2

30.10.2023

Tomáš Kaiser

kaisert@kma.zcu.cz

home.zcu.cz/~kaisert/mo

Rozcvička

62-A-S-3

3. Určete všechny trojice reálných čísel a, b, c, které splňují podmínky

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26, \quad a + b = 5 \quad \text{a} \quad b + c \geqq 7.$$

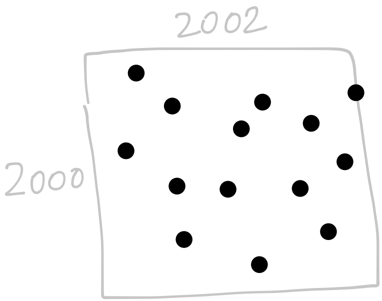
[**Mathematical Induction**, *Slinko*] On each planet in a planetary system consisting of an odd number of planets there is a astronomer observing the nearest planet. The distances between each pair of planets are all different. Prove that at least one planet is not observed by an astronomer.

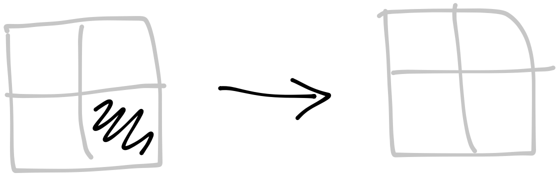
62-A-S-2

2. Na každé z $n+1$ stěn n-bokého jehlanu je napsáno číslo 0. V každém kroku zvolíme některý vrchol a čísla na všech stěnách obsahujících tento vrchol zvětšíme o 1 nebo je všechna zmenšíme o 1. Dokažte, že nemůže nastat situace, v níž by na všech stěnách jehlanu bylo napsáno číslo 1.

"Z minula"

2. Form a 2000×2002 screen with unit screens. Initially, there are more than 1999×2001 unit screens which are on. In any 2×2 screen, as soon as there are 3 unit screens which are off, the 4th screen turns off automatically. Prove that the whole screen can never be totally off.





D5

Ve společnosti lidí jsou některé dvojice spřátelené. Pro každé celé $k \geq 3$ řekneme, že společnost je k-dobrá, pokud lze každou k-tici lidí ze společnosti rozesadit kolem kruhového stolu tak, že se každí dva sousedé přátelí. Dokažte, že je-li společnost 6-dobrá, pak je i 7-dobrá. [A–67–III–1]

3. (IMO 1977) In a finite sequence of real numbers the sum of any seven successive terms is negative and the sum of any eleven successive terms is positive. Determine the maximum number of terms in the sequence.

62-A-II-1

1. Je dáno 21 různých celých čísel takových, že součet libovolných jedenácti z nich je větší než součet deseti ostatních čísel.

a) Dokažte, že každé z daných čísel je větší než 100.

b) Určete všechny takové skupiny 21 různých celých čísel, jež obsahují číslo 101.

Dělitelnost a prvočísla

I-4 = speciální prvočísla

4. O lichém prvočísle p řekneme, že je *speciální*, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p. Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální? (Jaroslav Zhouf)

63-A-I-1

1. *Číslo n je součinem tří (ne nutně různých) prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o 1, zvětší se jejich součin o 963. Určete původní číslo n.*

73-A-I-4/D3

D3

Pro každé $n > 1$ označme S_n součet n prvních prvočísel. Ukažte, že v intervalu $\langle S_n, S_{n+1}\rangle$ leží vždy druhá mocnina některého přirozeného čísla.

73-A-I-4/D4

D4

Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je a) pět, b) sedm. [70–A–I–1]

Prvočísla 62-A-I-1 (2012)

1. *Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro které existuje přirozené číslo a takové, že*

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť p a q jsou prvočísla. Zjistěte, jaký je největší společný dělitel čísel $p+q$ a p^2+q^2.
2. Dokažte, že zlomek $\dfrac{21n+4}{14n+3}$, v němž n je přirozené číslo, nelze krátit. [1. MMO, 1959]
3. Určete všechna celá čísla větší než 1, kterými lze krátit některý ze zlomků tvaru $\dfrac{3p-q}{5p+2q}$, kde p a q jsou nesoudělná celá čísla. [58–A–S–3]
4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo. [58–A–I–3]
5. Určete všechny dvojice prvočísel p, q, pro něž platí $p+q^2 = q+p^3$. [55–B–II–1]
6. Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňující následující podmínky:

$$p \mid q+r, \quad q \mid r+2p, \quad r \mid p+3q.$$

[55–A–III–5]

64-A-I-3

3. *Najděte všechna celá čísla $k \geqq 2$, pro která existuje k-prvková množina* M *celých kladných čísel taková, že součin všech čísel z* M *je dělitelný součtem libovolných dvou (různých) čísel z* M.

Návodné úlohy

N1. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b, c, d platí $a \mid c$ a $b \mid d$, pak $ab \mid cd$.

N2. Dokažte, že pokud jsou přirozená čísla a, b nesoudělná, pak $a+b \nmid ab$.

N3. Dokažte, že žádná tříprvková množina vyhovující zadání neobsahuje číslo 1.

N4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k existuje k po sobě jdoucích přirozených čísel, mezi nimiž není žádné prvočíslo.

D1. Dokažte, že existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že pro každé přirozené číslo $k \geqq 2$ posloupnost $(k+a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje pouze konečně mnoho prvočísel. Rozhodněte, zda existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že pro každé celé číslo $k \geqq 0$ posloupnost $(k+a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje pouze konečně mnoho prvočísel. [46–A–III–4]

D2. Dokažte matematickou indukcí pro $k \geqq 4$ nerovnost $2^{k-1} > 2k - 1$.

D3. Ukažte, že pro každé celé $k \geqq 2$ lze vybrat k různých přirozených čísel tak, aby jejich součin byl dělitelný každým číslem, které je součtem několika z vybraných čísel (ne nutně dvou jako v soutěžní úloze).