underline{1}(t) = 1, t \geq 0.$

• Partikulární řešení tedy můžeme zapsat jako

$$y_p(t) = A(t)e^{-t} = \frac{1}{2}e^{2t}e^{-t} = \frac{e^t}{2}.$$

• Obecné řešení zadané DR zapíšeme jako součet $y_p(t) + y_h(t) = y_c(t)$,

$$\underline{\underline{y_c(t) = \frac{e^t}{2} + Ae^{-t}}},\ Dom(y_c) = \mathbb{R}.$$

○ **Poznámka:** pokud bychom chtěli sestavit Wrónského matici, zjistili bychom, že má pouze jediný prvek. Soustava rovnic by degenerovala na tvar $[e^{-t}] \cdot [\dot{A}(t)] = [u(t)]$.

Příklad 2. Odvoďte konvolutorní integrál pro výpočet odezvy obecného lineárního skalárního systému prvního řádu na obecný vstup. Tj. řešte obecně diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= ay(t) + bu(t), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Řešení:

• Vyřešíme homogenní rovnici $\dot{y}(t) = ay(t)$

$$\lambda = a \ \Rightarrow\ y_h(t) = Ce^{at},\ C \in \mathbb{R}.$$

• Konstantu C prohlásíme za funkci času $c(t)$ ($y_h(t)$ tak přejde v $y_p(t)$), a derivujeme $y_p(t)$ až do řádu diferenciální rovnice (abychom mohli za všechny derivace $y(t)$ do rovnice dosadit),

$$\begin{aligned} y_p(t) &= c(t)e^{at}, \\ \dot{y}_p(t) &= \dot{c}(t)e^{at} + c(t)ae^{at}, \end{aligned}$$

• Dosadíme za všechny derivace $y(t)$ do rovnice, s ohledem na pravou stranu $u(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{c}(t)e^{at} + a\cancel{c(t)e^{at}} &= \cancel{ac(t)e^{at}} + bu(t), \\ \dot{c}(t)e^{at} &= bu(t), \\ \dot{c}(t) &= e^{-at}bu(t). \end{aligned}$$

• Použijeme metodu přímé integrace, konstanta je implicitně obsažená v integrálu,

$$c(t) = \int e^{-at}bu(t)dt.$$

• Dosadíme do předpisu pro partikulární řešení,

$$y_p(t) = e^{at}\int e^{-at}bu(t)dt = \left|\begin{array}{c}\text{přepíšeme integrační proměnnou na } \tau\\ \text{a vsuneme člen } e^{at} \text{ do integrandu,}\end{array}\right| = \int e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.$$

Tento integrál je podle definice konvolucí funkce $e^{a(t)}$ se vstupem $bu(t)$. Funkci $e^{a(t)}$ nazveme váhovou funkci systému $h(t)$. Pokud uvažujeme pouze kladný čas $t > 0$, můžeme tento integrál přepsat jako

$$y_p(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.$$

• Obecné řešení vyjádříme jako součet homogenního a partikulárního,

$$y_c(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + Ce^{at},\ C \in \mathbb{R}.$$

• Z počáteční podmínky určíme konstantu C,

$$y(0) = y_0 = \underbrace{\int_0^0 e^{a(0-\tau)}bu(\tau)d\tau}_{=0} + Ce^{a0} = C,\ \Rightarrow\ C = y_0.$$

• Celkové řešení (řešení počáteční úlohy) tedy můžeme psát jako

$$\underline{\underline{y(t)}} = \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}_{\text{odezva na vstup za n.p.p}} + \underbrace{y_0 \cdot e^{at}}_{\text{odezva na p.p.}},\ C \in \mathbb{R},\ Dom(y) = \mathbb{R}_0^+.$$

∘ **Poznámka:** dokázali jsme tedy, že konvolutorní integrál je odezvou systému na vstup za nulových počátečních podmínek (n.p.p.), pokud je totiž $y_0 = 0$, druhý člen bude 0.
∘ **Poznámka:** tato rovnice je skalární. Všiměte si, že postup řešení je prakticky stejný jako později u soustav rovnic.

Příklad 3. Řešte nehomogenní L-ODR bez konstantních koeficientů

$$t\dot{y}(t) + y(t) = t^2,$$
$$y(1) = 0.$$

Řešení:

• Vyřešíme homogenní rovnici $t\dot{y}(t)+y(t) = 0$, metodou separace proměnných. •
Hledáme konstantní řešení - ptáme se jestli existuje $K \in \mathbb{R}$, tak že $y_h(t) = K$

$$y_h(t) = K \ \Rightarrow\ \dot{y}_h(t) = 0,\ \text{dosadíme do rovnice}\ \Rightarrow\ 0 + K = 0\ \Rightarrow\ K = 0 = y_h(t).$$

• $\dot{y}$ přepíšeme na $\frac{dy}{dt}$, odseparujeme proměnné, integrujeme, vyjádříme $y_h(t)$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{1}{t}, \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t},& \\
\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dt}{t},& \\
\ln|y| = -\ln|t| + \ln e^C = \ln\frac{1}{|t|} + \ln D = \ln\frac{D}{|t|},& \ C \in \mathbb{R},\ D \in \mathbb{R}^+, \\
|y| = \frac{D}{|t|}, \Rightarrow\ y_h(t) = \frac{E}{t},\ E \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.&
\end{aligned}
$$

Z konstantního řešení víme, že $y_h(t) = 0$. Můžeme tedy tyto dvě funkce spojit v jednu povolením nulovosti konstanty E (za jiných okolností nelze docílit aby platilo že $y_h(t) = 0$).

Řešíme nehomogenní rovnici

• Konstantu E prohlásíme za funkci času ($y_h(t)$ tak přejde v $y_p(t)$), a derivujeme $y_p(t)$ až do řádu diferenciální rovnice (abychom mohli za všechny derivace $y(t)$ do rovnice dosadit)

$$
\begin{aligned}
y_p(t) &= E(t)t^{-1}, \\
\dot{y}_p(t) &= \dot{E}(t)t^{-1} + E(t)(-t^{-2}),
\end{aligned}
$$

• Dosadíme za všechny derivace $y(t)$ do rovnice, s ohledem na pravou stranu $u(t)$

$$
\begin{aligned}
t\dot{E}(t)t^{-1} - tE(t)t^{-2} + E(t)t^{-1} &= t^2, \\
\dot{E}(t) - \cancel{E(t)t^{-1}} + \cancel{E(t)t^{-1}} &= t^2, \\
\dot{E}(t) &= t^2.
\end{aligned}
$$

• Použijeme metodu přímé integrace, konstantu psát nemusíme,

$$
E(t) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}.
$$

• Obecné řešení zadané DR zapíšeme jako součet $y_p(t) + y_h(t) = y_c(t)$.

$$
y_c(t) = \frac{t^3}{3}t^{-1} + Et^{-1}, \Rightarrow\ y_c(t) = \frac{t^2}{3} + Et^{-1},\ E \in \mathbb{R},\ Dom(y_c) = \mathbb{R}\setminus\{0\}.
$$

• Dořešíme Cauchyho úlohu a vyjádříme celkové řešení,

$$
\begin{aligned}
y(1) = 0 = \frac{1}{3} + E, \Rightarrow\ E = -\frac{1}{3},& \\
\underline{\underline{y(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{1}{3t}}},\ Dom(y) = \mathbb{R}\setminus\{0\}.&
\end{aligned}
$$

∘ **Poznámka:** počáteční úloha ($y(0) = y_0$) by neměla kvůli dělení nulou smysl, nula nepatří do definičního oboru výsledné funkce.

Řešené příklady: rovnice vyšších řádů (s konstantními koeficienty)

Příklad 4. Řešte nehomogenní L-ODR s konstantními koeficienty

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 1 + e^{-t},$$
$$\dot{y}(0) = y(0) = 0.$$

Řešení:

• Vyřešíme homogenní rovnici,

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) &= 0, \\ \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \ &\Rightarrow \ (\lambda+2)(\lambda+1) = 0, \\ \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2, \ \Rightarrow \ \mathrm{FS} &= \{e^{-t}, e^{-2t}\}, \\ y_h(t) &= Ae^{-t} + Be^{-2t}, \ A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Řešíme nehomogenní rovnici

• Konstanty A, B prohlásíme za funkce času $a(t), b(t)$ ($y_h(t)$ tak přejde v $y_p(t)$), a derivujeme $y_p(t)$ až do řádu diferenciální rovnice. Výrazy $\dot{a}(t)$ a $\dot{b}(t)$ budeme pokládat rovny nule (v součtu), dokud se nedostaneme s derivováním y_p až do řádu DR, tedy $\ddot{y}_p(t)$,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= a(t)e^{-t} + b(t)e^{-2t}, \\ \dot{y}_p(t) &= \underbrace{\dot{a}(t)e^{-t}}_{\cdots+} - a(t)e^{-t} + \underbrace{\dot{b}(t)e^{-2t}}_{+\cdots=0} - 2b(t)e^{-2t}, \\ \ddot{y}_p(t) &= -\dot{a}(t)e^{-t} + a(t)e^{-t} - 2\dot{b}(t)e^{-2t} + 4b(t)e^{-2t}. \end{aligned}$$

• Pokud nyní tyto výrazy dosadíme do původní DR, výrazy bez derivací funkcí $a(t)$ a $b(t)$ se musí zákonitě vykrátit. Musí zbýt tedy výraz

$$-\dot{a}(t)e^{-t} - 2\dot{b}(t)e^{-2t} = 1 + e^{-t},$$

který nyní doplníme o vynulované výrazy s derivacemi $a(t)$ a $b(t)$ (z procesu derivování $y_p(t)$). Získáme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \dot{a}(t)e^{-t} + \dot{b}(t)e^{-2t} &= 0, \\ -\dot{a}(t)e^{-t} - 2\dot{b}(t)e^{-2t} &= 1 + e^{-t}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{W},\ \text{Wrónského matice}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Nyní zbývá tuto maticovou rovnici dořešit. Využijeme-li principu superpozice, můžeme řešit dvě na sobě nezávislé soustavy pro $1 = u_1(t)$ a $e^{-t} = u_2(t)$. Integrační konstanty opět psát nemusíme.

• Pro $u_1(t) = 1$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^{-t} & e^{-2t} & 0 \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} e^{-t} & e^{-2t} & 0 \\ 0 & -e^{-2t} & 1 \end{array}\right], \qquad \begin{array}{c} -e^{-2t}\dot{b}(t) = 1, \\ \dot{b}(t) = -e^{2t}, \\ b(t) = -\int e^{2t}dt = -\frac{e^{2t}}{2}, \end{array}$$

$$e^{-t}\dot{a}(t) + e^{-2t}\dot{b}(t) = e^{-t}\dot{a}(t) - e^{2t-2t} = 0, \Rightarrow \dot{a}(t) = e^{t},$$

$$a(t) = \int e^{t}dt = e^{t}.$$

• Dílčí partikulární výsledek pro $u_1(t)$ můžeme zapsat jako

$$y_{p_1}(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{-2t} = e^{t}e^{-t} - \frac{e^{2t}}{2}e^{-2t} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

• Pro $u_2(t) = e^{-t}$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^{-t} & e^{-2t} & 0 \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} & e^{-t} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} e^{-t} & e^{-2t} & 0 \\ 0 & -e^{-2t} & e^{-t} \end{array}\right], \qquad \begin{array}{c} -e^{-2t}\dot{b}(t) = e^{-t}, \\ \dot{b}(t) = -e^{t}, \\ b(t) = -\int e^{t}dt = -e^{t}, \end{array}$$

$$e^{-t}\dot{a}(t) + e^{-2t}\dot{b}(t) = e^{-t}\dot{a}(t) - e^{-2t}e^{t} = 0, \Rightarrow \dot{a}(t) = 1,$$

$$a(t) = \int 1dt = t.$$

• Dílčí partikulární výsledek pro $u_2(t)$ můžeme zapsat jako

$$y_{p_2}(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{-2t} = te^{-t} - e^{t}e^{-2t} = te^{-t} - e^{-t}.$$

• Obecné řešení zadané DR získáme jako součet homogenního řešení a obou partikulárních řešení,

$$y_c(t) = y_h(t) + y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{1}{2} + te^{-t} - e^{-t}, \ A, B \in \mathbb{R}.$$

○ **Poznámka:** výraz $Ae^{-t} - e^{-t}$ můžeme sloučit v jediný přepsáním konstanty A,

$$y_c(t) = Ce^{-t} + Be^{-2t} + \frac{1}{2} + te^{-t}, \ C, B \in \mathbb{R}.$$

• Dosadíme počáteční podmínku pro nultou derivaci funkce $y_c(t)$,

$$y(0) = 0 = C + B + \frac{1}{2}, \Rightarrow \ C + B = -\frac{1}{2}.$$

• $y_c(t)$ derivujeme a dosadíme počáteční podmínku pro první derivaci,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -Ce^{-t} - 2Be^{-2t} + e^{-t} - te^{-t}, \\ \dot{y}(0) &= 0 = -C - 2B + 1, \Rightarrow \ C + 2B = 1. \end{aligned}$$

• Dořešíme soustavu rovnic,

$$C = -\frac{1}{2} - B, \Rightarrow -\frac{1}{2} - B + 2B = 1, \Rightarrow B = \frac{3}{2}, \Rightarrow C = -2.$$

• Celkové řešení Cauchyho úlohy tedy můžeme psát jako

$$\underline{\underline{y(t) = -2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} + te^{-t}}}, \; Dom(y) = \mathbb{R}.$$

Příklad 5. Řešte nehomogenní L-ODR s konstantními koeficienty

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y} + y = e^t.$$

Řešení:

• Vyřešíme homogenní rovnici,

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 &\Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \\ \lambda_{1,2} = 1, &\Rightarrow \text{FS} = \{e^t, te^t\} \\ y_h(t) &= Ae^t + Bte^t, \; A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Řešíme nehomogenní rovnici

• Konstanty A, B prohlásíme za funkce času $a(t), b(t)$ ($y_h(t)$ tak přejde v $y_p(t)$), a derivujeme $y_p(t)$ až do řádu diferenciální rovnice. Výrazy $\dot{a}(t)$ a $\dot{b}(t)$ budeme pokládat rovny nule (v součtu), dokud se nedostaneme s derivováním y_p až do řádu DR, tedy $\ddot{y}_p(t)$,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= a(t)e^t + b(t)te^t, \\ \dot{y}_p(t) &= \underbrace{\dot{a}(t)e^t}_{\cdots +} + a(t)e^t + \underbrace{\dot{b}(t)te^t}_{+\cdots=0} + b(t)e^t + b(t)te^t \\ \ddot{y}_p(t) &= \underbrace{\dot{a}(t)e^t}_{\cdots +} + a(t)e^t + \underbrace{\dot{b}(t)e^t}_{+\cdots+} + b(t)e^t + \underbrace{\dot{b}(t)te^t}_{+\cdots=e^t} + b(t)e^t + b(t)te^t. \end{aligned}$$

Výrazy bez derivací hledaných funkcí $a(t)$ a $b(t)$ se musí po dosazení do rovnice vykrátit, zbydou jen výrazy s derivacemi, které budou rovny pravé straně.

• Získáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \dot{a}(t)e^t + \dot{b}(t)te^t &= 0, \\ \dot{a}(t)e^t + \dot{b}(t)e^t + \dot{b}(t)te^t &= e^t, \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{W}, \text{ Wrónského matice}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Nyní zbývá tuto maticovou rovnici dořešit. K tomu můžeme využít např. Cramerovo pravidlo.

• Vypočítáme determinant matice $\mathbf{W}$

$$\det(\mathbf{W}) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} + te^{2t} - te^{2t} = e^{2t}.$$

• Vypočítáme determinant matice $\mathbf{W}_1$, která vznikne zaměněním prvního sloupce matice za vektor pravých stran,

$$\det(\mathbf{W}_1) = \begin{vmatrix} 0 & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = 0(e^t + te^t) - te^{2t} = -te^{2t}.$$

• První složku vektoru neznámých pak můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{\det(\mathbf{W}_1)}{\det(\mathbf{W})} = \frac{-te^{2t}}{e^{2t}} = -t, \\ \Rightarrow\ a(t) &= -\int t dt = -\frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

• Vypočítáme determinant matice $\mathbf{W}_2$, která vznikne zaměněním druhého sloupce matice za vektor pravých stran,

$$\det(\mathbf{W}_2) = \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} - 0(e^t) = e^{2t}.$$

• Druhou složku vektoru neznámých pak můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \dot{b}(t) &= \frac{\det(\mathbf{W}_2)}{\det(\mathbf{W})} = \frac{e^{2t}}{e^{2t}} = 1, \\ \Rightarrow\ b(t) &= \int 1 dt = t. \end{aligned}$$

• Partikulární řešení tedy bude ve tvaru

$$y_p(t) = a(t)e^t + b(t)te^t = -\frac{t^2e^t}{2} + t^2e^t = \frac{t^2e^t}{2}.$$

• Obecné řešení zadané DR pak můžeme psát jako součet homogenního a partikulárního,

$$\underline{\underline{y_c(t) = Ae^t + Bte^t + \frac{t^2e^t}{2}}},\ A, B \in \mathbb{R},\ Dom(y) = \mathbb{R}.$$

Příklad 6. Řešte nehomogenní L-ODR s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + y(t) &= 1, \\ \dot{y}(0) = y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení:

• Vyřešíme homogenní rovnici,

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0,$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm i,$$

$$\text{komplexně sdružený kořen, } \underbrace{\alpha}_{=0} \pm \underbrace{\beta}_{=1} \cdot i, \;\Rightarrow\; \text{FS} = \{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\},$$

$$\Rightarrow\; \text{FS} = \{\cos(t), \sin(t)\}, \;\Rightarrow\; y_h(t) = A\cos(t) + B\sin(t),\; A, B \in \mathbb{R}.$$

Řešíme nehomogenní rovnici

• Konstanty A, B prohlásíme za funkce času $a(t), b(t)$ ($y_h(t)$ tak přejde v $y_p(t)$), a derivujeme $y_p(t)$ až do řádu diferenciální rovnice. Výrazy $\dot{a}(t)$ a $\dot{b}(t)$ budeme pokládat rovny nule (v součtu), dokud se nedostaneme s derivováním y_p až do řádu DR, tedy $\ddot{y}_p(t)$,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= a(t)\cos(t) + b(t)\sin(t),\\ \dot{y}_p(t) &= \underbrace{\dot{a}(t)\cos(t)}_{\cdots+} - a(t)\sin(t) + \underbrace{\dot{b}(t)\sin(t)}_{+\cdots=0} + b(t)\cos(t)\\ \ddot{y}_p(t) &= \underbrace{-\dot{a}(t)\sin(t)}_{\cdots+} - a(t)\cos(t) + \underbrace{\dot{b}(t)\cos(t)}_{+\cdots=1} - b(t)\sin(t). \end{aligned}$$

Výrazy bez derivací hledaných funkcí $a(t)$ a $b(t)$ se musí po dosazení do rovnice vykrátit, zbydou jen výrazy s derivacemi, které budou rovny pravé straně.

• Získáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \dot{a}(t)\cos(t) + \dot{b}(t)\sin(t) &= 0,\\ -\dot{a}(t)\sin(t) + \dot{b}(t)\cos(t) &= 1, \end{aligned} \;\Rightarrow\; \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{W},\text{ Wrónského matice}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}(t)\\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nyní zbývá tuto maticovou rovnici dořešit. K tomu můžeme využít např. Cramerovo pravidlo.

• Vypočítáme determinant matice $\mathbf{W}$

$$\det(\mathbf{W}) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos^2(t) + \sin^2(t) \equiv 1.$$

• Vypočítáme determinant matice $\mathbf{W}_1$, která vznikne zaměněním prvního sloupce matice za vektor pravých stran,

$$\det(\mathbf{W}_1) = \begin{vmatrix} 0 & \sin(t)\\ 1 & \cos(t) \end{vmatrix} = 0 \cdot \cos(t) - \sin(t) = -\sin(t).$$

• První složku vektoru neznámých pak můžeme vyjádřit jako

$$\dot{a}(t) = \frac{\det(\mathbf{W}_1)}{\det(\mathbf{W})} = \frac{-\sin(t)}{1} = -\sin(t),$$

$$\Rightarrow\; a(t) = -\int \sin(t)dt = \cos(t).$$

• Vypočítáme determinant matice $\mathbf{W}_2$, která vznikne zaměněním druhého sloupce matice za vektor pravých stran,

$$\det(\mathbf{W}_2) = \begin{vmatrix} \cos(t) & 0 \\ -\sin(t) & 1 \end{vmatrix} = \cos(t) + 0 \cdot \sin(t) = \cos(t).$$

• Druhou složku vektoru neznámých pak můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \dot{b}(t) &= \frac{\det(\mathbf{W}_2)}{\det(\mathbf{W})} = \frac{\cos(t)}{1} = \cos(t), \\ \Rightarrow\ b(t) &= \int \cos(t)dt = \sin(t). \end{aligned}$$

• Partikulární řešení tedy bude ve tvaru

$$y_p(t) = a(t)\cos(t) + b(t)\sin(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

• Obecné řešení zadané DR pak můžeme psát jako součet homogenního a partikulárního,

$$y_c(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + 1,\ \ A, B \in \mathbb{R},\ \ Dom(y) = \mathbb{R}.$$

• Dosadíme počáteční podmínku pro nultou derivaci funkce $y_c(t)$,

$$y(0) = 0 = A + 1,\ \Rightarrow\ \ A = -1.$$

• $y_c(t)$ derivujeme a dosadíme počáteční podmínku pro první derivaci,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -A\sin(t) + B\cos(t), \\ \dot{y}(0) &= 0 = B,\ \Rightarrow\ \ B = 0. \end{aligned}$$

• Celkové řešení Cauchyho úlohy tedy můžeme psát jako

$$\underline{\underline{y(t) = 1 - \cos(t)}},\ \ Dom(y) = \mathbb{R}.$$

Příklady na samostatné procvičení

Řešte následující diferenciální rovnice

Příklad 1. $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 1$

($y(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t} + 1$)

Příklad 2. $\ddot{y}(t) - 4y(t) = e^{2t}$

($y(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}$)

Příklad 3. $\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 1$

($y(t) = Ae^{t}\cos(t) + Be^{t}\sin(t) + \frac{1}{2}$)

2.2.5 Nehomogenní L-ODR s KK - metoda odhadu

Metoda odhadu, nebo metoda neurčitých koeficientů je metoda hledání partikulárního řešení a nebudeme se jí zde zaobírat tak podrobně jako s ostatními metodami. Tato metoda lze použít na DR se speciální pravou stranou,

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \underline{\underline{e^{\alpha t}[P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)]}}, \tag{16}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (souvisí s kořeny char. pol., viz. dále), a $P_1(t), P_2(t)$ jsou polynomy libovolného řádu v proměnné t. Hlavní princip metody spočívá v tom, že z principu linearity DR vyplývá, že pro pravou v daném tvaru musí mít řešení také exponenciální průběh. Řešení se pak převádí na soustavu lineárních rovnic, ze které získáme hledané parametry. Odhad partikulárního řešení bude ve tvaru,

$$y_p(t) = t^k e^{\alpha t}[Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)], \tag{17}$$

kde

- Q_1 a Q_2 jsou polynomy (s obecnými koeficienty) pro které platí

$$st(Q_1) = st(Q_2) = \max\{st(P_1), st(P_2)\},$$

- k je násobnost kořene charakteristické rovnice, ale pouze pokud jím je $\alpha + \beta i$.

Použití této metody se tedy redukuje na nalezení kořenů charakteristického polynomu a určení neznámých koeficientů polynomů Q_1 a Q_2.

Řešené příklady: metoda odhadu

Příklad 1. Řešte diferenciální rovnici ve tvaru

$$\ddot{y}(t) + 5y(t) = e^{-2t}$$

Řešení:

• Vyřešíme homogenní rovnici,

$$\lambda^2 + 5 = 0, \;\Rightarrow\; \lambda = \pm i\sqrt{5},$$
$$\Rightarrow\; y_h(t) = A\cos(\sqrt{5}t) + B\sin(\sqrt{5}t),\; A, B \in \mathbb{R},$$

• Použijeme metodu odhadu, určíme čemu se rovná $\alpha,\ \beta, k$,

$$u(t) = e^{-2t}, \;\Rightarrow\; \alpha = -2,\; \beta = 0,\; \Rightarrow\; \alpha + \beta i = -\,2,$$
$$\text{protože ani jeden z } \lambda = \pm i\sqrt{5} \text{ kořenů char. rce není } -2, \;\Rightarrow k = 0$$

• Stupně obou polynomů P_1, P_2 je 0, $\Rightarrow$ Q_1, Q_2 se redukuje na konstantu (součet dvou konstant z $\mathbb{R}$ lze přepsat na jednu konstantu).
• Na základě znalosti $\alpha,\ \beta, k$ a stupně polynomů určíme odhad partikulárního řešení,

$$y_p(t) = Ce^{-2t},\ \text{kde } C \text{ reprezentuje polynomy nultého stupně.}$$

• Nyní y_p dvakrát derivujeme, dosadíme do DR a určíme konstantu C,

$$\begin{aligned} \dot{y}_p(t) &= -2Ce^{-2t}, \\ \ddot{y}_p(t) &= 4Ce^{-2t}, \\ \Rightarrow\ 4C\cancel{e^{-2t}} + 5C\cancel{e^{-2t}} &= \cancel{e^{-2t}}, \\ (4+5)C = 1,\ \Rightarrow\ C &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

• Celkové řešení zadané DR bude tedy,

$$y_c(t) = y_h(t) + y_p(t) = \underline{\underline{A\cos(\sqrt{5}t) + B\sin(\sqrt{5}t) + \frac{1}{9}e^{-2t}}},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2. Řešte diferenciální rovnici ve tvaru

$$\ddot{y}(t) - 4y(t) = e^{2t}$$

Řešení:
• Vyřešíme homogenní rovnici,

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4 = 0,\ &\Rightarrow\ \lambda = \pm 2, \\ \Rightarrow\ y_h(t) &= Ae^{2t} + Be^{-2t},\ A, B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

• Použijeme metodu odhadu, určíme čemu se rovná $\alpha,\ \beta, k$,

$$u(t) = e^{2t},\ \Rightarrow\ \alpha = 2,\ \beta = 0,\ \Rightarrow\ \alpha + \beta i = 2,$$
$$\text{protože jeden z kořenů } \lambda = \pm 2 \text{ char. rce je 2},\ \Rightarrow k = 1$$

• Stupně obou polynomů P_1, P_2 je 0, $\Rightarrow$ Q_1, Q_2 se redukuje na konstantu (součet dvou konstant z $\mathbb{R}$ lze přepsat na jednu konstantu).
• Na základě znalosti $\alpha,\ \beta, k$ a stupně polynomů určíme odhad partikulárního řešení,

$$y_p(t) = Ct^1e^{2t},\ \text{kde } C \text{ reprezentuje polynomy nultého stupně (tj. konstantu).}$$

• Nyní y_p dvakrát derivujeme, dosadíme do DR a určíme konstantu C,

$$\begin{aligned} \dot{y}_p(t) &= Ce^{2t} + 2Cte^{2t}, \\ \ddot{y}_p(t) &= 2Ce^{2t} + 2Ce^{2t} + 4Cte^{2t}, \\ \Rightarrow\ 4C\cancel{e^{2t}} + 4Ct\cancel{e^{2t}} - 4Ct\cancel{e^{2t}} &= \cancel{e^{2t}}, \\ 4C + \cancel{4Ct} - \cancel{4Ct} = 1,\ \Rightarrow\ C &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

• Celkové řešení zadané DR bude tedy,

$$y_c(t) = y_h(t) + y_p(t) = \underline{\underline{Ae^{2t} + Be^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}}}, \; A, B \in \mathbb{R}.$$

2.2.6 Soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu

Tyto rovnice jsou tvaru (řádu n) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u(t), \tag{18}$$
$$a_{i,j} \in \mathbb{R} \; \forall i, j \in \widehat{n}.$$

Takové rovnice můžeme řešit buď pomocí vlastních vektorů přímo, nebo obecněji - maticově, kdy soustavu řešíme obdobným způsobem jako skalární diferenciální rovnice prvního řádu. Vždy ale budeme potřebovat najít vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

Odvození řešení:
Pracujeme s rovnicí tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}u(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{19}$$

• Vyřešíme homogenní rovnici $\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{O}$, ([25])

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \mathbf{O}, \; (\text{úloha na vl. čísla a vl. vektory}), \\ \lambda\mathbf{I} &= \mathbf{A}, \; \Rightarrow \; \text{FS} = \{e^{\mathbf{A}t}\}, \\ \Rightarrow \; \mathbf{x}_h(t) &= e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{C}, \; \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \\ \mathbf{x}_h(0) &= \mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}\cdot 0}\mathbf{C} = \mathbf{I}\cdot\mathbf{C}, \; \Rightarrow \; \mathbf{C} = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}_h(t) &= \underline{\underline{e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_0.}} \end{aligned} \tag{20}$$

Pro **nenásobná** vlastní čísla λ_i a k nim příslušné vlastní vektory $\mathbf{v}_i$ bude mít jim odpovídající část Fundamentálního systému tvar

$$\text{FS} = \{\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}\}. \tag{21}$$

[25] $\mathbf{O}$ je nulová matice příslušných rozměrů.

Pro **násobná** vlastní čísla λ a k nim příslušné vlastní zobecněné vektory $\mathbf{v}_k$ bude mít jim odpovídající část Fundamentálního systému tvar

$$\mathrm{FS} = \{\mathbf{v}_1 e^{\lambda t}, (\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1)e^{\lambda t}, (\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2 + \frac{t^2}{2}\mathbf{v}_1)e^{\lambda t}, \ldots, (\mathbf{v}_k + \cdots + \frac{t^k}{k!}\mathbf{v}_1))e^{\lambda t}\}. \tag{22}$$

• Nehomogenní rovnici vyřešíme pomocí variace konstant,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(t) &= e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{c}(t),\ \mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \\ \dot{\mathbf{x}}_p(t) &= e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{c}}(t) + \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}(t), \end{aligned} \tag{23}$$

dosadíme do DR,

$$\{e^{\mathbf{A}t}\}^{-1} \cdot / \qquad e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{c}}(t) + \cancel{\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}(t)} - \cancel{\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}(t)} = \mathbf{b}u(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}}(t) &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{b}u(t), \\ \mathbf{c}(t) &= \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}u(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

Dosadíme zpět do partikulárního řešení,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(t) &= e^{\mathbf{A}t} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}u(\tau)d\tau, \\ \mathbf{x}_p(t) &= \underline{\underline{\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau.}} \end{aligned} \tag{24}$$

• Celkové řešení soustavy DR prvního řádu tedy bude,

$$\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) = \underline{\underline{e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau.}} \tag{25}$$

• Budeme-li mít navíc ještě informaci o návaznosti na skalární výstup ("výstupní rovnici") ve tvaru $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u$, výstup bude ve tvaru,

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u. \tag{26}$$

• Pro výpočet nás zajímá především matice $e^{\mathbf{A}t}$, kterou můžeme vypočítat různými způsoby.

Řešené příklady: soustavy diferenciálních rovnic

Příklad 1. Řešte homogenní soustavu diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 0\\ \dot{y}(t) &= 0\end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}, \quad \begin{aligned}x(0) &= 1\\ y(0) &= 2\end{aligned}$$

Řešení:

Všimněme si, že rovnice soustavy jsou vzájemně oddělitelné - lze je řešit samostatně a následně poskládat do vektoru. Na první pohled je vidět, že řešením každé z rovnic bude konstanta splňující počáteční podmínku, tedy vektor $[1,\ 2]^T$, tyto rovnice ale můžeme řešit také jako soustavu.

• Najdeme vl. čísla a vl. vektory matice $\mathbf{A}$,

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \ \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = 0.$$

Výpočet vl. vektorů je v tomto případě poněkud méně běžný - protože můžeme najít <u>dva</u> lineárně nezávislé vektory $\mathbf{v}_{1,2}$ a matice $\mathbf{A}$ je <u>druhého</u> řádu, přestože vl. číslo $\lambda_{1,2} = 0$ je násobné, není třeba využívat algoritmu pro výpočet zobecněných vl. vektorů. Je zřejmé, že dva libovolné, <u>lineárně nezávislé</u> vektory budou splňovat rovnici pro vlastní čísla. Pro názornost zvolme $\mathbf{v}_1$, a $\mathbf{v}_2$ lineárně nezávislé například následovně, (ale můžeme volit i mnohem jednodušeji)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}.$$

• Určíme Fundamentální systém funkcí,

$$\mathrm{FS} = \{\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t},\ \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}\} = \{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} e^{0t},\ \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} e^{0t}\} = \{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\}.$$

• Určíme obecné řešení,

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A+B\\ A-B\end{bmatrix}, \ A, B \in \mathbb{R}.$$

• Najdeme konstanty A, B,

$$\begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A+B\\ A-B\end{bmatrix}$$
$$\dots \ \Rightarrow \ A = \frac{3}{2},\ B = -\frac{1}{2}.$$

• Celkové řešení tedy bude ve tvaru,

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix}A+B\\ A-B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}}},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2. Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{1}(t).$$

Řešení:

- Nalezneme vl. čísla matice $\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$,

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0, \;\lambda_1 = 1, \;\lambda_2 = 5.$$

- Nalezneme vl. vektory matice $\mathbf{A}$,

$$\lambda_1 = 1, \; \left[\begin{array}{cc|c} 1-2 & -3 & 0 \\ -1 & 1-4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{-3} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5, \; \left[\begin{array}{cc|c} 5-2 & -3 & 0 \\ -1 & 5-4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{+1} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Sestavíme Fundamentální systém funkcí,

$$\mathrm{FS} = \{\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \; \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}\} = \{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}\}$$

- Určíme obecné řešení homogenní části,

$$\begin{bmatrix} x_{1h}(t) \\ x_{2h}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} = \begin{bmatrix} -3Ae^t + Be^{5t} \\ Ae^t + Be^{5t} \end{bmatrix}, \; A, B \in \mathbb{R}.$$

- Vypočítáme matici $e^{\mathbf{A}t}$ pomocí Jordanovy transformace,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}t} \mathbf{P}^{-1}, \text{kde } \mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2] \text{ a } \mathbf{J} \text{ je Jordanova forma matice } \mathbf{A},$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \; e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{P}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \cdots = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{5t} + 3e^t & 3e^{5t} - 3e^t \\ e^{5t} - e^t & 3e^{5t} + e^t \end{bmatrix}$$

• Vyřešíme partikulární integrál,

$$\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{5(t-\tau)} + 3e^{(t-\tau)} & 3e^{5(t-\tau)} - 3e^{(t-\tau)} \\ e^{5(t-\tau)} - e^{(t-\tau)} & 3e^{5(t-\tau)} + e^{(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{5(t-\tau)} - 3e^{(t-\tau)} \\ 3e^{5(t-\tau)} + e^{(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \left[\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\frac{3e^{5(t-\tau)}}{5} + 3e^{(t-\tau)} \\ -\frac{3e^{5(t-\tau)}}{5} - e^{(t-\tau)} \end{bmatrix}\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} + 3 \\ -\frac{3}{5} - 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\frac{3e^{5t}}{5} + 3e^{t} \\ -\frac{3e^{5t}}{5} - e^{t} \end{bmatrix} = \cdots = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 3e^{5t} - 15e^{t} \\ 3e^{5t} + 5e^{t} \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

• Celkové řešení bude záviset na (nezadaných) počátečních podmínkách a bude tvaru

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3Ae^{t} + Be^{5t} \\ Ae^{t} + Be^{5t} \end{bmatrix}}_{\text{homogenní část}} + \underbrace{\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 3e^{5t} - 15e^{t} \\ 3e^{5t} + 5e^{t} \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\text{partikulární část}},\ A, B, t \in \mathbb{R}.$$

• Část partik. řeš. můžeme zahrnout do homogenního přepsáním konstant A, B,

$$C \triangleq A + \frac{5}{20} \in \mathbb{R}, \qquad D \triangleq B + \frac{3}{20} \in \mathbb{R},$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3Ce^{t} + De^{5t} \\ Ce^{t} + De^{5t} \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix},\ C, D, t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3. Řešte soustavu diferenciálních rovnic v Jordanově tvaru

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

• Matice soustavy je ve tvaru Jordanovy diagonální matice, vl. čísla jsou tedy na diagonále.
• Vl. vektory jsou sloupce jednotkové matice **I**.
• Sestavíme Fundamentální systém funkcí,

$$\mathrm{FS} = \{\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t},\ \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t},\ (\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2)e^{\lambda_2 t}\},$$

$$= \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}\} = \{ \begin{bmatrix} e^{t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \}.$$

• Sloupce matice $e^{\mathbf{A}t}$ jsou v tomto případě tvořeny přímo fundamentálními funkcemi,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

• Odezva na počáteční podmínky (homogenní řešení) bude

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}} = e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}}}, \ t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Příklady na samostatné procvičení

Řešte následující diferenciální rovnice s uvedenými podmínkami.

Příklad 1. $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{6}e^{3t} - \frac{4}{6}e^{-3t} \\ \frac{5}{6}e^{3t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \end{bmatrix} \right)$

Příklad 2. $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$

$\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{t} + Be^{5t} \\ -Ae^{t} + 3Be^{5t} \end{bmatrix}, \ A, B \in \mathbb{R} \right)$

2.3 Řešení ve frekvenční oblasti, Laplaceova transformace

Laplaceova integrální transformace rozvíjí prvky spojitých vektorových prostorů (tradičně v časové proměnné t) do báze komplexních exponenciál (komplexní harmonické funkce), kde se s nimi často pracuje snáze, nežli v časové oblasti. Postup řešení L-ODR pomocí $\mathscr{L}$-transformace může vypadat následovně,

- aplikování $\mathscr{L}$-transformace (na celou rovnici, používáme tzv. slovník),
- vyjádření hledané transformované funkce $Y(p)$, $\mathbf{X}(p)$, $\ldots$,
- aplikování inverzní $\mathscr{L}$-transformace.

Odvození řešení pro soustavy L-ODR prvního řádu

Pracujeme s rovnicí tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}u(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{27}$$

• Aplikujeme $\mathscr{L}$-transformaci,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}u(t), \ /\mathscr{L}\{\} \\ p\mathbf{X}(p) - \mathbf{x}_0 - \mathbf{A}\mathbf{X}(p) &= \mathbf{b}U(p). \end{aligned} \tag{28}$$

• Vyjádříme $\mathbf{X}(p)$,

$$\mathbf{X}(p)(p\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}U(p),$$
$$\mathbf{X}(p) = \underbrace{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0}_{\text{odezva na poč. pod.}} + \underbrace{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(p)}_{\text{odezva na řízení}}. \tag{29}$$

• Aplikujeme inverzní $\mathscr{L}$-transformaci,

$$\mathbf{X}(p) = (p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(p),\ /\mathscr{L}^{-1}\{\}$$
$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}}_{e^{\mathbf{A}t}}\mathbf{x}_0 + \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(p)\}}_{\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau}. \tag{30}$$

• Je-li zadána také výstupní rovnice, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t), /\mathscr{L}\{\}$,

$$\begin{aligned} Y(p) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(p) + \mathbf{D}U(p) = \\ &= \mathbf{C}(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(p) + \mathbf{D}U(p),\ /\mathscr{L}^{-1}\{\} \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(p)\} + \mathbf{D}u(t). \end{aligned} \tag{31}$$

Řešené příklady: $\mathscr{L}$-transformace

Příklad 1. Určete odezvu na Diracův puls a jednotkový skok

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = -3 + 4u(t),\ x(0) = 0.$$

Řešení:

• Aplikujeme $\mathscr{L}$-transformaci a vyjádříme $x(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + 2x(t) &= -3 + 4u(t),\ /\mathscr{L}\{\}, \\ pX(p) - x(0) + 2X(p) &= 4U(p) - \frac{3}{p}, \\ X(p) &= \frac{4}{p+2}U(p) - \frac{3}{p(p+2)}. \end{aligned}$$

• Odezva na Diracův puls,

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t),\ /\mathscr{L}\{\}, \\ U(p) &= 1, \\ \Rightarrow\ X(p) &= \frac{4}{p+2} - \frac{3}{p(p+2)},\ /\mathscr{L}^{-1}\{\}, \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x(t) = 4e^{-2t} - 3\frac{1}{2}(1-e^{-2t})}},\ t > 0.$$

• Odezva na jednotkový skok,

$$\begin{aligned} u(t) &= \underline{1}(t),\ /\mathscr{L}\{\}, \\ U(p) &= \frac{1}{p}, \\ \Rightarrow\ X(p) &= \frac{4}{p(p+2)} - \frac{3}{p(p+2)} = \frac{1}{p(p+2)},\ /\mathscr{L}^{-1}\{\}, \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})}},\ \forall t.$$

Příklad 2. Určete odezvu na Diracův puls

$$\begin{aligned} 2\ddot{\varphi}(t) + 8\varphi(t) &= \delta(t), \\ \varphi(0) &= 1, \\ \dot{\varphi}(0) &= 2 \end{aligned}$$

Řešení:

• Aplikujeme $\mathscr{L}$-transformaci a vyjádříme $\phi(t)$,

$$\begin{aligned} 2\ddot{\varphi}(t) + 8\varphi(t) &= \delta(t),\ /\mathscr{L}\{\}, \\ 2[p^2\phi(p) - p\varphi(0) - \dot{\varphi}(0)] + 8\phi(p) &= 1, \\ \phi(p)(2p^2+8) &= 2p\varphi(0) + 2\dot{\varphi}(0) + 1, \\ \phi(p) = \frac{2p\varphi(0)}{2p^2+2\cdot 2^2} + \frac{2\dot{\varphi}(0)}{2p^2+2\cdot 2^2} &+ \frac{1}{2p^2+2\cdot 2^2}. \end{aligned}$$

• připravíme rovnici tak, aby bylo možné přímo použít "slovník" $\mathscr{L}$-transformace,

$$\phi(p) = \frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}p^2+\cancel{2}\cdot 2^2} + \frac{\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}p^2+\cancel{2}\cdot 2^2} + \underbrace{\frac{\cancel{2}\cdot 2}{2\cdot 2}}_{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}p^2+\cancel{2}\cdot 2^2}.$$

• Aplikujeme inverzní $\mathscr{L}$-transformaci,

$$\phi(p) = \frac{p}{p^2+2^2} + \frac{2}{p^2+2^2} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{p^2+2^2},\ /\mathscr{L}^{-1}\{\}$$

$$\underline{\underline{\varphi(t) = \cos(2t) + \sin(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t)}},\ t>0.$$

∘ **Poznámka:** při aplikaci Diracova pulsu vzniká vždy nespojitost ve výsledném řešení (v počátečním čase se liší limita zleva a zprava), ve výsledném partikulárním řešení tedy

musíme uvažovat pouze kladný čas pro zachování konzistence zápisu. Je třeba mít na paměti, že Diracova funkce je limitní aproximace nekonečně úzkého pulsu nekonečné velikosti s jednotkovou plochou. V reálných fyzikálních systémech takový vstup nelze realizovat a skutečné řešení se bude pouze limitně blížit se zmenšující se šířkou pulsu na vstupu. Přesný výsledek bychom dostali zavedením exaktního tvaru pulsu například jako superpozice dvou skokových funkcí.

Příklad 3. Řešte homogenní soustavu ODR prvního řádu se zadanou poč. pod.,

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}, \quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix} = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}.$$

Řešení:

- Řešení bude mít tvar

$$\mathbf{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0\} = \mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_0.$$

- Vypočítáme matici $(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$,

$$p\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix}p-1 & -4\\ 0 & p-2\end{bmatrix},$$

$$(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A})}\left[(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{Adj}\right]$$

$$= \frac{1}{(p-1)(p-2)}\begin{bmatrix}p-2 & 4\\ 0 & p-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{p-1} & \frac{4}{(p-1)(p-2)}\\ 0 & \frac{1}{p-2}\end{bmatrix}.$$

- Upravíme prvek na pozici $(1,2)$ tak, aby bylo možné přímo použít "slovník" $\mathscr{L}$-transformace, tj. výraz rozložíme na parciální zlomky (např. pomocí residuové věty),

$$\frac{4}{(p-1)(p-2)} = \frac{r_1}{p-1} + \frac{r2}{p-2},$$

$$r_1 = \lim_{p\to 1}\frac{4}{p-2} = -4,$$

$$r_2 = \lim_{p\to 2}\frac{4}{p-1} = 4.$$

- Dosadíme do řešení,

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}}} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{p-1} & \frac{4}{p-2}-\frac{4}{p-1}\\ 0 & \frac{1}{p-2}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^t & 4e^{2t}-4e^t\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix}x_{10}e^t + x_{20}(4e^{2t}-4e^t)\\ x_{20}e^{2t}\end{bmatrix}}}, \quad \forall t.$$

Příklady na samostatné procvičení

Řešte následující diferenciální rovnice s uvedenými podmínkami.

Příklad 1. $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 2,\ \dot{y}(0) = 1,\ y(0) = 0$

$(\ y(t) = 2 - te^{-t} - 2e^{-t} \ )$

Příklad 2. $\dddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) = 0,\ \ddot{y}(0) = -2,\ \dot{y}(0) = 1,\ y(0) = 0$

$(\ y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \ )$

Příklad 3. $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(\ \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5(e^{2t} + 1) \\ 0.5(e^{2t} - 1) \end{bmatrix} \ )$

3 Lokální linearizace systému, stavový popis

V praxi často při modelování reálných systémů dostáváme nelineární diferenciální rovnice, případně jejich soustavu, někdy doplněnou o dodatečné algebraické vazby. Cílem linearizace je získat aproximaci chování dynamického systému v blízkém okolí nějakého pracovního bodu pro účely další analýzy, případně návrh regulátoru lineárními metodami. Převedeme-li nelineární model na stavový popis, získáme rovnice ve tvaru (pro SISO systém,[26])

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1[x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)]\\ \vdots \\ f_n[x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)]\end{bmatrix} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t),u(t)], \\ y(t) &= h[x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)] = h[\mathbf{x}(t),u(t)].\end{aligned} \tag{32}$$

Princip linearizace spočívá v rozvoji vektorové funkce $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t),u(t)]$ do Taylorovo polynomu prvního řádu v bodě $[\mathbf{x}_r,u_r]$ pro který platí že $\mathbf{f}[\mathbf{x}_r,u_r]=\mathbf{o}$,

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}(t),u(t)] \approx \underbrace{\overbrace{\mathbf{f}[\mathbf{x}_r(t),u_r(t)]}^{\text{volíme aby}}}_{\stackrel{!}{=}\mathbf{o}} + d\mathbf{f}[\mathbf{x}_r(t),u_r(t)] + \underbrace{\cancel{\frac{d^2\mathbf{f}[\mathbf{x}_r(t),u_r(t)]}{2!}} + \dots}_{\text{zanedbáváme}}, \tag{33}$$

kde symbol $d^k\mathbf{f}[.]$ je (k-tý, $k\in\mathbb{N}$) totální diferenciál funkce $\mathbf{f}[.]$, resp.

$$d\mathbf{f}[\mathbf{x}_r(t),u_r(t)] = \underbrace{\left.\frac{\partial\mathbf{f}[\mathbf{x}(t),u(t)]}{\partial\mathbf{x}(t)}\right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r,\ u(t)=u_r}}_{\text{Jacobiova matice }\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{x}(t) + \underbrace{\left.\frac{\partial\mathbf{f}[\mathbf{x}(t),u(t)]}{\partial u(t)}\right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r,\ u(t)=u_r}}_{\text{Jacobiova matice }\mathbf{B}} \cdot du(t), \tag{34}$$

$$\text{podrobněji, } \mathbf{A} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1[x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)]}{\partial x_1(t)} & \dots & \frac{\partial f_1[x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)]}{\partial x_n(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n[x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)]}{\partial x_1(t)} & \dots & \frac{\partial f_n[x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)]}{\partial x_n(t)}\end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r,\ u(t)=u_r},$$

$$\mathbf{B} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1[x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)]}{\partial u(t)} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n[x_1(t),\dots,x_n(t),u(t)]}{\partial u(t)}\end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r,\ u(t)=u_r}.$$

Nabízí se, že s funkcí $h[\mathbf{x}(t),u(t)]$ budeme postupovat stejně. To ale nelze, protože hned první, konstantní, člen Taylorova rozvoje by vlastně dával požadavek na nulový výstup v rovnovážném/ustáleném stavu, což je dosti omezující. Nikdo nám ale nebrání na místo $y(t)$

[26] Pro MIMO sytém případně dostaneme $u(t)\to\mathbf{u}(t)$, $y(t)\to\mathbf{y}(t)$ a $h[.]\to\mathbf{h}[.]$ příslušných dimenzí.

počítat jeho diferenciální odchylku $dy(t)$ v rovnovážném/ustáleném stavu. Potom platí

$$dy(t) = dh[\mathbf{x}_r(t), u_r(t)] = \underbrace{\left.\frac{\partial h[\mathbf{x}(t), u(t)]}{\partial \mathbf{x}(t)}\right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r,\ u(t)=u_r}}_{\text{Jacobiova matice } \mathbf{C}} \cdot d\mathbf{x}(t) + \underbrace{\left.\frac{\partial h[\mathbf{x}(t), u(t)]}{\partial u(t)}\right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r,\ u(t)=u_r}}_{\text{Jacobiova matice } \mathbf{D}} \cdot du(t), \tag{35}$$

$$\text{podrobněji, } \mathbf{C} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial h[\mathbf{x}(t),u(t)]}{\partial x_1(t)} & \dots & \frac{\partial h[\mathbf{x}(t),u(t)]}{\partial x_n(t)} \end{bmatrix}\right|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r \\ u(t)=u_r}},$$

$$D = \left.\frac{dh[\mathbf{x}(t), u(t)]}{du(t)}\right|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r \\ u(t)=u_r}}$$

Nakonec aproximujeme $d\mathbf{x}(t), du(t) \to \Delta\mathbf{x}(t), u(t)$ jako konečně velké veličiny (zavedeme tzv. přírůstkové proměnné). Celý proces můžeme tedy znázornit takto,

$$\begin{array}{rclcrlcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), u(t)] & \approx & & \mathbf{A}d\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}du(t) & \approx & \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta u(t), \\ y(t) & = & h[\mathbf{x}(t), u(t)] & \to & dy(t) = & \mathbf{C}d\mathbf{x}(t) + Ddu(t) & \approx \Delta y(t) = & \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}(t) + D\Delta u(t), \end{array}$$

Máme-li na paměti, že lineární $\Delta y(t)$ je jen odchylkou od nelineárního $y(t)$, můžeme zadefinovat lineární SISO systém zjednodušeně, bez znaků Δ, jako

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t). \end{aligned} \tag{36}$$

Scénář úkolu linearizace by mohl tedy vypadat následovně,

- převedení aktuálního popisu systému na stavový popis,
- určení rovnovážného (ustáleného) stavu tak, aby $\dot{\mathbf{x}}(t) \overset{!}{=} \mathbf{o}$,
- vypočtení Jacobiových matic $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}$ a čísla D (D je u MIMO systému maticí),
- dosazení rovnovážného (ustáleného) stavu do vypočítaných matic
- zavedení přírůstkových proměnných a vytvoření lineárního modelu
- ověření (lokální) platnosti modelu.

Řešené příklady: Lokální linearizace

Příklad 1. Vytvořte lineární stavový model odpovídající diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}^2(t) - y(t) = u(t),$$

při působení vstupu $u_r = 0$. Výstupem je $y(t)$.

Řešení:

- Vytvoříme stavový popis - zavedeme stavové proměnné (můžeme volit libovolně),

$$\begin{array}{ll|l} x_1(t) \triangleq y(t) & = h[\mathbf{x}(t), u(t)] & \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = \qquad x_2(t) \qquad = f_1[\mathbf{x}(t), u(t)], \\ x_2(t) \triangleq \dot{y}(t) & & \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \; -2x_2^2(t) + x_1(t) + u(t) \; = f_2[\mathbf{x}(t), u(t)]. \end{array}$$

- Vypočítáme rovnovážný stav ("rovnovážný", protože $u_r = 0$),

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = 0 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = 0 = -2x_2^2 + x_1 + u, \\ &\Rightarrow \; x_1 = -u = -u_r = 0. \end{aligned}$$

- Vypočítáme matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a číslo D,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r \\ u(t)=u_r}} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4x_2 \end{bmatrix}\right|_{x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r \\ u(t)=u_r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r \\ u(t)=u_r}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ D &= \frac{\partial h}{\partial u} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_r \\ u(t)=u_r}} = 0. \end{aligned}$$

- Zavedeme přírůstkové proměnné, výsledný linearizovaný model bude tedy tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad 2. Vytvořte lineární stavový model odpovídající diferenciální rovnici

$$\ddot{\varphi}(t) + 5\sin(\varphi(t)) = M(t),$$

v ustáleném bodě $\varphi_{\mathrm{u}}(t) = \frac{3\pi}{2}$, výstupem je $\varphi(t)$.

Řešení:

- Vytvoříme stavový popis - zavedeme stavové proměnné (můžeme volit libovolně),

$$\begin{array}{ll|l} x_1(t) \triangleq \varphi(t) & = h[\mathbf{x}(t), u(t)] & \dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) = \qquad x_2(t) \qquad = f_1[\mathbf{x}(t), u(t)], \\ x_2(t) \triangleq \dot{\varphi}(t) & & \dot{x}_2(t) = \ddot{\varphi}(t) = \; -5\sin(x_1(t)) + u(t) \; = f_2[\mathbf{x}(t), u(t)]. \\ u(t) \triangleq M(t) & & \end{array}$$

• Vypočítáme požadovaný vstup $u_\mathrm{u}(t)$ pro ustálený stav kdy $\varphi_\mathrm{u}(t) = \frac{3\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 0 = x_2 = \dot{\varphi},\\
&\dot{x}_2 = 0 = -5\sin(x_1) + u_\mathrm{u} = 5 + u_\mathrm{u},\\
&\Rightarrow\ u_\mathrm{u} = -5.
\end{aligned}$$

• Vypočítáme matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a číslo D,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\mathrm{u}\\ u(t)=u_\mathrm{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \Bigg|_{x_1=\frac{3\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\mathrm{u}\\ u(t)=u_\mathrm{u}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\mathrm{u}\\ u(t)=u_\mathrm{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\\
D &= \frac{\partial h}{\partial u} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\mathrm{u}\\ u(t)=u_\mathrm{u}}} = 0.
\end{aligned}$$

• Zavedeme přírůstkové proměnné, výsledný linearizovaný model bude tedy tvaru

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

∘ **Poznámka:** proměnná $u(t)$ je zde tedy jen odchylka od vstupu $u_\mathrm{u}(t) = M_\mathrm{u}(t) = -5$ potřebného pro zajištění ustáleného stavu, a taktéž výstup $y(t)$ je odchylkou od výstupu v ustálené stavu, tedy od hodnoty $\varphi_\mathrm{u} = \frac{3\pi}{2}$.
∘ **Poznámka:** rovnovážné stavy ($\mathbf{f}[\mathbf{x}_r, 0] = \mathbf{0}$) (nelineárního) systému jsou

$$\mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ k\pi \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{37}$$

Příklad 3. Linearizujte stavový model v bodě pro který platí $x_1(t) = 0$,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= e^{-\sin(x_1(t))} + u(t),\\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) + 2u(t)x_2^2(t) + e^{-u(t)},\\
y(t) &= e^{x_1(t)} + 2u(t) - x_2^2(t).
\end{aligned}$$

Řešení:

• Najdeme rovnovážný, resp. ustálený stav který je dán podmínkou $x_1(t) = 0$,

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 0 = e^{-\sin 0} + u, && \Rightarrow\ u = -1,\\
&\dot{x}_2 = 0 = 0 + 2ux_2^2 + e^{-u} = -2x_2 + e, && \Rightarrow\ x_2 = \frac{e}{2}
\end{aligned}$$

- Vypočítáme matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a číslo D,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\mathrm{u} \\ u(t)=u_\mathrm{u}}} = \begin{bmatrix} -\cos(x_1)e^{-\sin(x_1)} & 0 \\ 1 & 4ux_2 \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=\frac{e}{2} \\ u=-1}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\mathrm{u} \\ u(t)=u_\mathrm{u}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_2^2 - e^{-u} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=\frac{e}{2} \\ u=-1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ e(\frac{e}{2}-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\mathrm{u} \\ u(t)=u_\mathrm{u}}} = \begin{bmatrix} e^{x_1} & -2x_2 \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=\frac{e}{2} \\ u=-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -e \end{bmatrix},$$

$$D = \frac{\partial h}{\partial u} \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\mathrm{u} \\ u(t)=u_\mathrm{u}}} = 2u \Bigg|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=\frac{e}{2} \\ u=-1}} = -2.$$

- Zavedeme přírůstkové proměnné, výsledný linearizovaný model bude tedy tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ e(\frac{e}{2}-1) \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - 2u(t).$$

Příklady na samostatné procvičení

Vytvořte lineární stavový model dle uvedených požadavků.

Příklad 1. $\dot{y}(t) + y(t)u(t) = e^{u(t)}\ddot{y}(t),\ x_{1\mathrm{r}} = 5$, výstup $\ldots y(t)$

(např. $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t), k \in \mathbb{Z}$
$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$)

Příklad 2. $2\ddot{y}(t) = 3\sin(y(t)\cdot u(t)) + \dot{y}^2(t),\ u_\mathrm{u} = \pi$, výstup $\ldots \dot{y}(t)$

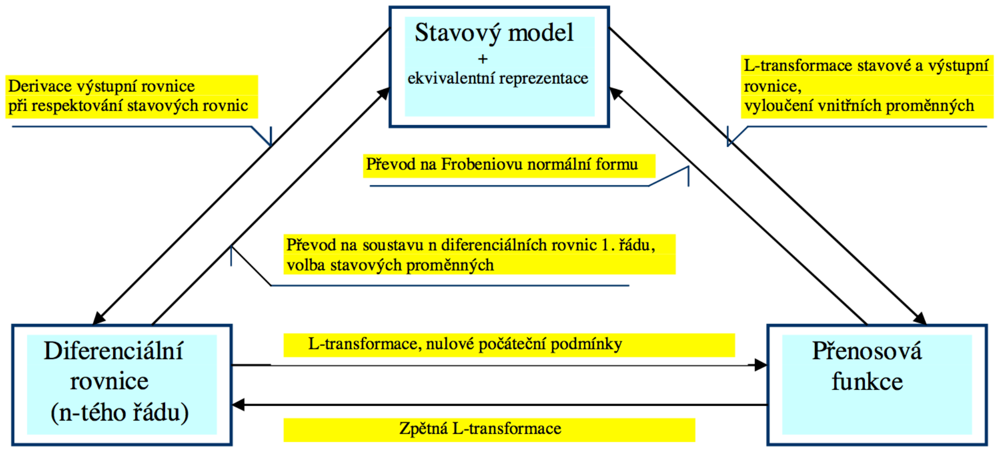
(např. $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3\pi}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3k}{2} \end{bmatrix} u(t), k \in \mathbb{Z}$
$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$)

Příklad 3. $\dot{x}_1(t) = -2e^{x_1(t)} + u(t)\cos(x_2(t)) + x_1^2(t)x_2(t)u(t),$
$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + e^{x_1(t)x_2(t)} - 1,$
$y(t) = x_1^2(t) + 2x_2^3(t) + u_1(t)x_2(t),$
linearizujte v bodě pro který platí $x_2 = 0$

($\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$
$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$)

4 Modely systému

LTI systém může být reprezentován různými způsoby. My budeme používat **stavový popis, přenos,** a **diferenciální rovnice**. Způsob jak mezi těmito reperezentacemi přecházet je na následujícím schématu.



Jelikož stavových popisů existuje pro jeden systém nekonečně mnoho (stavové proměnné můžeme volit libovolně), zajímají nás v nějakém smyslu "vhodné" formy stavových reprezentací a převody mezi nimi. Především se budeme zabývat **Frobeniovou formou reprezentace** a **Modální (Jordanovu) formou reprezentace**.

4.1 Stavový model ↔ diferenciální rovnice ↔ přenos

Užitečné postupy:

• Přenos ↔ Frobeniova reprezentace (pro vyšší řády analogicky),

$$F(p) = K + \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \overline{S}_{\text{Frob}} : \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + K u(t). \end{aligned} \tag{38}$$

• diferenciální rovnice ↔ stavový model (n-tého řádu): hledáme/volíme stavové proměnné tak, aby bylo možné diferenciální rovnici napsat ve tvaru

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) + K \cdot \max\{0, m - n\} \cdot u(t), \ \ c_i, K \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

Pro vytvoření stavového popisu v Normální formě pozorovatelnosti z diferenciální rovnice (nejběžnější postup), volte proměnné ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) + \alpha_1 \cdot \max\{0, m-n+1\} \cdot u(t), \\ x_i(t) &= \dot{x}_{i-1} + \alpha_i \cdot \frac{\max\{0, m-n+i\}}{m-n+i} \cdot u(t),\ i = 2, 3, \dots, n;\ \alpha_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \widehat{n}. \end{aligned} \tag{40}$$

$$\text{tj. pro} \quad \begin{matrix} n=2 \\ m=0 \end{matrix} : \begin{matrix} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = \dot{y}(t), \end{matrix} \quad \text{pro} \quad \begin{matrix} n=2 \\ m=1 \end{matrix} : \begin{matrix} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = \dot{y}(t) + \alpha u(t), \end{matrix}$$

$$\text{pro} \quad \begin{matrix} n=2 \\ m=2 \end{matrix} : \begin{matrix} x_1(t) = y(t) + \alpha_1 u(t), \\ x_2(t) = \dot{y}(t) + \alpha_1 \dot{u}(t) + \alpha_2 u(t), \end{matrix}$$

kde konstanty α_i je následně třeba dopočítat:

- všechny proměnné $x_i(t)$ derivovat podle času,
- ve výrazu $\dot{x}_n(t)$ se objeví $y^{(n)}(t)$,
- vyjádřit nejvyšší derivaci, $y^{(n)}(t)$ ze zadané diferenciální rovnice a dosadit,
- konstanty α_i zvolit tak, aby se výrazy s derivacemi vstupní funkce $u(t)$ odečetli.

Řešené příklady: převody mezi ekvivalentními popisy systému

Příklad 1. Systém je zadán ve formě lineární diferenciální rovnice, určete příslušnou přenosovou funkci a libovolný stavový model,

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) &= 2u(t) + 4\dot{u}(t), \\ y(0) &= 1, \\ \dot{y}(0) &= 2, \\ u(0) &= 3. \end{aligned}$$

Řešení - převod na přenosovou funkci

• Na celou rovnici použijeme $\mathscr{L}$-transformaci za nulových poč. pod.,

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) &= 2u(t) + 4\dot{u}(t),\ /\mathscr{L}\{\}|_{\text{n.p.p.}}, \\ p^2Y(p) + 2pY(p) + 3Y(p) &= 2U(p) + 4pU(p), \\ Y(p)(p^2+2p+3) &= U(p)(4p+2),\ / \cdot \frac{1}{U(p)(p^2+2p+3)}, \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{F(p) \triangleq \left.\frac{Y(p)}{U(p)}\right|_{\text{n.p.p.}} = 4 \cdot \frac{p+0.5}{p^2+2p+3}}}.$$

Řešení - převod na stavový model

• Zvolíme stavové proměnné. Jelikož se na pravé straně vyskytuje derivace vstupní funkce, obsáhneme $u(t)$ do proměnné $x_2(t)$ (aby se následně odečetly výrazy s $\dot{u}(t)$). Zvolme třeba

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(t) & \triangleq & y(t), \\ x_2(t) & \triangleq & \dot{y}(t) + \alpha u(t), \\ \Rightarrow\ \dot{y}(t) & = & x_2(t) - \alpha u(t), \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & \dot{y}(t) = x_2(t) - \alpha u(t), \\ \dot{x}_2(t) & = & \ddot{y}(t) + \alpha\dot{u}(t). \end{array}$$

• $\dot{x}_2(t)$ potřebujeme vyjádřit za pomoci $x_1(t), x_2(t)$ a $u(t)$. Ze zadané diferenciální rovnice vyjádříme $\ddot{y}(t)$ a dosadíme do $\dot{x}_2(t)$. Volný parametr α zvolíme tak, aby se odečetli výrazy s $\dot{u}(t)$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= -2\dot{y}(t) - 3y(t) + 2u(t) + 4\dot{u}(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) + \alpha\dot{u}(t) = -2\dot{y}(t) - 3y(t) + 2u(t) \underbrace{+4\dot{u}(t) + \alpha\dot{u}(t)}_{\overset{!}{=}0}, \\ &\Rightarrow\ \alpha = -4, \\ \Rightarrow\ \dot{x}_2(t) &= -2\dot{y}(t) - 3y(t) + 2u(t). \end{aligned}$$

• Dosadíme $\alpha = -4$ do $x_1(t), x_2(t)$,

$$\begin{aligned} & x_1(t) = y(t), \\ & x_2(t) = \dot{y}(t) - 4u(t), y \Rightarrow\ \dot{y}(t) = x_2(t) + 4u(t). \end{aligned}$$

• Dosadíme $x_1(t), x_2(t)$ do $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) + 4u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -2\dot{y}(t) - 3y(t) + 2u(t) = -2\dot{y}(t) + 8u(t) - 8u(t) - 3y(t) + 2u(t) = \\ &= -2(\dot{y}(t) - 4u(t)) - 3y(t) - 6u(t) = -3x_1(t) - 2x_2(t) - 6u(t). \end{aligned}$$

• Dosadíme počáteční podmínky do stavových proměnných a určíme počáteční stav,

$$x_1(0) = y(0) = 1, \qquad x_2(0) = \dot{y}(0) - 4u(0) = 2 - 4 \cdot 3 = -10,$$

• Výsledný stavový model pro tuto volbu stavových proměnných bude tvaru

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad 2. Systém je zadán ve formě přenosové funkce, určete příslušnou diferenciální rovnici a libovolný stavový model,

$$F(p) = \frac{p^2+3p+2}{p^2+7p+12}.$$

Řešení - převod na stavový model

• Využijeme vztahu (38), zadaný přenos si přepíšeme do požadovaného tvaru a vypočítáme koeficienty,

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{p^2+3p+2}{p^2+7p+12} = K + \frac{b_1p+b_0}{p^2+7p+12} = \text{(převedeme na společný jmenovatel)},\\
&= \frac{Kp^2+7Kp+12K+b_1p+b_0}{p^2+7p+12} = \frac{Kp^2+(7K+b_1)p+(12K+b_0)}{p^2+7p+12},
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} K &= 1,\\ 7K+b_1 &= 3,\\ 12K+b_2 &= 2, \end{aligned}\;\right|\;\begin{aligned} &\\ &\Rightarrow\; b_1 = -4,\\ &\Rightarrow\; b_2 = -10, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; F(p) = 1 + \frac{-4p-10}{p^2+7p+12}.$$

• Výsledný stavový model bude tedy tvaru

$$\begin{aligned}
\overline{S}_F: \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -12 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t),\\
y(t) &= \begin{bmatrix}-10 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 1u(t).
\end{aligned}$$

Řešení - převod na diferenciální rovnici

• Roznásobíme proměnné a využijeme zpětnou $\mathscr{L}$-transformaci,

$$\begin{aligned}
F(p) = \left.\frac{Y(p)}{U(p)}\right|_{\text{n.p.p.}} &= \frac{p^2+3p+2}{p^2+7p+12},\;\; /\cdot U(p)(p^2+7p+12),\\
Y(p)(p^2+7p+12) &= U(P)(p^2+3p+2),\\
p^2Y(p)+7pY(p)+12Y(p) &= p^2U(p)+3pU(p)+2U(p),\;\; /\mathscr{L}^{-1}\{\}\\
\underline{\underline{\ddot{y}(t)+7\dot{y}(t)+12y(t) = 2u(t)+3\dot{u}(t)+\ddot{u}(t)}}.
\end{aligned}$$

○ Informaci o počátečních podmínkách postrádáme, protože přenos je definován za n.p.p.

Příklad 3. Systém je zadán ve formě stavového modelu, určete příslušnou diferenciální rovnici a přenosovou funkci,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\ 3\end{bmatrix},$$
$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}.$$

Řešení - převod na diferenciální rovnici

• Díky vhodné matici **C** se příklad zjednodušuje. Sepíšeme proměnné,

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + x_2(t) + u(t),\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 3x_2(t) - u(t),\end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned}y(t) &= x_1(t),\\ \dot{x}_1(t) &= -3y(t) + x_2(t) + u(t),\\ \dot{x}_2(t) &= y(t) - 3x_2(t) - u(t).\end{aligned}$$

• Derivujeme výstupní rovnici a dosadíme za $\dot{x}_1(t)$ (získáme vztah pro $x_2(t)$),

$$\begin{aligned}
&y(t) = x_1(t), \ /\frac{d}{dt},\\
&\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = -3x_1(t) + x_2(t) + u(t) = -3y(t) + x_2(t) + u(t),\\
\Rightarrow\ &x_2(t) = \dot{y}(t) + 3y(t) - u(t),\\
\Rightarrow\ &\dot{y}(t) = -3y(t) + x_2(t) + u(t).
\end{aligned}$$

• Derivujeme získaný výraz a dosadíme za $\dot{x}_2(t)$ a následně za $x_2(t)$,

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t) = -3y(t) + x_2(t) + u(t), \ /\frac{d}{dt},\\
&\ddot{y}(t) = -3\dot{y}(t) + \dot{x}_2(t) + \dot{u}(t) = -3\dot{y}(t) + y(t) - 3x_2(t) - u(t) + \dot{u}(t),\\
&\ddot{y}(t) = -3\dot{y}(t) + y(t) - 3(\dot{y}(t) + 3y(t) - u(t)) - u(t) + \dot{u}(t),\\
&\ddot{y}(t) = -6\dot{y}(t) - 8y(t) + 2u(t) + \dot{u}(t).
\end{aligned}$$

• Vyjádříme počáteční podmínky,

$$\begin{aligned}
x_1(0) = y(0) &= -3,\\
x_2(0) = \dot{y}(0) + 3y(0) - u(0) &= 3,\\
\Rightarrow\ \dot{y}(0) &= 12 + u(0).
\end{aligned}$$

• Výslednou diferenciální rovnici můžeme tedy zapsat ve tvaru,

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) &= 2u(t) + \dot{u}(t),\\
y(0) &= -3,\\
\dot{y}(0) &= 12 + u(0).
\end{aligned}$$

Řešení - převod na přenosovou funkci

- Na obě maticové rovnice stavového modelu použijeme $\mathscr{L}$-transformaci,
- První rovnice,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \ /\mathscr{L}\{\}|_{\text{n.p.p.}},\\ p\mathbf{X}(p) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}U(p),\\ \mathbf{X}(p) &= (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(p).\end{aligned}$$

- Druhá rovnice,

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \ /\mathscr{L}\{\},\\ Y(p) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(p).\end{aligned}$$

- Dosadíme $\mathbf{X}(p)$ z první rovnice do druhé,

$$\begin{aligned}Y(p) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(p),\\ F(p) &\triangleq \left.\frac{Y(p)}{U(p)}\right|_{\text{n.p.p.}} = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.\end{aligned}$$

- Vypočítáme matici $(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$,

$$\begin{aligned}(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} p+3 & -1 \\ -1 & p+3 \end{bmatrix},\\ (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \cdot (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{\text{Adj}} = \frac{1}{(p+3)^2 - 1} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ 1 & p+3 \end{bmatrix} =\\ &= \begin{bmatrix} \frac{p+3}{p^2+6p+8} & \frac{1}{p^2+6p+8} \\ \frac{1}{p^2+6p+8} & \frac{p+3}{p^2+6p+8} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

- Dosadíme do vztahu pro $F(p)$ a vypočítáme přenos,

$$\underline{\underline{F(p)}} = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p+3}{p^2+6p+8} & \frac{1}{p^2+6p+8} \\ \frac{1}{p^2+6p+8} & \frac{p+3}{p^2+6p+8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p+3}{p^2+6p+8} & \frac{1}{p^2+6p+8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{p+3}{p^2+6p+8} - \frac{1}{p^2+6p+8} = \underline{\underline{\frac{p+2}{p^2+6p+8}}}.$$

Příklady na samostatné procvičení

Převeďte následující reprezentace systému na příslušné ostatní reprezentace.

Příklad 1. Převeďte stavový model:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

→ Přenosová funkce:

$$F(p) = 2 \cdot \frac{-2}{p^2 + 3p}.$$

→ Diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) &= -2u(t), \\ y(0) &= 1, \\ \dot{y}(0) &= -3. \end{aligned}$$

Příklad 2. Převeďte diferenciální rovnici:

$$\begin{gathered} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t) + 2\dot{u}(t), \\ y(0) = \dot{y}(0) = 4. \end{gathered}$$

→ Přenosová funkce:

$$F(p) = 2 \cdot \frac{p + 0.5}{p^2 + 3p + 2}.$$

→ Stavový model:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 - 2u(0) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad 3. Převeďte přenosovou funkci:

$$F(p) = 2 \cdot \frac{p^2 + 2p + 1}{p^2 + 10p + 25}.$$

→ Stavový model:

$$\begin{aligned} S_F : \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -24 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t). \end{aligned}$$

→ Diferenciální rovnice:

$$\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 25y(t) = u(t) + 2\dot{u}(t) + \ddot{u}(t),$$

4.2 $\overline{S} \leftrightarrow S$, převody mezi stavovými reprezentacemi

Podmínky vstupně-výstupní ekvivalence, převodní vztahy mezi S a $\overline{S}$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{T}\mathbf{x}(t), \\ \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, &\qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B}. \\ \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}, &\qquad \overline{D} = D. \end{aligned} \tag{41}$$

• Na Frobeniovu formu reprezentace lze převádět pouze řiditelné systémy. Transformační matici $\mathbf{T}_{\text{Frob}}$ určíme ze vztahu

$$\mathbf{T}_{\text{Frob}} = \overline{\mathbf{Q}}_{\check{r}}\mathbf{Q}_{\check{r}}^{-1}, \tag{42}$$

kde $\mathbf{Q}_{\check{r}}$ a $\overline{\mathbf{Q}}_{\check{r}}$ jsou matice řiditelnosti původní a hledané formy reprezentace.

• Na Jordanovu (Modální) formu reprezentace lze převést libovolný LTI systém. Stavový model s reálnými koeficienty však existuje pouze pro systémy s reálnými vlastními čísly. Transformační matici $\mathbf{T}_{\text{Jord}}$ určíme ze vztahu

$$\mathbf{T}_{\text{Jord}} = \mathbf{V}^{-1}, \qquad \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\dots|\mathbf{v}_n], \tag{43}$$

kde $\mathbf{v}_i$ $\forall k \in \widehat{n}$ jsou vlastní vektory původní matice dynamiky $\mathbf{A}$. Výsledná matice dynamiky $\overline{\mathbf{A}}_J$ je rovna spektrální matici $\boldsymbol{\Lambda}$ daného systému.

Řešené příklady: převody mezi ekvivalentními stavovými reprezentacemi

Příklad 1. Převeďte zadaný systém na Frobeniovu formu reprezentace

$$S: \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t).$$

Řešení - Frobeniova forma, vyjdeme ze vztahu $\mathbf{T}_F = \overline{\mathbf{Q}}_{\check{r}}\mathbf{Q}_{\check{r}}^{-1}$

• Vypočítáme matici řiditelnosti $\mathbf{Q}_{\check{r}}$ původní reprezentace S a její inverzi,

$$\mathbf{Q}_{\check{r}} \triangleq [\mathbf{B}|\mathbf{A}\mathbf{B}|\mathbf{A}^2\mathbf{B}|\dots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{Q}_{\check{r}}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{Q}_{\check{r}})} \cdot \mathbf{Q}_{\check{r}}^{\text{Adj}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matice řiditelnosti $\mathbf{Q}_ř$ systému S má plnou hodnost, systém je řiditelný a lze ho tedy převést na Frobeniovu formu reprezentace.

• Vypočítáme matici řiditelnosti $\overline{\mathbf{Q}}_ř$ hledané reprezentace $\overline{S}$, pro Frobeniovu rep. platí:

$$\overline{\mathbf{Q}}_ř \triangleq [\overline{\mathbf{B}}_F | \overline{\mathbf{A}}_F \overline{\mathbf{B}}_F | \overline{\mathbf{A}}_F^2 \overline{\mathbf{B}}_F | \dots | \overline{\mathbf{A}}_F^{n-1} \overline{\mathbf{B}}_F], \qquad \overline{\mathbf{A}}_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{B}}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_ř = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

• Vypočítáme transformační matici $\mathbf{T}_F$ a její inverzi,

$$\mathbf{T}_F = \overline{\mathbf{Q}}_ř \mathbf{Q}_ř^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 - a_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_F^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{T}_F)} \cdot \mathbf{T}_F^{\mathrm{Adj}} = \begin{bmatrix} a_1 - 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

• Vypočteme symbolicky matici $\overline{\mathbf{A}}_F = \mathbf{T}_F \mathbf{A} \mathbf{T}_F^{-1}$ a vyřešíme vzniklou soustavu rovnic,

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{A}}_F} = \overbrace{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 - a_1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{T}_F} \overbrace{\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} a_1 - 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{T}_F^{-1}} = \dots = \begin{bmatrix} a_1 - 4 & 1 \\ -a_1^2 + 4a_1 - 4 & -a_1 \end{bmatrix},$$

$$\dots \Rightarrow a_1 = 4, \Rightarrow a_0 = 4,$$

$$\Rightarrow \overline{\mathbf{A}}_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \& \qquad \mathbf{T}_F = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_F^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

• Dopočítáme matici $\overline{\mathbf{C}}_F$, číslo $\overline{D}_F = D = 1$,

$$\overline{\mathbf{C}}_F = \mathbf{C} \mathbf{T}_F^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix},$$

• Převedeme vektor počátečních podmínek,

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}_F \mathbf{x}(t), \Rightarrow \overline{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{T}_F \mathbf{x}(0),$$

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1(0) \\ \overline{x}_2(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

• Výsledný tvar systému ve Frobeniově stavové reprezentaci bude,

$$\overline{S}_F : \begin{bmatrix} \dot{\overline{x}}_1(t) \\ \dot{\overline{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} \overline{x}_1(0) \\ \overline{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{16}{3} \end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{bmatrix} + u(t).$$

Příklad 2. Převeďte zadaný systém na Jordanovu formu reprezentace

$$S: \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 2u(t).$$

Řešení - Jordanova (Modální) forma, vyjdeme ze vztahu $\mathbf{T}_J = \mathbf{V}^{-1}$

- Najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$,

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix}\lambda+3 & -1\\ 2 & \lambda\end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2),$$

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2.$$

- Sestavíme spektrální matici $\mathbf{\Lambda}$ z právě vypočtených vl. čísel,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} = \overline{\mathbf{A}}_J.$$

- Najdeme vl. vektory $\mathbf{v}_i$, abychom z nich následně mohli sestavit matici $\mathbf{V}$,

$$\left[\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix}\lambda_i+3 & -1\\ 2 & \lambda_i\end{bmatrix}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Výpočet vlastního vektoru $\mathbf{v}_1$ příslušného k $\lambda_1 = -1$,

$$\left[\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}.$$

Výpočet vlastního vektoru $\mathbf{v}_2$ příslušného k $\lambda_2 = -2$,

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

- Z vl. vektorů sestavíme matici $\mathbf{V}$ a vypočítáme její inverzi,

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{T}_J^{-1},$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{V})}\mathbf{V}^{\mathrm{Adj}} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} = \mathbf{T}_J.$$

- Dopočítáme matice $\overline{\mathbf{B}}_J, \overline{\mathbf{C}}_J$, číslo $\overline{D}_J = D = 2$,

$$\overline{\mathbf{B}}_J = \mathbf{T}_J\mathbf{B} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{C}}_J = \mathbf{C}\mathbf{T}_J^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}.$$

• Převedeme vektor počátečních podmínek,

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}_J\mathbf{x}(t), \Rightarrow \overline{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{T}_J\mathbf{x}(0),$$

$$\begin{bmatrix}\overline{x}_1(0)\\ \overline{x}_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ -4\end{bmatrix}$$

• Výsledný tvar systému v Jordanově (Modální) stavové reprezentaci bude,

$$\overline{S}_J: \begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1(t)\\ \dot{\overline{x}}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix}\overline{x}_1(0)\\ \overline{x}_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ -4\end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix} + 2u(t).$$

Příklady na samostatné procvičení

Převeďte následující formy reprezentace na Frobeniovu a Modální formu reprezentace.

Příklad 1.

$$S: \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 5u(t).$$

Frobeniova forma reprezentace:

$$\overline{S}_F: \begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1(t)\\ \dot{\overline{x}}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -18 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix}\overline{x}_1(0)\\ \overline{x}_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}18 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix} + 5u(t).$$

Jordanova forma reprezentace ($\overline{\mathbf{B}}_J, \overline{\mathbf{C}}_J$ - záleží na volbě vlastních vektorů):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}, \quad \overline{S}_J: \begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1(t)\\ \dot{\overline{x}}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix}\overline{x}_1(0)\\ \overline{x}_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix} + 5u(t).$$

Příklad 2.

$$S: \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 4\\ 3 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}.$$

Frobeniova forma reprezentace:

$$\overline{S}_F: \begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1(t)\\ \dot{\overline{x}}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -9 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix}\overline{x}_1(0)\\ \overline{x}_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 10\end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}49 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix}.$$

Jordanova forma reprezentace ($\overline{\mathbf{B}}_J, \overline{\mathbf{C}}_J$ - záleží na volbě vlastních vektorů):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}, \quad \overline{S}_J: \begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1(t)\\ \dot{\overline{x}}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{11}{8}\\ \frac{1}{8}\end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix}\overline{x}_1(0)\\ \overline{x}_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{11}{8}\\ \frac{9}{8}\end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix} + 5u(t).$$

5 Dynamické odezvy systému, výpočet $e^{\mathbf{A}t}$

Lineární deterministický SISO systém je obecně popsán rovnicemi tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t). \end{aligned} \tag{44}$$

Řešení stavové rovnice (44) v časové oblasti je

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \tag{45}$$

Výstup $y(t)$ je jen lineární kombinací stavu $\mathbf{x}(t)$ přes matici $\mathbf{C}$. Abychom skutečně byli schopni vypočítat odezvu na počáteční podmínky $\mathbf{x}_0$ a vstup $u(t)$, musíme umět najít tvar maticové exponenciály $e^{\mathbf{A}t}$.

5.1 Zpětná Laplaceova transformace

Řešení stavové rovnice (44) v oblasti obrazů je

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(p) &= (p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(p), \ /\mathscr{L}^{-1}\{\} \\ \mathbf{x}(t) &= \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}}_{e^{\mathbf{A}t}}\mathbf{x}_0 + \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(p)\}}_{\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau}, \end{aligned} \tag{46}$$

Porovnáme-li (45) a (46), zjistíme že matici $e^{\mathbf{A}t}$ můžeme vypočítat[27] za pomoci vztahu

$$\underline{\underline{e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}}} \tag{47}$$

Řešené příklady: Zpětná $\mathscr{L}$-transformace

Příklad 1. Vypočítejte matici $e^{\mathbf{A}t}$ s využitím zpětné $\mathscr{L}$-transformace.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{(nenásobná vl. čísla)}$$

Řešení: Využijeme vztahu $e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}$,

• najdeme tvar matice $p\mathbf{I} - \mathbf{A}$

$$p\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} p-3 & 1 \\ -6 & p+2 \end{bmatrix}.$$

[27] Na násobnosti vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ při tomto postupu nezáleží.

• Vypočítáme její inverzi[28],

$$
\begin{aligned}
(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A})}(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{\mathrm{Adj}},\\
&\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A}) = (p-3)(p+2)+6 = p(p-1),\\
&(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{\mathrm{Adj}} = \begin{bmatrix} p+2 & -1 \\ 6 & p-3 \end{bmatrix},\\
\Rightarrow\ (p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{p+2}{p(p-1)} & -\frac{1}{p(p-1)} \\ \frac{6}{p(p-1)} & \frac{p-3}{p(p-1)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

• Upravíme prvky matice tak aby bylo možné použít zpětnou $\mathscr{L}$-transformaci,

Pozice

$$(1,1),\quad \frac{p+2}{p(p-1)} = \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p-1} = \left| \begin{array}{r} r_1 = \lim_{p\to 0}\frac{p+2}{p-1} = -2 \\ r_2 = \lim_{p\to 1}\frac{p+2}{p} = 3 \end{array} \right| = \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p},$$

$$(1,2),\quad \frac{-1}{p(p-1)} = \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p-1} = \left| \begin{array}{r} r_1 = \lim_{p\to 0}\frac{-1}{p-1} = 1 \\ r_2 = \lim_{p\to 1}\frac{-1}{p} = -1 \end{array} \right| = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1},$$

$$(2,1),\quad \frac{6}{p(p-1)} = \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p-1} = \left| \begin{array}{r} r_1 = \lim_{p\to 0}\frac{6}{p-1} = -6 \\ r_2 = \lim_{p\to 1}\frac{6}{p} = 6 \end{array} \right| = \frac{6}{p-1} - \frac{6}{p},$$

$$(2,2),\quad \frac{p-3}{p(p-1)} = \frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p-1} = \left| \begin{array}{r} r_1 = \lim_{p\to 0}\frac{p-3}{p-1} = 3 \\ r_2 = \lim_{p\to 1}\frac{p-3}{p} = -2 \end{array} \right| = \frac{3}{p} - \frac{2}{p-1}.$$

• Použijeme “slovník” $\mathscr{L}$-transformace a určíme výslednou matici,

$$\underline{\underline{e^{\mathbf{A}t}}} = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p} & \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} \\ \frac{6}{p-1} - \frac{6}{p} & \frac{3}{p} - \frac{2}{p-1} \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3e^t - 2 & 1 - e^t \\ 6e^t - 6 & 3 - 2e^t \end{bmatrix}}}$$

Příklad 2. Vypočítejte matici $e^{\mathbf{A}t}$ s využitím zpětné $\mathscr{L}$-transformace.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(násobná vl. čísla)}$$

Řešení: Využijeme vztahu $e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\{(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}$,

• najdeme tvar matice $p\mathbf{I}-\mathbf{A}$

$$p\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p+4 & -3 \\ 3 & p-2 \end{bmatrix}.$$

[28] Adjungovaná matice pro matice typu 2×2 se počítá snadno - prvky na hlavní diagonále si vymění pozice a prvky na vedlejší změní znaménko.

• Vypočítáme její inverzi,

$$
\begin{aligned}
(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} =& \frac{1}{\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A})}(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{\mathrm{Adj}},\\
& \det(p\mathbf{I}-\mathbf{A}) = p^2+2p-8+9 = (p+1)^2,\\
& (p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{\mathrm{Adj}} = \begin{bmatrix} p-2 & 3\\ -3 & p+4\end{bmatrix},\\
\Rightarrow\ (p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} =& \begin{bmatrix} \frac{p-2}{(p+1)^2} & \frac{3}{(p+1)^2}\\ \frac{-3}{(p+1)^2} & \frac{p+4}{(p+1)^2}\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

• Upravíme prvky na hlavní diagonále tak aby bylo možné použít zpětnou $\mathscr{L}$-transformaci (prvky na vedlejší diagonále úpravu nepotřebují),

Pozice

$$
(1,1),\ \frac{p-2}{(p+1)^2} = \frac{r_1}{p+1} + \frac{r_2}{(p+1)^2} = \frac{r_1 p + r_1 + r_2}{(p+1)^2} = \left| \begin{aligned} r_1 &= 1\\ r_1+r_2 &= -2\\ r_2 &= -3 \end{aligned} \right| = \frac{1}{p+1} - \frac{3}{(p+1)^2},
$$

$$
(2,2),\ \frac{p+4}{(p+1)^2} = \frac{r_1}{p+1} + \frac{r_2}{(p+1)^2} = \frac{r_1 p + r_1 + r_2}{(p+1)^2} = \left| \begin{aligned} r_1 &= 1\\ r_1+r_2 &= 4\\ r_2 &= 3 \end{aligned} \right| = \frac{1}{p+1} + \frac{3}{(p+1)^2}.
$$

• Použijeme "slovník" $\mathscr{L}$-transformace a určíme výslednou matici,

$$
\underline{\underline{e^{\mathbf{A}t}}} = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} - \frac{3}{(p+1)^2} & \frac{3}{(p+1)^2}\\ \frac{-3}{(p+1)^2} & \frac{1}{p+1} + \frac{3}{(p+1)^2}\end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} e^{-t}-3te^{-t} & 3te^{-t}\\ -3te^{-t} & e^{-t}+3te^{-t}\end{bmatrix}}}
$$

5.2 Využití modální transformace (Jordanův tvar)

Každá čtvercová matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ může být rozložena na Jordanův blokově-diagonální tvar, označme[29] jej $\mathbf{\Lambda}$, pomocí transformační matice $\mathbf{V}$ (složené z vl. vektorů matice $\mathbf{A}$) a její inverze tak, že platí

$$
\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}. \tag{48}
$$

Matici $e^{\mathbf{A}t}$ můžeme zapsat jako řadu,

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})^k t^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}t + \frac{1\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\cancel{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}t^2}{2} + \cdots = \\
&= \mathbf{V}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{\Lambda}^k t^k}{k!}\right)\mathbf{V}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{V}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{V}^{-1} = e^{\mathbf{A}t}}}.
\end{aligned} \tag{49}
$$

[29]Tzv. Spektrální matice, velké řecké písmeno lambda.

Uvažujme matici $\mathbf{\Lambda}$ jako matici složenou z Jordanových bloků ve tvaru

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \dots & \dots & \mathbf{J}_m \end{bmatrix}_{n\times n} \Rightarrow e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}_1 t} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & e^{\mathbf{J}_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \dots & \dots & e^{\mathbf{J}_m t} \end{bmatrix}_{n\times n} . \tag{50}$$

Jordanovy klece $\mathbf{J}_l \forall l$ přísluší k množině buď nenásobných, nebo násobných vl. čísel. Pro nenásobná vlastní čísla $\lambda_{(i,\dots,k)}$ bude příslušný blok vypadat

$$\mathbf{J}_l = \begin{bmatrix} \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}_l t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_k} \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Pro každé k-násobné vlastní číslo λ_l bude příslušný blok vypadat

$$\mathbf{J}_l = \begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_l & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_l \end{bmatrix}_{k\times k} \Rightarrow e^{\mathbf{J}_l t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_l t} & te^{\lambda_l t} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_l t} \\ 0 & e^{\lambda_l t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & te^{\lambda_l t} \\ 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_l t} \end{bmatrix}_{k\times k} . \tag{52}$$

Řešené příklady: Modální transformace

Příklad 1. Vypočítejte matici $e^{\mathbf{A}t}$ s využitím modální transformace.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1.5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{(nenásobná vl. čísla)}$$

Řešení: Využijeme vztahu $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{V}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{V}^{-1}$.

• Najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$,

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ 1.5 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 + 6 = \lambda(\lambda + 1),$$

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -1.$$

• Sestavíme spektrální matici $\mathbf{\Lambda}$ a $e^{\mathbf{\Lambda}t}$ z právě vypočtených vl. čísel,
vlastní čísla jsou dvě a nenásobná $\Rightarrow$ matice $\mathbf{\Lambda}$ bude mít jediný Jordanův blok,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

• Najdeme vl. vektory $\mathbf{v}_i$, abychom z nich následně mohli sestavit matici $\mathbf{V}$,

$$\left[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}\right] \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i - 2 & -4 \\ 1.5 & \lambda_i + 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Výpočet vlastního vektoru $\mathbf{v}_1$ příslušného k $\lambda_1 = 0$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ 1.5 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Výpočet vlastního vektoru $\mathbf{v}_2$ příslušného k $\lambda_2 = -1$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & -4 & 0 \\ 1.5 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

• Sestavíme matici $\mathbf{V}$ z vl. vektorů jako

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

• Vypočítáme inverzní matici $\mathbf{V}^{-1}$,

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{V})} \mathbf{V}^{\mathrm{Adj}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

• Dosadíme do vzorce pro $e^{\mathbf{A}t}$ a určíme výsledek,

$$\underline{\underline{e^{\mathbf{A}t}}} = \mathbf{V} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4e^{-t} \\ 1 & -3e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 - 2e^{-t} & 4 - 4e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2} & 3e^{-t} - 2 \end{bmatrix}}}.$$

Příklad 2. Vypočítejte matici $e^{\mathbf{A}t}$ s využitím modální transformace.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(násobná vl. čísla)}$$

Řešení: Využijeme vztahu $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{V} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{V}^{-1}$.

• Najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$,

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 5 & 3 \\ -3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 5 + 9 = (\lambda + 2)^2,$$

$$\lambda_{1,2} = -2.$$

• Sestavíme spektrální matici $\mathbf{\Lambda}$ a $e^{\mathbf{\Lambda}t}$ z právě vypočtených vl. čísel,
vlastní čísla jsou dvě a násobná $\Rightarrow$ matice $\mathbf{\Lambda}$ bude mít jediný Jordanův blok s jedničkou nad hlavní diagonálou,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

• Najdeme vl. vektory $\mathbf{v}_i$ ($\mathbf{v}_2$ zobecněný), abychom z nich následně sestavili matici $\mathbf{V}$,

$$\left[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}\right] \left[\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2\right] = \begin{bmatrix} \lambda_i + 5 & 3 \\ -3 & \lambda_i - 1 \end{bmatrix} \left[\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2\right] = \left[\mathbf{0} | -\mathbf{v}_1\right]$$

Výpočet vlastního vektoru $\mathbf{v}_1$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Výpočet <u>zobecněného</u> vlastního vektoru $\mathbf{v}_2$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

• Sestavíme matici $\mathbf{V}$ z vl. vektorů jako

$$\mathbf{V} = \left[\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

• Vypočítáme inverzní matici $\mathbf{V}^{-1}$,

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{V})} \mathbf{V}^{\mathrm{Adj}} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

• Dosadíme do vzorce pro $e^{\mathbf{A}t}$ a určíme výsledek,

$$\underline{\underline{e^{\mathbf{A}t}}} = \mathbf{V} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} & -te^{-2t} \\ e^{-2t} & te^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} =$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} e^{-2t} - 3te^{-2t} & -3te^{-2t} \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} + 3te^{-2t} \end{bmatrix}}}.$$

5.3 Cayley-Hamiltonova věta

Cayley-Hamiltonova věta zní:

každá čtvercová matice (ozn. $\mathbf{A}$) vyhovuje svojí charakteristické rovnici. Platí tedy

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = c_0 1 + c_1\lambda + +c_2\lambda^2 + \cdots + \lambda^n, \qquad \text{(char. polynom)}, \tag{53}$$
$$\mathbf{0} = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^n, \qquad (\text{dosazení } \mathbf{A} \to \lambda). \tag{54}$$

Pro libovolné konvergentní maticové funkce vyjádřitelné mocninnou řadou platí:

libovolnou mocninu matice stupně větší než n můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci mocnin stupně menší než n. Platí tedy

$$\underline{\underline{e^{\mathbf{A}t}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathbf{A}^k t^k}}, \tag{55}$$

$$\text{a dle C-H věty,}\quad e^{\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k t^k, \ \forall i, \ \text{(nenásobná vl. čísla)}. \tag{56}$$

Rovnost (56) vede na soustavu rovnic o n neznámých $a_k \forall k$. Ovšem pokud je nějaké vl. číslo λ_l násobné, tato soustava nemá řešení (shodné řádky) $\Rightarrow$ poprvé použijeme rovnost (56), následně vždy derivujeme předchozí rovnost podle onoho vl. čísla λ_l. Druhá rovnice pro λ_l bude tedy vypadat,

$$\frac{d}{d\lambda_l} e^{\lambda_l t} = t e^{\lambda_l t} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k k \lambda_i^{k-1} t^k, \ \text{(násobná vl. čísla)}, \tag{57}$$

Postup by tedy mohl vypadat následovně,

- najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$,
- sestavíme soustavu rovnic podle (56), resp. (57) pro násobná vl. čísla,
- najdeme koeficienty $a_k \forall k$,
- dosadíme za $\mathbf{A}$ a $a_k \forall k$ do rovnosti (55) a získáme tak hledanou matici $e^{\mathbf{A}t}$

Řešené příklady: Využití C-H věty

Příklad 1. Vypočítejte matici $e^{\mathbf{A}t}$ s využitím C-H věty.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \ \text{(nenásobná vl. čísla)}$$

Řešení: Využijeme vztahu $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathbf{A}^k t^k$

• Najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$,

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 2\lambda - 4 + 5 = p^2 + 1,$$

$$\lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i.$$

• Sestavíme soustavu rovnic pro výpočet koeficientů $a_k \forall k$, matice je typu $2 \times 2 \ \Rightarrow$ polynom bude prvního řádu

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k t^k \ \Rightarrow \ e^{it} = a_0 + a_1 it,$$

$$e^{-it} = a_0 - a_1 it.$$

• Vyřešíme soustavu rovnic, např. maticově

$$\begin{bmatrix} e^{it} \\ e^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & it \\ 1 & -it \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2it} \begin{bmatrix} -it & -it \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} \\ e^{-it} \end{bmatrix},$$

$$a_0 = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos(t), \ a_1 = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} \cdot \frac{i}{i} = \frac{\sin(t)}{t}.$$

• dosadíme do vztahu $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathbf{A}^k t^k$,

$$\underline{\underline{e^{\mathbf{A}t}}} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{A} t = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) \end{bmatrix} + \frac{\sin(t)}{\cancel{t}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cancel{t} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) & \sin(t) \\ -5\sin(t) & \cos(t) + 2\sin(t) \end{bmatrix}}}.$$

Příklad 2. Vypočítejte matici $e^{\mathbf{A}t}$ s využitím C-H věty.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{(násobná vl. čísla)}$$

Řešení: Využijeme vztahu $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathbf{A}^k t^k$

• Najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$,

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -1 & \lambda + 4 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 + 1 = (p + 3)^2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3.$$

• Sestavíme soustavu rovnic pro výpočet koeficientů $a_k \forall k$, matice je typu $2 \times 2 \Rightarrow$ polynom bude prvního řádu

$$e^{\lambda_1 t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_1^k t^k \;\Rightarrow\; e^{-3t} = a_0 - a_1 3t,$$
$$\frac{d}{d\lambda_1} e^{\lambda_1 t} = t e^{\lambda_1 t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k k \lambda_1^{k-1} t^k \;\Rightarrow\; t e^{-3t} = a_1 t \tag{58}$$

• Vyřešíme soustavu rovnic, např. maticově

$$\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ te^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3t \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} t & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ te^{-3t} \end{bmatrix},$$
$$a_0 = e^{-3t} + 3te^{-3t},\ a_1 = e^{-3t}.$$

• dosadíme do vztahu $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathbf{A}^k t^k$,

$$\underline{\underline{e^{\mathbf{A}t}}} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{A} t = \begin{bmatrix} e^{-3t} + 3te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} + 3te^{-3t} \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} t =$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} e^{-3t} + te^{-3t} & -te^{-3t} \\ te^{-3t} & e^{-3t} - te^{-3t} \end{bmatrix}}}.$$

Příklady na samostatné procvičení

Vypočtěte matici $e^{\mathbf{A}t}$ libovolným způsobem.

Příklad 1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\left(e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{2} & \frac{e^{2t}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{e^{2t}}{2} - \frac{1}{2} & \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$

Příklad 2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\left(e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} - e^{-2t} & 2e^{-3t} - 2e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{-3t} & 2e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix} \right)$

Příklad 3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $\left(e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 - t & 2t \\ -\frac{t}{2} & t + 1 \end{bmatrix} \right)$

Příklad 4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\left(e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2te^{-t} & -2te^{-t} \\ 2te^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix} \right)$

6 Frekvenční odezvy systému

6.1 Odezva na harmonický signál

Po přivedení harmonického signálu s frekvencí $\omega \in \mathbb{R}$ na vstup LTI systému, bude výstupem[30] opět harmonický signál s amplitudou a fází určenou frekvenčním přenosem[31,32] $F(j\omega)$,

$$\begin{aligned} \text{vstup } u(t) = \sin(\omega t) \;\Rightarrow\; y_{\text{vynucená}}(t) &= |F(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \varphi), \\ \text{kde } |F(j\omega)| &= \sqrt{\Re\{F(j\omega)\}^2 + \Im\{F(j\omega)\}^2}, \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{\Im\{F(j\omega)\}}{\Re\{F(j\omega)\}}. \end{aligned} \tag{59}$$

Při určování fázového posunu pomocí funkce tan^{-1} např. v systému Matlab, je potřeba myslet na kvadrant, ve kterém se nachází komplexní číslo $F(j\omega)$. Při použití funkce `atan` může dojít k nežádoucímu odečtení/přičtení 180° vlivem překlopení levé komplexní poloroviny do pravé (tangens je periodická funkce definovaná na intervalu $(-\pi/2, \pi/2) + k\pi$. Toto řeší funkce `atan2(y,x)`, která rozlišuje znaménka reálné a imaginární části a správně tak detekuje kvadrant i výsledný úhel v celém rozsahu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Řešené příklady: Odezva na harmonický signál

Příklad 1. Určete vynucenou složku výstupu ze systému $F(p)$ při vstupu $u(t)$.

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2}{p(p+1)}, \\ \textbf{a)}\ u(t) &= \sin(t), \\ \textbf{b)}\ u(t) &= \sin(2t). \end{aligned}$$

Řešení:

- Určíme reálnou a imaginární část $F(j\omega)$,

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{2}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{2}{-\omega^2 + j\omega} = \frac{-2}{\omega^2 - j\omega} \cdot \frac{\omega^2 + j\omega}{\omega^2 + j\omega} = \\ &= \frac{-2\omega^2 - 2j\omega}{\omega^4 + \omega^2} = \underbrace{\frac{-2\omega}{\omega^3 + \omega}}_{\Re\{F(j\omega)\}} - \underbrace{\frac{2}{\omega^3 + \omega}}_{\Im\{F(j\omega)\}} j, \end{aligned}$$

[30]Resp. vynucenou složkou výstupu = výstup po odeznění odezvy na (nenulové) počáteční podmínky (dobře pozorovatelné jen u stabilního systému).

[31]Frekvenční přenos je definován jako Fourierova transformace váhové funkce $h(t)$ následovně, $F(j\omega) \equiv \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \equiv \frac{\mathscr{L}\{u(t)\}}{\mathscr{L}\{y(t)\}}$.

[32]Připomeňme, že pro imaginární jednotku j platí $j^2 = -1$.

• Určíme amplitudu, fázi a vynucený výstup,

a) $u(t) = \sin(t)$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \Re\{F(j1)\} &= \frac{-2\cdot 1}{1^3+1} = -1,\\
\Im\{F(j1)\} &= -\frac{2}{1^3+1} = -1,\\
\Rightarrow\ |F(j1)| &= \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2},\\
\varphi &= \tan^{-1}\frac{-1}{-1} = -\frac{3\pi}{4},
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{y_v(t) = \sqrt{2}\cdot\sin(t-\frac{3\pi}{4})}},\ t\in\mathbb{R}.$$

b) $u(t) = \sin(2t)$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \Re\{F(j2)\} &= \frac{-2\cdot 2}{2^3+2} = -\frac{4}{10} = -0.4,\\
\Im\{F(j2)\} &= -\frac{2}{2^3+2} = -\frac{2}{10} = -0.2,\\
\Rightarrow\ |F(j2)| &= \sqrt{(-0.4)^2+(-0.2)^2} \doteq 0.4472,\\
\varphi &= \tan^{-1}\frac{-0.2}{-0.4} \doteq -2.6779,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{y_v(t) \doteq 0.4472\cdot\sin(2t-2.6779)}},\ t\in\mathbb{R}.$$

Příklad 2. Určete vynucenou složku výstupu ze systému $F(p)$ při vstupu $u(t)$.

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{p}{p+2},\\
u(t) &= 3\cos(2t).
\end{aligned}$$

Řešení:

• Určíme reálnou a imaginární část $F(j\omega)$,

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{j\omega}{j\omega+2}\cdot\frac{2-j\omega}{2-j\omega} = \frac{2j\omega-j^2\omega^2}{4-j^2\omega^2} = \frac{2j\omega+\omega^2}{4+\omega^2} =\\
&= \underbrace{\frac{\omega^2}{4+\omega^2}}_{\Re\{F(j\omega)\}} + \underbrace{\frac{2\omega}{4+\omega^2}}_{\Im\{F(j\omega)\}} j,
\end{aligned}$$

• Transformujeme vstup na sinus (s cosinem proces udělat takto nelze),

$$u(t) = 3\cos(2t) = 3\sin(2t+\frac{\pi}{2}),$$

díky linearitě můžeme za vstup vzít funkci $\sin(2t)$, výsledek poté transformujeme “zpět” (vynásobíme třemi a přičteme fázi $\frac{\pi}{2}$).

- Určíme amplitudu, fázi a vynucený výstup,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \Re\{F(j2)\} &= \frac{2^2}{4+2^2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\\
\Im\{F(j2)\} &= \frac{2\cdot 2}{4+2^2} = \frac{1}{2},\\
\Rightarrow\ |F(j2)| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\\
\varphi &= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ y_{v,\text{transformovaný}}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(2t+\frac{\pi}{4}),\ t\in\mathbb{R}.$$

- Transformujeme výstup a získáme tím výsledek,

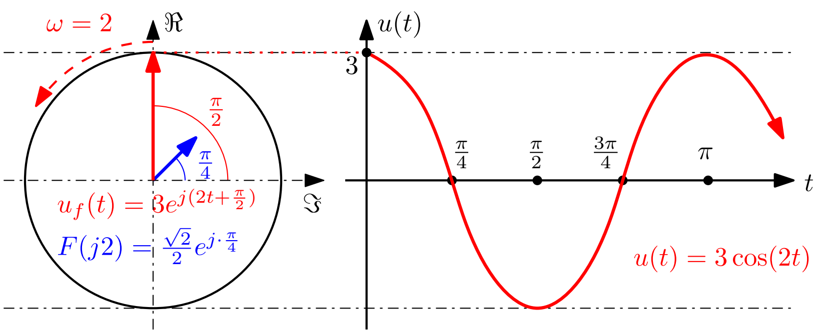
$$\underline{\underline{y_v(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(2t+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})}},\ t\in\mathbb{R}.$$

◦ Také je možné postupovat za pomoci fázorů. Ke vstupu $u(t)$ přidružíme fázor $u_f(t)$,

$$u(t) = 3\cos(2t)\ \rightarrow\ u_f(t) = 3\cdot e^{j(2t+\frac{\pi}{2})} \in\mathbb{C}\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

◦ Přenos $F(j2)$ napíšeme jako komplexní číslo ve tvaru

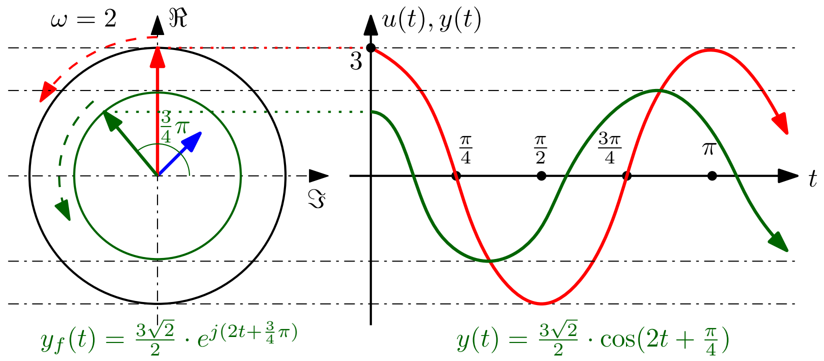
$$F(j2) = \frac{2j}{2j+2} = |F(j2)|\cdot e^{j\varphi} = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \in\mathbb{C}.$$



Vynásobením komplexních čísel $u_f(t)\cdot F(j2)$ získáme výsledný fázor $y_f(t)$, ze kterého

už můžeme snadno vyčíst výslednou výstupní harmonickou funkci $y(t)$,

$$
\begin{aligned}
y_f(t) = u_f(t) \cdot F(j2) &= 3 \cdot e^{j(2t+\frac{\pi}{2})} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot e^{j(2t+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})}, \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot [\cos(2t + \frac{3}{4}\pi) + j \cdot \sin(2t + \frac{3}{4}\pi)], \\
y(t) = \Im\{y_f(t)\} &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(2t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}), \ t \in \mathbb{R}, \\
\text{nebo ekvivalentně, } y(t) &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(2t + \frac{\pi}{4}), \ t \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$



Příklady na samostatné procvičení

Určete vynucenou složku výstupu ze systému $F(p)$ při vstupu $u(t)$.

Příklad 1. $F(p) = \frac{p+1}{p+2}$, $u(t) = \sin(2t)$

($y_v(t) \doteq 0.7906 \sin(2t + 0.3218)$)

Příklad 2. $F(p) = \frac{1}{p}$, $u(t) = 6 \sin(3t + \pi)$

($y(t) = 2 \sin(3t + \frac{3\pi}{2})$)

6.2 Bodeho charakteristika (LAFCH, LFFCH)

Bodeho charakteristika je graficky pojaté rozšíření úlohy z předchozí kapitoly (odezva na harmonický signál) pro všechny kladné frekvence ω. Oproti Nyquistovo frekvenční charakteristice[33] je zde přímo čitelná frekvence ω, příslušející k dané výstupní amplitudě ($|F(j\omega)|$,

[33]Nyquistova charakteristika systému zadaného přenosem $F(p)$ vykresluje průběh funkce $F(j\omega)$ $\omega \geq 0$ přímo do komplexní roviny.

vzdálenost od počátku u Nyquista) a fázový posun ($\varphi(j\omega)$, úhel oproti kladné reálné ose).

• $F(j\omega)$ je $\forall\omega$ komplexní číslo a jako takové ho lze zapsat ve tvaru $F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$, kde je opět $|F(j\omega)| = \sqrt{\Re\{F(j\omega)\}^2 + \Im\{F(j\omega)\}^2}, \varphi(\omega) = \tan^{-1}\frac{\Im\{F(j\omega)\}}{\Re\{F(j\omega)\}}$.
• **LAFCH -** vykreslujeme

$$|F(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|F(j\omega)|, \tag{60}$$

$\Rightarrow$ násobení (dělení) faktorů (nuly a póly) v $F(j\omega)$ přechází ve sčítání (odčítání).
• **LFFCH -** vykreslujeme

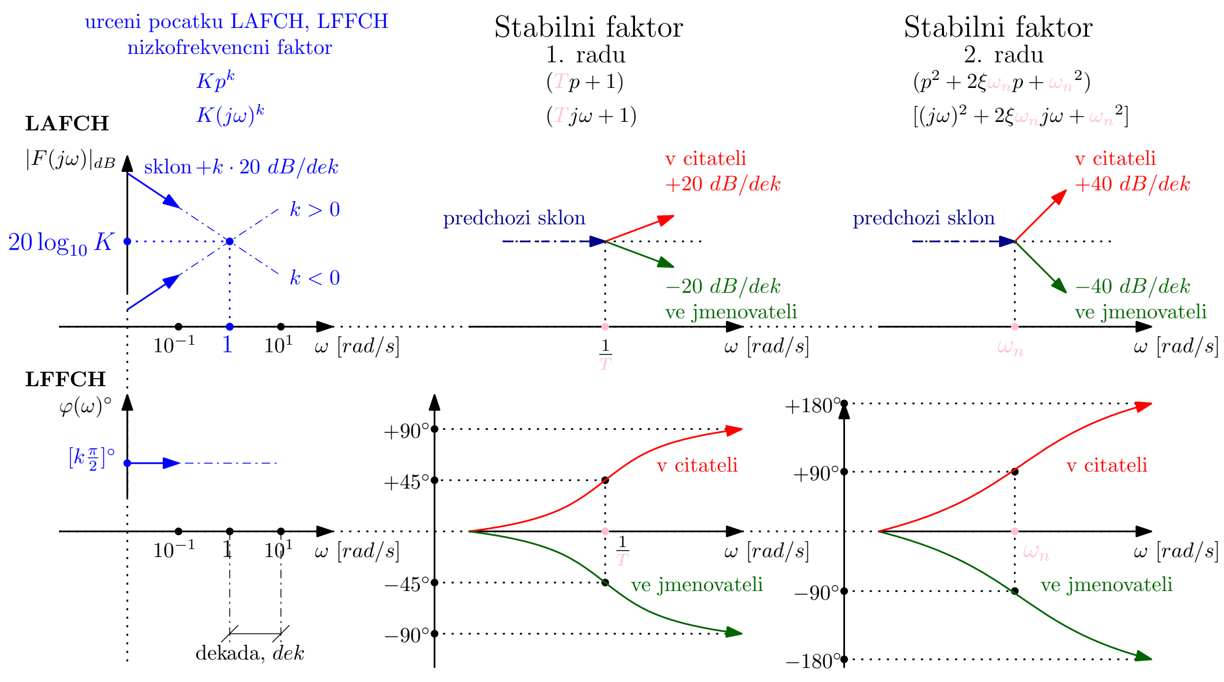
$$[\varphi(\omega)]^\circ. \tag{61}$$

Obojí na doménu $\omega \in \mathbb{R}_0^+$, $[rad/s]$ v logaritmických souřadnicích (po tzv. dekádách).
• Pro přenosovou funkci systému upraveného do faktoriozovaného tvaru

$$F(j\omega) = Kp^k \frac{(T_{1,\mathrm{b}}p+1)\ldots(\frac{1}{\omega_{n,1,b}{}^2}p^2 + \frac{2\xi_{1,b}}{\omega_{n,1,b}}p+1)\ldots}{(T_{1,\mathrm{a}}p+1)\ldots(\frac{1}{\omega_{n,1,a}{}^2}p^2 + \frac{2\xi_{1,a}}{\omega_{n,1,a}}p+1)\ldots} e^{-p\tau_d}\bigg|_{p=j\omega}. \tag{62}$$

• Pokud bychom použili tvar přenosové funkce, kde jsou faktory ve tvaru $(p - [\text{kořen}])$, a $(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n{}^2)$, pak tzv. "nízkofrekvenční faktor" $K = \lim_{p\to 0}\frac{1}{p^k}F(p)$.

Zlomové frekvence jsou hodnoty kořenů, resp. jejich součinu, jsou-li komplexně sdružené.
• Používáme tzv. *přímkovou aproximaci* **podle pravidel** (zjednodušeně, jen stabilní)



• Nestabilní faktory přinášejí dodatečné fázové zpoždění na nízkých frekvencích (nestab. pól) nebo na vysokých frekvencích (nestab. nula). Dopravní zpoždění se projevuje

rychlým poklesem fáze s rostoucí frekvencí - v komplexní rovině (Nyquist. char.) $e^{-j\omega\tau_d}$ vytváří nekonečné kružnice modulované zbylými částmi přenosu.

Řešené příklady: LAFCH a LFFCH (Bodeho charakteristika)

Příklad 1. Zakreslete LAFCH a LFFCH zadaného systému.

$$F(p) = 10^2 \cdot \frac{(p+0.1)(p+10)}{(p+1)(p^2+200p+10000)}.$$

Řešení:

• Určíme nízkofrekvenční faktor tvaru Kp^k, vidíme že $k=0$ (stupeň astatismu), pomocí limity,

$$K = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p^k} F(p) = \lim_{p\to 0} 10^2 \frac{(p+0.1)(p+10)}{(p+1)(p^2+200p+10000)} = \frac{10^2\cdot 10^{-1}\cdot 10^1}{10^4} = 10^{-2},$$

pomocí úpravy přenosu,

$$Kp^k\widehat{F}(p) = 10^2 \cdot \frac{10^{-1}\cdot(10p+1)\cdot 10\cdot(10^{-1}p+1)}{(p+1)\cdot 10^4\cdot(10^{-4}p^2+200\cdot 10^{-4}p+1)} =$$
$$= 10^{-2}\frac{(10p+1)(10^{-1}p+1)}{(p+1)(10^{-4}p^2+200\cdot 10^{-4}p+1)}.$$

• Určíme výchozí bod **LAFCH** - nízkofrekvenční faktor,

$$K = 10^{-2}, \Rightarrow 20\log_{10}(K) = -40,$$
asymptota prochází bodem $[\omega = 1,\ |F(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = -40]$,
$$k = 0 \ \Rightarrow \text{se sklonem } 0\ \mathrm{dB}/dek.$$

• Určíme výchozí bod **LFFCH** - nízkofrekvenční faktor,

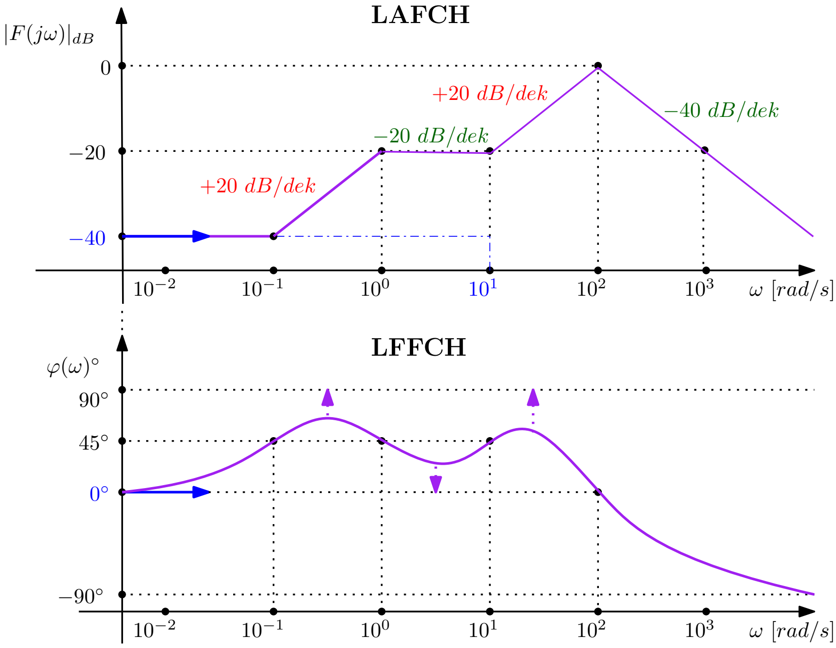
$$k = 0 \ \Rightarrow \ [k\frac{\pi}{2}]^\circ = 0^\circ.$$

• Určíme zlomové frekvence, seřadíme vzestupně, a analyzujeme,[34]

zlom				**≈ LAFCH**	**≈ LFFCH**
10^{-1}	(čitatel)	$\Rightarrow$	přidá	$+20\mathrm{dB}/dek$,	$\text{původní} + 45^\circ + 90^\circ$,
10^{0}	(jmenovatel)	$\Rightarrow$	ubere	$-20\mathrm{dB}/dek$,	$\text{původní} - 45^\circ - 90^\circ$,
10^{1}	(čitatel)	$\Rightarrow$	přidá	$+20\mathrm{dB}/dek$,	$\text{původní} + 45^\circ + 90^\circ$,
$\sqrt{\omega_n^2} = 10^2$	(jmenovatel)	$\Rightarrow$	ubere	$-40\mathrm{dB}/dek$,	$\text{původní} - 90^\circ - 180^\circ$.

[34] Prostřední hodnota ve sloupci **LAFCH** je změna fáze oproti původní (menší ω než zlomová) přímo v daném zlomovém bodě.

Nyní můžeme začít zakreslovat přímkové aproximace Bodeho charakteristiky.



∘ Sami porovnejte s výsledky z MATLAB®-u: zaoblenější LAFCH.

Příklad 2. Zakreslete LAFCH a LFFCH zadaného systému,

$$F(p) = 10^2 \cdot \frac{p(p+0.1)}{(p^2+20p+100)},$$

Řešení:

• Určíme nízkofrekvenční faktor tvaru Kp^k, vidíme že $k = 1$ (stupeň astatismu), pomocí limity,

$$K = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p^k} F(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{\cancel{p}} 10^2 \frac{\cancel{p}(p+0.1)}{(p^2+20p+100)} = \frac{10^2 \cdot 10^{-1}}{10^2} = 10^{-1},$$

pomocí úpravy přenosu,

$$Kp^k \widehat{F}(p) = 10^2 \cdot \frac{p \cdot 10^{-1} \cdot (10p+1)}{10^2 \cdot (10^{-2}p^2 + 20 \cdot 10^{-2}p + 1)} = 10^{-1} \frac{p(10p+1)}{(10^{-2}p^2 + 20 \cdot 10^{-2}p + 1)}.$$

• Určíme výchozí bod **LAFCH** - nízkofrekvenční faktor,

$K = 10^{-1}$, $\Rightarrow$ $20\log_{10}(K) = -20$,

asymptota prochází bodem $[\omega = 1,\ |F(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = -20]$,

$k = 1$ $\Rightarrow$ se sklonem $+20$ dB/dek.

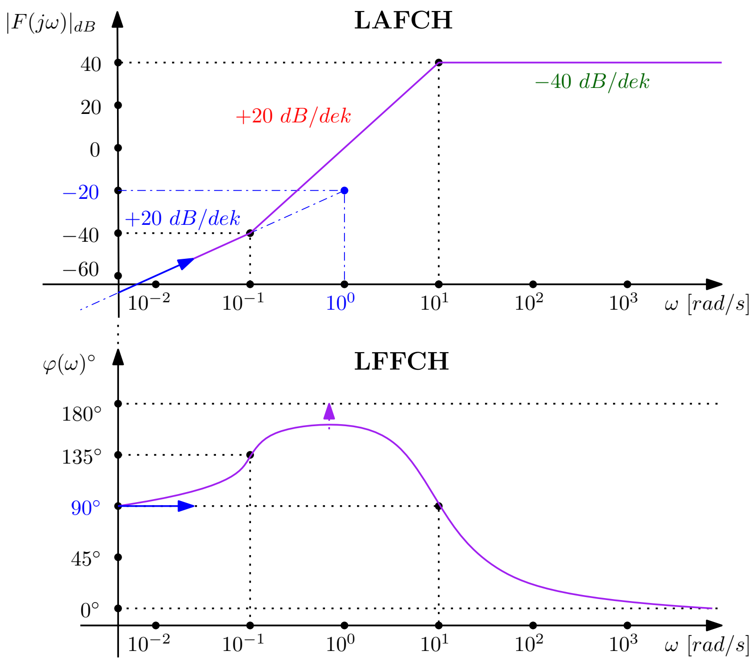
- Určíme výchozí bod **LFFCH** - nízkofrekvenční faktor,

$$k = 1 \;\Rightarrow\; [k\frac{\pi}{2}]^\circ = 90^\circ.$$

- Určíme zlomové frekvence, seřadíme vzestupně, a analyzujeme,[35]

zlom				**≈ LAFCH**	**≈ LFFCH**
10^{-1}	(čitatel)	$\Rightarrow$	přidá	$+20\text{dB}/dek$,	$\text{původní} + 45^\circ + 90^\circ$,
$\sqrt{\omega_n^2} = 10$	(jmenovatel)	$\Rightarrow$	ubere	$-40\text{dB}/dek$,	$\text{původní} - 90^\circ - 180^\circ$.

Nyní můžeme začít zakreslovat přímkové aproximace Bodeho charakteristiky.

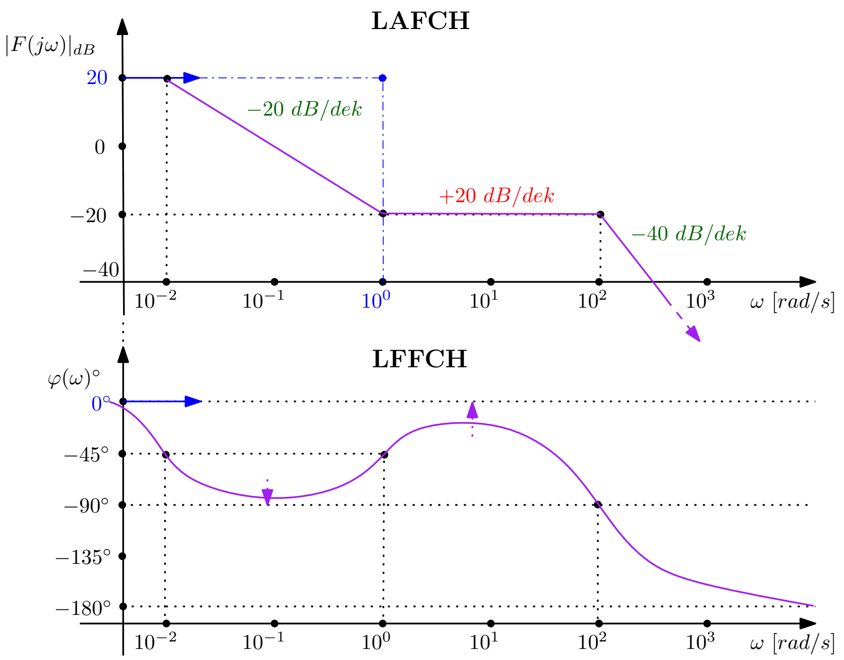


Příklady na samostatné procvičení

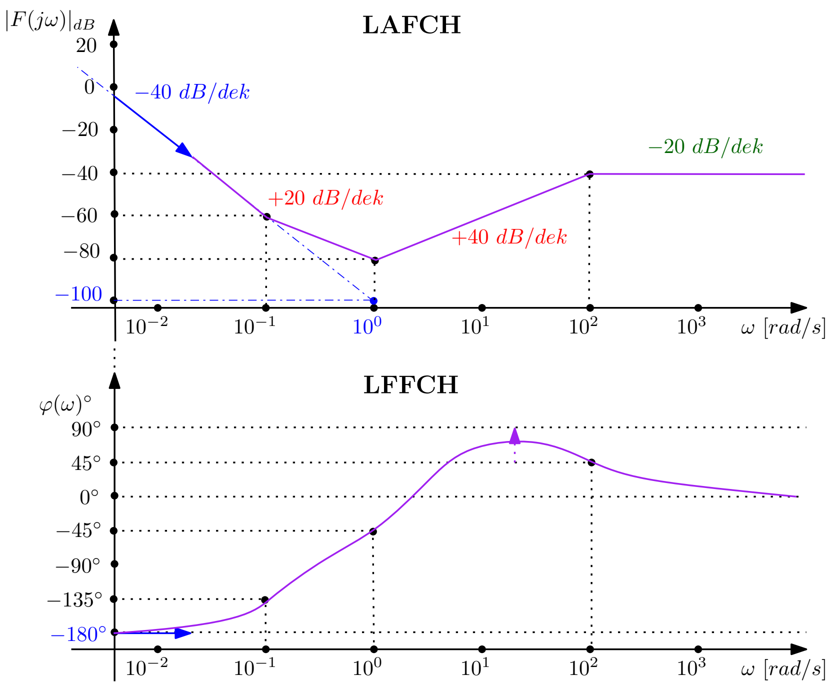
Zakreslete LAFCH a LFFCH zadaného systému.

[35] Prostřední hodnota ve sloupci **LAFCH** je změna fáze oproti původní (menší ω než zlomová) přímo v daném zlomovém bodě.

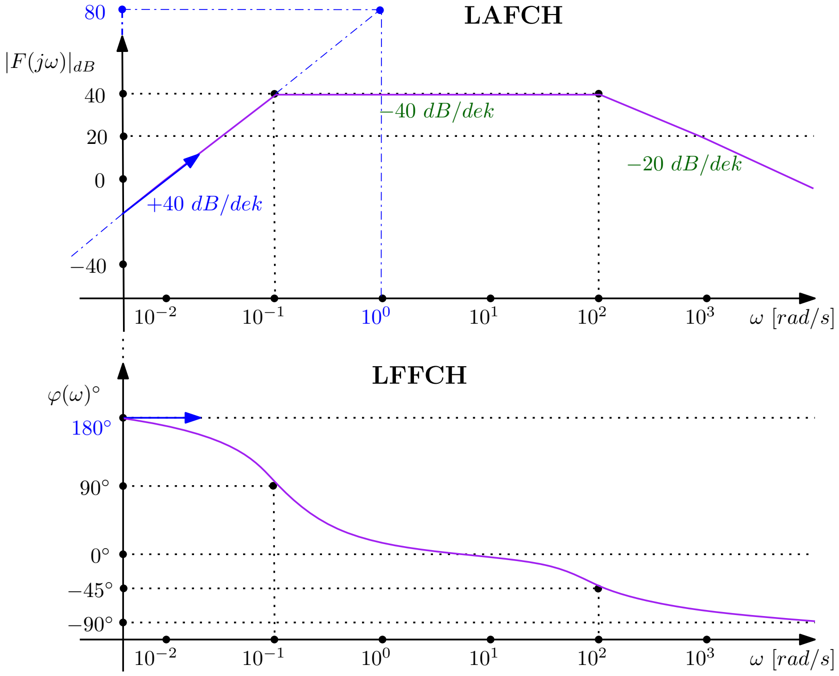
Příklad 1. $F(p) = 10^3 \cdot \frac{p+1}{(p+10^{-2})(p^2+200p+100^2)}$



Příklad 2. $F(p) = 10^{-2} \cdot \frac{(p+0.1)(p^2+2p+1)}{p^2(p+100)}$

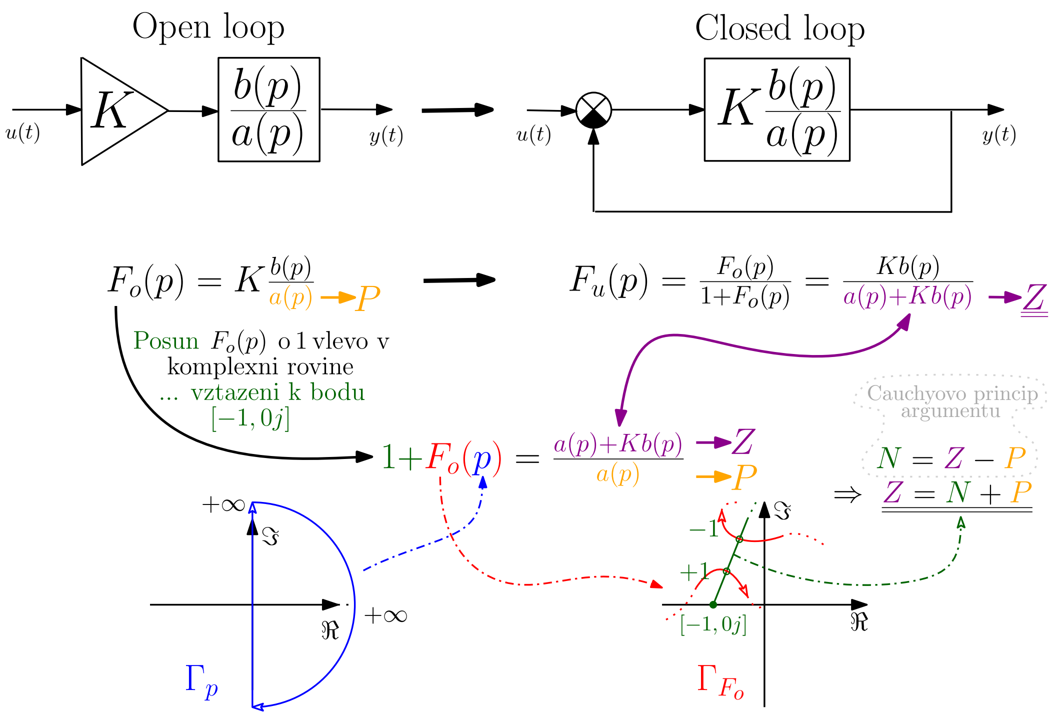


Příklad 3. $F(p) = 10^4 \cdot \frac{p^2}{(p+10^2)(p^2+0.2p+10^{-2})}$



7 Nyquistovo kritérium stability

Nyquistovo kritérium se využívá pro analýzu stability systému $F_u(p)$, který vznikne uzavřením záporné zpětné vazby kolem systému $F_o(p)$ (přenos $F_o(p)$ známe). Do komplexní roviny se vykresluje křivka Γ_{F_o} vzniklá dosazením křivky[36] Γ_p do přenosu $F_o(p)$.



Nyquistovo frekvenční kritérium stability pak můžeme formulovat takto: Nutnou a postačující podmínkou stability uzavřeného regulačního obvodu je požadavek, aby křivka $F_o(j\omega)$ pro $\omega \in (-\infty, +\infty)$ obkličovala bod $[-1, j0]$ v záporném smyslu tolikrát, kolik má otevřený regulační obvod nestabilních pólů.

Prakticky:

- počet nestabilních pólů otevřeného systému P známe,
- počet obkroužení N bodu $[-1, j0]$ zjistíme z grafu,
- hledáme počet nestabilních pólů uzavřeného systému $\underline{\underline{Z = N + P}}$,

$$\text{pokud: } Z = 0 \;\Rightarrow\; F_u(p) \text{ je stabilní,}$$
$$Z > 0 \;\Rightarrow\; F_u(p) \text{ je nestabilní,}$$

○ **Poznámka:** Má-li $F_o(p)$ pól na imaginární ose pro nějaké $j\widetilde{\omega}$, hodnotu $F_o(j\widetilde{\omega})$ nelze vyčíslit ⇒ je potřebné upravit křivku Γ_p tak, aby zmíněný bod $j\widetilde{\omega}$ nějak vhodně "obkroužila".

[36] Křivka Γ_p obepíná pravou $\mathbb{C}$-polorovinu kde se nachází nestabilní póly.

Řešené příklady: Nyquistovo kritérium stability

Příklad 1. Analyzujte stabilitu systému pomocí Nyquistovo kritéria stability,

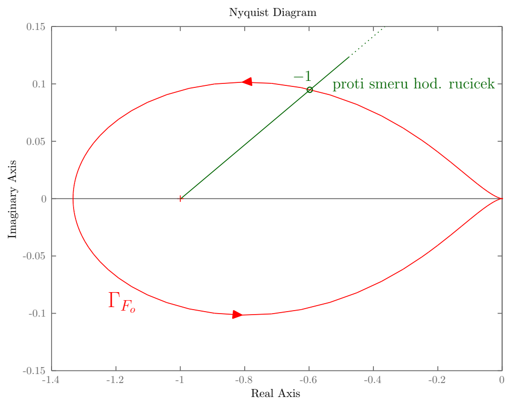
$$F_o(p) = 2 \cdot \frac{p+2}{(p+1)(p+3)(p-1)},$$

Řešení:

- Určíme počet nestabilních pólů otevřené smyčky P,

$$F_o(p) = 2 \cdot \frac{p+2}{(p+1)(p+3)(p-1)} \;\Rightarrow\; P = 1.$$

- Z grafu[37] určíme počet obkroužení bodu [-1,0j] N,



$$\Rightarrow \; N = -1.$$

- Určíme počet nestabilních pólů uzavřené smyčky Z, a rozhodneme o stabilitě,

$$Z = N + P = -1 + 1 = 0,$$

$\Rightarrow$ Systém vzniklý uzavřením záporné zpětné vazby kolem systému $F_o(p)$ bude stabilní.

---

[37] Graf vygenerujeme např. v MATLAB®-u (je daný).

Příklad 2. Analyzujte stabilitu systému pomocí Nyquistovo kritéria stability,

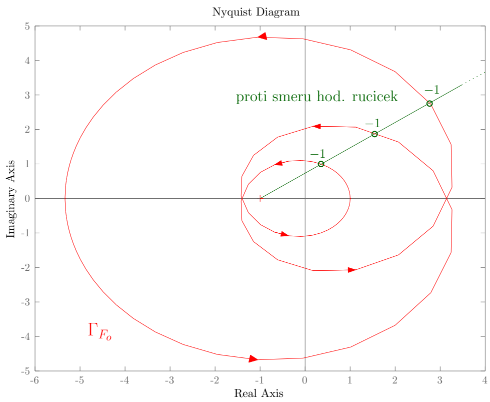
$$F_o(p) = \frac{(p+2)^2(p+4)}{(p-1)^2(p-3)},$$

Řešení:

- Určíme počet nestabilních pólů otevřené smyčky P,

$$F_o(p) = \frac{(p+2)^2(p+4)}{(p-1)^2(p-3)} \Rightarrow P = 3.$$

- Z grafu[38] určíme počet obkroužení bodu [-1,0j] N,



$$\Rightarrow N = -3.$$

- Určíme počet nestabilních pólů uzavřené smyčky Z, a rozhodneme o stabilitě,

$$Z = N + P = -3 + 3 = 0,$$

$\Rightarrow$ Systém vzniklý uzavřením záporné zpětné vazby kolem systému $F_o(p)$ bude stabilní.

---

[38]Graf vygenerujeme např. v MATLAB®-u (je daný).

Příklad 3. Analyzujte stabilitu systému pomocí Nyquistovo kritéria stability,

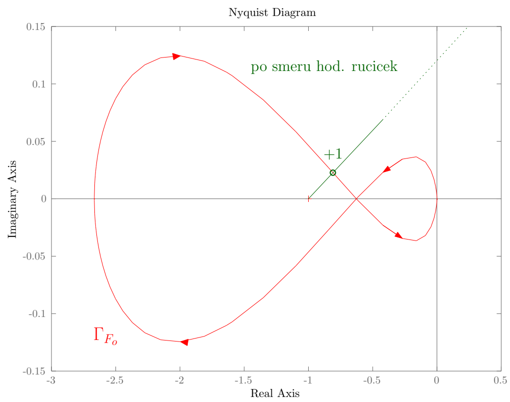
$$F_o(p) = \frac{1}{1000} \cdot \frac{(p+2)^2(p+100)(p+40)(p+3)}{(p-2)(p+1)^4(p-1)^2(p+9)},$$

Řešení:

- Určíme počet nestabilních pólů otevřené smyčky P,

$$F_o(p) = \frac{1}{1000} \cdot \frac{(p+2)^2(p+100)(p+40)(p+3)}{(p-2)(p+1)^4(p-1)^2(p+9)} \Rightarrow P = 3.$$

- Z grafu[39] určíme počet obkroužení bodu [-1,0j] N,



$$\Rightarrow N = 1.$$

- Určíme počet nestabilních pólů uzavřené smyčky Z, a rozhodneme o stabilitě,

$$Z = N + P = 1 + 3 = 4,$$

$\Rightarrow$ Systém vzniklý uzavřením záporné zpětné vazby kolem systému $F_o(p)$ bude <u>nestabilní</u>.

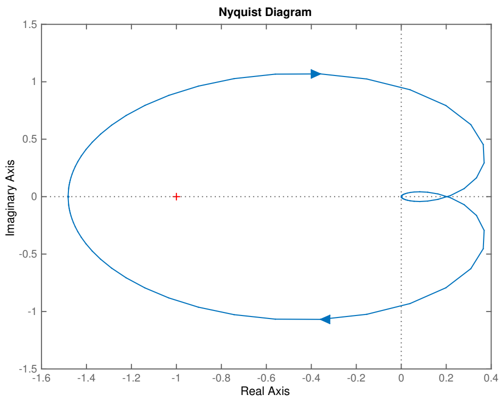
---

[39] Graf vygenerujeme např. v MATLAB®-u (je daný).

Příklady na samostatné procvičení

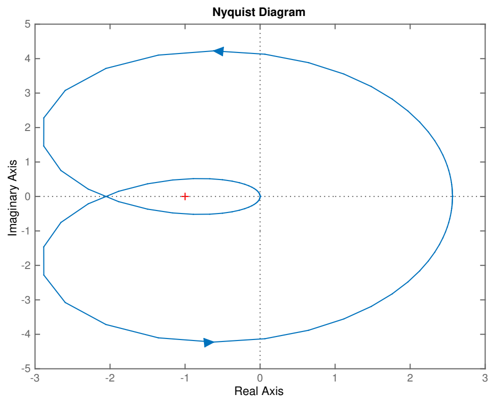
Analyzujte stabilitu zadaných systémů pomocí Nyquistovo kritéria stability.

Příklad 1. $F(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(p+4)(p+10)(p-10)}{(p+3)^2(p+5)(p+2)}$



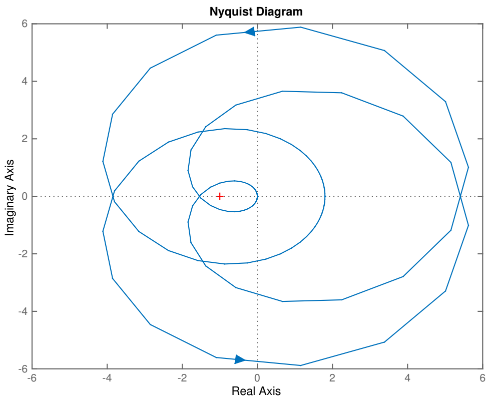
($Z = 1$, $\equiv$ $F_u(p)$ nestabilní).

Příklad 2. $F(p) = 10 \cdot \frac{(p+10)(p+1)}{(s+3)(s-3+2j)(s-3-2j)}$



($Z = 0$, $\equiv$ $F_u(p)$ stabilní).

Příklad 3. $F(p) = 100 \cdot \frac{(p+3)^2(p+20)(p+30)}{(p-30)(p-10)^3(p+10)}$



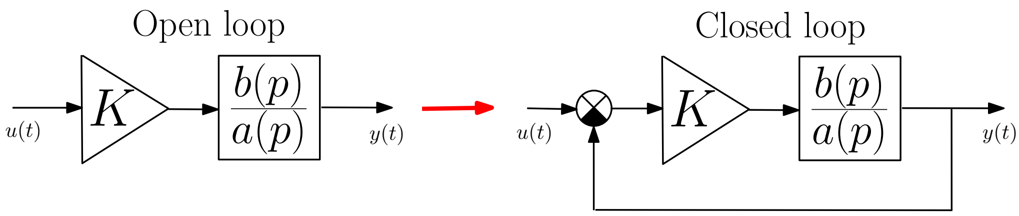
$(Z = 0, \ \equiv \ F_u(p)$ stabilní$)$.

8 Geometrické místo kořenů (GMK)

GMK je definováno jako množina komplexních čísel $\{p\}$, vyhovující rovnici

$$1 + K\frac{b(p)}{a(p)} = 0, \quad K \in \mathbb{R}_0^+. \tag{63}$$

Motivací je určení polohy nul a pólů (v komplexní rovině) uzavřené smyčky[40] za předpokladu že se mění jen zesílení otevřené smyčky K od nuly do nekonečna.



$$F_{y,u} = K\frac{b(p)}{a(p)} \qquad \longrightarrow \qquad F_{y,u} = \frac{K\frac{b(p)}{a(p)}}{1+K\frac{b(p)}{a(p)}}$$

$$1+K\frac{b(p)}{a(p)} = 0$$

Pravidla pro konstrukci GMK[41]:

- začátek a konec křivek GMK,
  - vychází z pólů přenosu otevřeného regulačního obvodu při $K = 0$,
  - končí v nulách přenosu otevřeného regulačního obvodu při $K \to +\infty$,

  $\Rightarrow$ GMK sestává z n větví vycházející z pólů, z toho m jich končí přímo v nulách a zbylé v nekonečnu ("nevlastní nuly").

- výpočet úhlů a průsečíků,

  $(n - m)$ asymptot GMK se protíná na reálné ose v bodě q,

  $$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}, \text{ kde } p_i,\ z_j \text{ jsou číselné hodnoty pólů a nul.} \tag{64}$$

  $(n - m)$ asymptot GMK svírá s reálnou osou úhly α_l,

  $$\alpha_l = \frac{\pi + (l-1)2\pi}{n - m}, \ l = 1, 2, \ldots, n - m. \tag{65}$$

- GMK je **symetrické** vůči reálné ose.

[40] "Open loop" = otevřená smyčka, "Closed loop" = uzavřená smyčka, viz. ilustrační obrázek.

[41] Písmeno n označuje stupeň polynomu $a(p)$ (počet pólů otevřené smyčky), m označuje stupeň polynomu $b(p)$ (počet nul). Číslo $(n - m)$ tedy označuje relativní řád systému $F = \frac{b(p)}{a(p)}$.

- GMK probíhá po reálné ose **vlevo** od **lichého** počtu nul a pólů.
- body, kde GMK opouští, nebo přichází na reálnou osu jsou určeny řešením rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p-p_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p-z_j} = 0. \tag{66}$$

- Průsečíky GMK s imaginární osou učíme dosazením $p = j\omega$ do rovnice GMK (nastávají pro $K = K_{\text{kritické}}$).
- Pro $(n-m) \geq 2$ (v praxi často), nasává tzv. *zákon zachování součtu pólů*,

součet pólů otevřené smyčky = součet pólů uzavřené smyčky.

Řešené příklady: GMK

Příklad 1. Zakreslete Geometrické místo kořenů (GMK) pro systém zadaný přenosovou funkcí, dále určete hodnotu nul a pólů pro $K = 0.25$.

$$F(p) = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Řešení:

• Určíme počet a hodnotu nul, m, a pólů, n,

$$\begin{aligned} \text{systém nemá žádné nuly,} &\Rightarrow\ m = 0, \\ \text{systém má 2 póly,} &\Rightarrow\ n = 2, \quad p_1 = 0,\ p_2 = -1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ GMK má dvě větve vycházející z pólů a končící v nekonečnu (jak odhalíme blíže).
• Vypočteme průsečík q na reálné ose,

$$q = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j}{n-m} = \frac{0-1-0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

• Vypočteme úhly α_l, $l = 1, 2$, které větve svírají s reálnou osou,

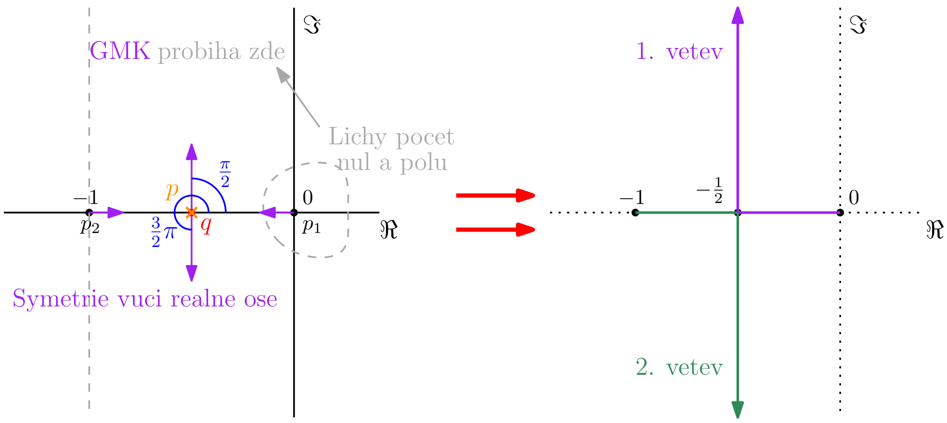
$$\alpha_l = \frac{\pi + (l-1)2\pi}{n-m}, \quad \begin{array}{l} l = 1 \ \Rightarrow\ \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \\ l = 2 \ \Rightarrow\ \alpha_2 = \frac{\pi+2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi. \end{array}$$

• Vypočteme body, kde větve opouští/přichází na reálnou osu,

$$\sum_i \frac{1}{p-p_i} - \sum_j \frac{1}{p-z_j} = 0, \ \Rightarrow\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} = 0,$$

$$\frac{p+1+p}{p(p+1)} = 0 \ \Rightarrow\ \begin{array}{l} 2p+1 = 0, \\ p = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

Nyní můžeme s respektováním grafických pravidel GMK začít zakreslovat.



∘ Průsečíky s imaginární osou nejsou, K_{krit} neexistuje.

• Určíme hodnotu nul a pólů uzavřené smyčky pro $K = 0.25$,

$$F_{\text{uzav.}} = \frac{\frac{K}{p(p+1)}}{1 + \frac{K}{p(p+1)}} = \frac{K}{p(p+1) + K} = \frac{0.25}{p^2 + p + 0.25} = \frac{0.25}{(p+0.5)^2},$$

$$\Rightarrow \; m = 0,$$

$$n = 2, \quad p_{1,2} = -\frac{1}{2}.$$

∘ Platí $n - m \geq 2 \;\; \Rightarrow$ součet pólů otevřené smyčky = součet pólů uzavřené smyčky.

Příklad 2. Zakreslete Geometrické místo kořenů (GMK) pro systém zadaný přenosovou funkcí,

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2 + 4p + 3}.$$

Řešení:

• Určíme počet a hodnotu nul, m, a pólů, n,

$$\text{systém má jednu nulu,} \;\Rightarrow\; m = 1, \quad z_1 = -2$$
$$\text{systém má dva póly,} \;\Rightarrow\; n = 2, \quad p_1 = -1, \; p_2 = -3.$$

$\Rightarrow$ GMK má dvě větve z nichž jedna končí v nule $z_1 = -2$ a druhá v nekonečnu.

• $(n - m) = 1$ asymptot se logicky neprotíná $\Rightarrow$ průsečík q nepočítáme.

• Vypočteme úhel α_1, který $(n - m) = 1$ větev svírá s reálnou osou,

$$\alpha_l = \frac{\pi + (l-1)2\pi}{n - m}, \; l = 1 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \pi.$$

• Vypočteme body, kde větve opouští/přichází na reálnou osu,

$$\sum_i \frac{1}{p-p_i} - \sum_j \frac{1}{p-z_j} = 0, \;\Rightarrow\; \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p+2} = 0,$$

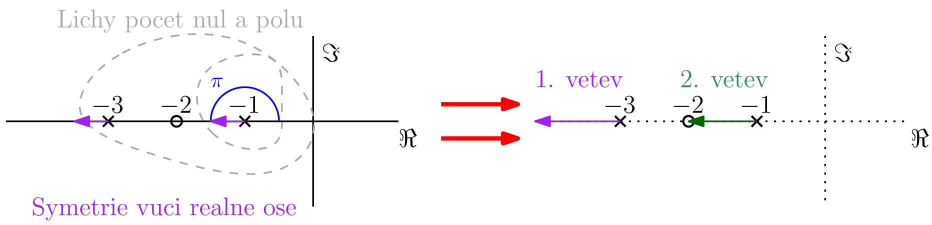
$$\frac{(p+3)(p+2)+(p+1)(p+2)-(p+1)(p+3)}{(p+1)(p+2)(p+3)} = 0,$$

$$\frac{p^2+5p+6+p^2+3p+2-p^2-4p-3}{(p+1)(p+2)(p+3)} = 0,$$

$$\frac{p^2+4p+5}{(p+1)(p+2)(p+3)} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} p^2+4p+5=0, \\ p_1=-2+i,\; p_2=-2-i, \end{array}$$

body vyšli komplexní (tj. nejsou na reálné ose) a úhel $\alpha_1 = \pi$, $\Rightarrow$ větve se z reálné osy nevychýlí. ∘ Průsečíky s imaginární osou nejsou, K_{krit} neexistuje.

Nyní můžeme s respektováním grafických pravidel GMK začít zakreslovat.



Příklad 3. Zakreslete Geometrické místo kořenů (GMK) pro systém zadaný přenosovou funkcí.

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2}.$$

Řešení:

• Určíme počet a hodnotu nul, m, a pólů, n,

$$\text{systém má jednu nulu}, \;\Rightarrow\; m=1, \quad z_1=-3,$$
$$\text{systém má dva póly}, \;\Rightarrow\; n=2, \quad p_1=-1,\; p_2=-2.$$

$\Rightarrow$ GMK má dvě větve z nichž jedna končí v nule $z_1=-3$ a druhá v nekonečnu.
• $(n-m)=1$ asymptot se logicky neprotíná $\Rightarrow$ průsečík q nepočítáme.
• Vypočteme úhel α_1, který $(n-m)=1$ větev svírá s reálnou osou,

$$\alpha_l = \frac{\pi+(l-1)2\pi}{n-m}, \; l=1 \;\Rightarrow\; \alpha_1=\pi.$$

• Vypočteme body, kde větve opouští/přichází na reálnou osu,

$$\sum_i \frac{1}{p-p_i} - \sum_j \frac{1}{p-z_j} = 0, \ \Rightarrow \ \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} = 0,$$

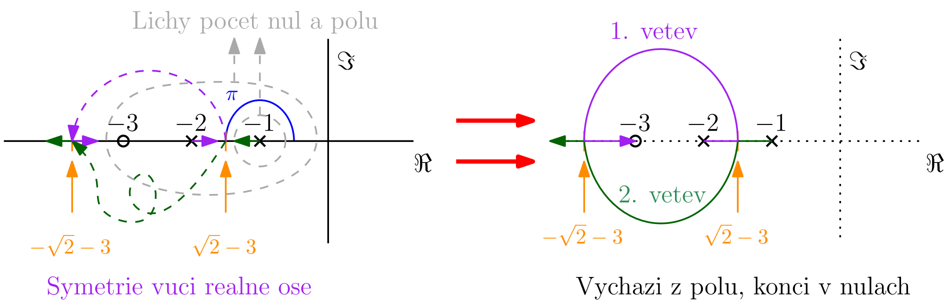
$$\frac{(p+2)(p+3)+(p+1)(p+3)-(p+1)(p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} = 0,$$

$$\frac{p^2+5p+6+p^2+4p+3-p^2-3p-2}{(p+1)(p+2)(p+3)} = 0$$

$$\frac{p^2+6p+7}{(p+1)(p+2)(p+3)} = 0 \ \Rightarrow \ \begin{array}{c} p^2+6p+7=0, \\ p_1 = \sqrt{2}-3 \doteq -1.5858, \\ p_2 = -\sqrt{2}-3 \doteq -4.4142. \end{array}$$

∘ Průsečíky s imaginární osou nejsou, K_{krit} neexistuje.

Nyní můžeme s respektováním grafických pravidel GMK začít zakreslovat.



Příklad 4. Zakreslete Geometrické místo kořenů (GMK) pro systém zadaný přenosovou funkcí, bezpečnost v zesílení jste naměřili $G_m = 6.02$ dB.

$$F(p) = \frac{p}{p^2-2p+3}.$$

Řešení:

• Určíme počet a hodnotu nul, m, a pólů, n,

$$\text{systém má jednu nulu,} \ \Rightarrow \ m = 1, \quad z_1 = 0,$$
$$\text{systém má dva póly,} \ \Rightarrow \ n = 2, \quad p_1 = 1+i\sqrt{2}, \ p_2 = 1-i\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow$ GMK má dvě větve z nichž jedna končí v nule $z_1 = 0$ a druhá v nekonečnu.
• $(n-m) = 1$ asymptot se logicky neprotíná $\Rightarrow$ průsečík q nepočítáme.
• Vypočteme úhel α_1, který $(n-m) = 1$ větev svírá s reálnou osou,

$$\alpha_l = \frac{\pi + (l-1)2\pi}{n-m}, \ l = 1 \ \Rightarrow \ \alpha_1 = \pi.$$

- Vypočteme body, kde větve opouští/přichází na reálnou osu,

$$\sum_i \frac{1}{p-p_i} - \sum_j \frac{1}{p-z_j} = 0, \;\Rightarrow\; \frac{1}{p-1-i\sqrt{2}} + \frac{1}{p-1+i\sqrt{2}} - \frac{1}{p} = 0,$$

$$\ldots \text{ Výpočet } \ldots \;\Rightarrow\; \begin{array}{r} p_1 = \sqrt{3} \doteq 1.73, \\ p_2 = -\sqrt{3} \doteq -1.73. \end{array}$$

Vpravo od průsečíku $p_1 = \sqrt{3}$ žádné póly ani nuly nejsou a GMK probíhá po reálné ose vždy vpravo od lichého počtu nul a pólů $\Rightarrow$ tento bod nebude využit.

- Abychom mohli vypočítat průsečíky s imaginární osou, vypočteme K_{krit},

$$G_m = 6.03 = |20\log_{10}\left(\frac{1}{K_0}\right)|,$$

$$K_{\text{krit}} = \frac{1}{K_0} = 10^{\frac{G_m}{20}} = 10^{0.301} \doteq 2.$$

- Vypočteme průsečíky s imaginární osou = dosadíme $p = j\omega$ a K_{krit} do rovnice GMK,

$$1 + K\frac{j\omega}{-\omega^2 - 2j\omega + 3} = 0,$$

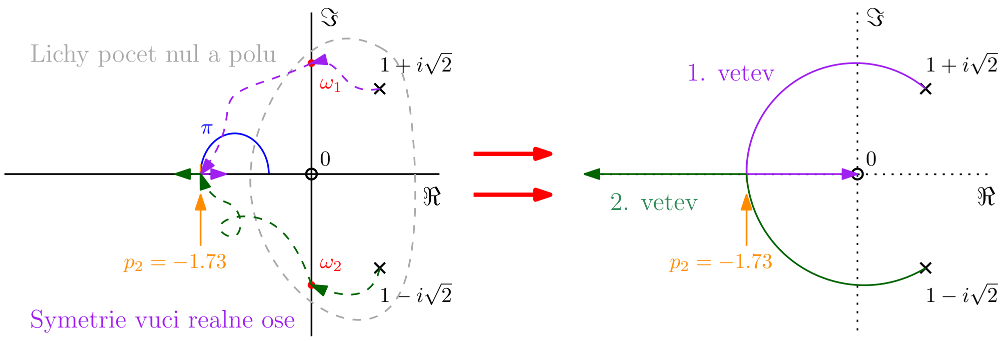
$$\omega^2 + 2j\omega - 3 = jK\omega,$$

$$\omega^2 + (2j - jK)\omega - 3 = 0,$$

$$D = (2j - Kj)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = \ldots = -K^2 + 4K + 8,$$

$$\omega_{1,2} = \frac{Kj - 2j \pm \sqrt{-K^2 + 4K + 8}}{2} \overset{K=K_{\text{krit}}}{\approx} \pm 1.73$$

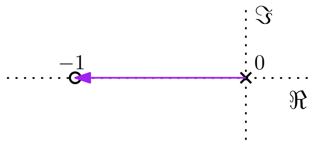
Nyní můžeme s respektováním grafických pravidel GMK začít zakreslovat.



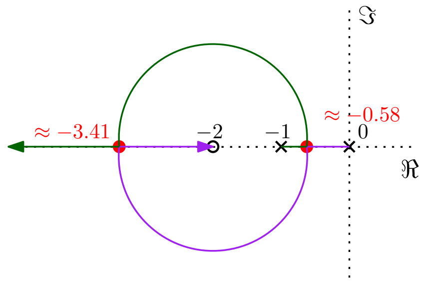
Příklady na samostatné procvičení

Zakreslete GMK pro zadaný systém.

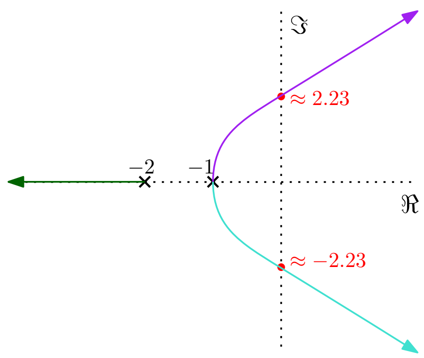
Příklad 1. $F(p) = \frac{p+1}{p}$



Příklad 2. $F(p) = \frac{p+2}{3p^2+3p}$



Příklad 3. $F(p) = \frac{1}{p^3+4p^2+5p+2}$, $G_m = 25.1$ dB



9 Bonus: Materiály pro LS2

Řešené příklady s komplexnějším zadáním

Příklad 1. Mějme diferenční rovnici

$$\begin{aligned} y(k+2) - 0.25y(k) &= u(t) \\ y(0) &= 2, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Určete: **a)** $u(t) = 0,$ odezvu na počáteční podmínky
b) $u(t) = 1(t)|_{n.p.p},$ přechodovou charakteristiku
c) $u(t) = \delta(t)|_{n.p.p},$ impulsní charakteristiku

Řešení:

a) Odezvu na počáteční podmínky můžeme určit z diferenční rovnice za pomoci přenosové funkce v $\mathcal{Z}$-transformaci (frekvenční oblast), a nebo v časové oblasti ze stavového modelu (který musíme určit) za pomocí diskrétní přechodové matice $\mathbf{A}^k$. Vzorce můžeme formulovat,

$$\begin{aligned} y_0(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}, \\ y_0(k) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

• Výpočet ve frekvenční oblasti:

$$\begin{aligned} y(k+2) - 0.25y(k) &= 0, \ /\mathcal{Z}\{\}, \\ z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 0.25Y(z) &= 0, \end{aligned}$$

$$Y(z) = \frac{2z^2 + z}{z^2 - 0.25} = \frac{2z\cancel{(z+0.5)}}{(z-0.5)\cancel{(z+0.5)}} = 2 \cdot \frac{z}{z-0.5},$$

$$Y(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-0.5}, \ /\mathcal{Z}^{-1}\{\},$$

$$\underline{\underline{y_0(k) = 2 \cdot 0.5^k}}.$$

Nyní můžeme snadno vypočítat diskrétní přenos (tj. $u(t) \neq 0$ při nulových poč. pod.),

$$F(z) = \left.\frac{Y(z)}{U(z)}\right|_{n.p.p} = \frac{1}{z^2 - 0.25}$$

• Výpočet v časové oblasti: Protože známe přenosovou funkci systému, stavovou reprezentaci můžeme určit pomocí Frobeniovy formy,

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 0.25}, \ \Rightarrow \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = 0.$$

Pokud přenosovou funkci neznáme, určíme stavový model např. klasickým "kaskádovým" postupem,

$$\mathbf{x}(k): \begin{array}{rl} x_1(k) \triangleq & y(k), \\ x_2(k) \triangleq & y(k+1), \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rlll} x_1(k+1) = & y(k+1) = & x_2(k), & \\ x_2(k+1) = & 0.25y(k) = & 0.25x_1(k) & +u(k), \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k),$$

$$\text{počáteční podmínky: } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(0+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Nyní potřebujeme vypočítat matici $\mathbf{A}^k$, čehož můžeme docílit,

$$\begin{array}{l} \mathbf{1)}\ \mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}, \text{ (frekvenční oblast)}, \\ \mathbf{2)}\ \mathbf{A}^k = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A}, \text{ (C-H věta)}, \\ \mathbf{3)}\ \mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}, \text{ (modální transformace)}, \end{array}$$

1) Frekvenční oblast,

$$z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = z \begin{bmatrix} z & -1 \\ -0.25 & z \end{bmatrix}^{-1} = \frac{z}{z^2 - 0.25} \begin{bmatrix} z & 1 \\ 0.25 & z \end{bmatrix}, \ /\mathcal{Z}^{-1}\{\},$$

Každou složku z této matice rozložíme na parciální zlomky a následně transformujeme zpět do časové oblasti. Hledání prvku a_{11}, (tj. A_{11} v $\mathcal{Z}$ transformaci) může vypadat následovně,

$$A_{11} = A_{11}(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.25} = \frac{z^2}{(z-0.5)(z+0.5)},$$

abychom mohli výraz rozložit na parciální zlomky[42], rovnici vynásobíme $\cdot\frac{1}{z}$,

$$\begin{aligned} A_{11}(z) &= \frac{z^2}{(z-0.5)(z+0.5)}, \ / \cdot \frac{1}{z}, \\ \frac{1}{z}A_{11}(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+0.5)} &= \frac{r_1}{z-0.5} + \frac{r2}{z+0.5}, \\ r_1 &= \lim_{z\to 0.5} \frac{z}{(z+0.5)} = 0.5, \\ r_2 &= \lim_{z\to -0.5} \frac{z}{(z-0.5)} = -0.5, \\ \Rightarrow \frac{1}{z}A_{11}(z) &= \frac{0.5}{z-0.5} - \frac{0.5}{z+0.5} \end{aligned} \tag{67}$$

[42] Aby bylo možné rozložit racionálně lomenou funkci $\frac{p(z)}{q(z)}$ na parciální zlomky, stupeň polynomu v čitateli musí být menší, než stupeň polynomu ve jmenovateli, tedy $st(p) < st(q)$.

abychom mohli pohodlně použít tabulky pro $\mathcal{Z}$ transformaci, rovnici vynásobíme $\cdot z$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z}A_{11}(z) &= \frac{0.5}{z-0.5} - \frac{0.5}{z+0.5}, \ / \cdot z, \\
A_{11}(z) &= 0.5\frac{z}{z-0.5} - 0.5\frac{z}{z+0.5}, \ /\mathcal{Z}^{-1}\{\}, \\
a_{11}(k) &= 0.5 \cdot 0.5^k - 0.5 \cdot (-0.5)^k,
\end{aligned}$$

Při hledání ostatních prvků se postupuje obdobným způsobem. Výsledná matice $\mathbf{A}^k$ tedy bude vypadat následovně,

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k & 0.5^k - (-0.5)^k \\ 0.25 \cdot 0.5^k - 0.25 \cdot (-0.5)^k & 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k \end{bmatrix}.$$

2) C-H věta,
Vlastní čísla systému jsou $\lambda_{1,2} = \{0.5, -0.5\}$.

$$\mathbf{A}^k = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A}, \ \Rightarrow \ \lambda_i^k = c_0 + c_1\lambda_i,$$

Po dosazení za λ_1 dostáváme lineární soustavu dvou rovnic s neznámými $c_0, \ c_1$,

$$\begin{aligned} 0.5^k &= c_0 + c_1 \cdot 0.5 \\ (-0.5)^k &= c_0 + c_1 \cdot (-0.5) \end{aligned} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 0.5^k \\ (-0.5)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}.$$

Hledané koeficienty můžeme získat vynásobením rovnice inverzní maticí soustavy,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5^k \\ (-0.5)^k \end{bmatrix} \\
c_0 &= 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k, \\
c_1 &= 0.5^k - (-0.5)^k.
\end{aligned}$$

Po dosazení do příslušné maticové rovnice získáme,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^k = &\begin{bmatrix} 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k & 0 \\ 0 & 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0.5^k - (-0.5)^k \\ 0.25 \cdot 0.5^k - 0.25 \cdot (-0.5)^k & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3) Modální transformace,
Nejprve najdeme vlastní vektory, abychom z nich následně mohli sestavit matici $\mathbf{P}$.

$$[\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}]\,\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & -1 \\ -0.25 & \lambda_i \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Výpočet vlastního vektoru $\mathbf{v}_1$ příslušného k $\lambda_1 = 0.5$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.5 & -1 & 0 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ \Rightarrow \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Výpočet vlastního vektoru $\mathbf{v}_2$ příslušného k $\lambda_2 = -0.5$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} -0.5 & -1 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{-0.5 - 0.5} \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0.5^k & 0 \\ 0 & (-0.5)^k \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^k = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0.5^k & 0 \\ 0 & (-0.5)^k \end{bmatrix}}^{\mathbf{\Lambda}^k} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}^{-1}} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.5^k & (-0.5)^k \\ 0.5 \cdot 0.5^k & -0.5 \cdot (-0.5)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k & 0.5^k - (-0.5)^k \\ 0.25 \cdot 0.5^k - 0.25 \cdot (-0.5)^k & 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k \end{bmatrix}.$$

• Když už máme k dispozici předpis pro matici $\mathbf{A}^k$, můžeme vypočítat odezvu na počáteční podmínky v časové oblasti,

$$\underline{\underline{y_0(k)}} = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k & 0.5^k - (-0.5)^k \\ 0.25 \cdot 0.5^k - 0.25 \cdot (-0.5)^k & 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \cdot 0.5^k + 0.5 \cdot (-0.5)^k | 0.5^k - (-0.5)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 0.5^k + (-0.5)^k + 0.5^k - (-0.5)^k = \underline{\underline{2 \cdot 0.5^k}}$$

b) Přechodovou funkci určíme z přenosu,

$$
\begin{aligned}
G(z) = F(z)\frac{z}{z-1} &= \frac{z}{(z-0.5)(z+0.5)(z-1)} = \frac{r_1}{(z-0.5)} + \frac{r_2}{(z+0.5)} + \frac{r_3}{(z-1)},\\
r_1 &= \lim_{z\to 0.5} \frac{z}{(z+0.5)(z-1)} = -1,\\
r_2 &= \lim_{z\to -0.5} \frac{z}{(z-0.5)(z-1)} = -0.\overline{3},\\
r_3 &= \lim_{z\to 1} \frac{z}{(z-0.5)(z+0.5)} = 1.\overline{3},\\
\Rightarrow\ G(z) &= -\frac{1}{(z-0.5)} - 0.\overline{3}\frac{1}{(z+0.5)} + 1.\overline{3}\frac{1}{(z-1)},\ /\cdot z,\\
zG(z) &= -\frac{z}{(z-0.5)} - 0.\overline{3}\frac{z}{(z+0.5)} + 1.\overline{3}\frac{z}{(z-1)},\ /\mathcal{Z}^{-1}\{\},\\
g(k+1) &= -0.5^k - 0.\overline{3}\cdot(-0.5)^k + 1.\overline{3}\\
\underline{\underline{g(k)}} &= -0.5^{k-1} - 0.\overline{3}\cdot(-0.5)^{k-1} + 1.\overline{3} = \underline{\underline{-2\cdot 0.5^k + 0.\overline{6}\cdot(-0.5)^k + 1.\overline{3}}}.
\end{aligned}
$$

c) Impulsní funkci určíme z přenosu,

$$
\begin{aligned}
H(z) = F(z) &= \frac{1}{(z-0.5)(z+0.5)} = \frac{r_1}{(z-0.5)} + \frac{r_2}{(z+0.5)},\\
r_1 &= \lim_{z\to 0.5} \frac{1}{z+0.5} = 1,\\
r_2 &= \lim_{z\to -0.5} \frac{1}{z-0.5} = -1,\\
H(z) &= \frac{1}{(z-0.5)} - \frac{1}{(z+0.5)}\ /\cdot z,\\
zH(z) &= \frac{z}{(z-0.5)} - \frac{z}{(z+0.5)},\ /\mathcal{Z}^{-1}\{\},\\
h(k+1) &= 0.5^k - (-0.5)^k,\\
\underline{\underline{h(k)}} &= 0.5^{k-1} - (-0.5)^{k-1} = \underline{\underline{2\cdot 0.5^k + 2\cdot(-0.5)^k}};\ \forall k > 0, h(0) = 0
\end{aligned}
$$