2 Pravdivostní hodnoty

V této přednášce se budeme zabývat otázkou *pravdivosti* formulí.

Definice 2.1 *Ohodnocení* je funkce v, která každé formuli jazyka $\mathcal{L}_P$ přiřazuje hodnotu 1 nebo 0 a pro libovolné formule φ, ψ splňuje podmínky:

(i)

$$v(\neg\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } v(\varphi) = 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(ii)

$$v(\varphi \to \psi) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } v(\varphi) = 1 \quad \text{a} \quad v(\psi) = 0 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Problém 2.2 Dokažte, že ohodnocení je jednoznačně určeno svými hodnotami na atomických formulích.

2.1 Pravdivostní tabulky

Problém 2.3 Zjistěte $v(\,((\neg A_1) \to (A_0 \to A_1))\,)$, pokud $v(A_0) = 1$ a $v(A_1) = 0$.

Problém 2.4 Předpokládejme, že $v(A_0) = v(A_2) = 1$ a $v(A_1) = v(A_3) = 0$. Zjistěte $v(\alpha)$ pro následující formule α:

1. $\neg A_2 \to \neg A_3$

2. $\neg A_2 \to A_3$

3. $\neg(\neg A_0 \to A_1)$

4. $A_0 \vee A_1$

5. $A_0 \wedge A_1$

Problém 2.5 Nechť v je ohodnocení a α, β formule. Jak závisí na hodnotách $v(\alpha), v(\beta)$ ohodnocení následujících formulí:

$$\alpha \vee \beta, \qquad \alpha \wedge \beta, \qquad \alpha \leftrightarrow \beta?$$

2.2 Splnitelnost formulí

Definice 2.6 Formule φ je *splněna* při ohodnocení v, pokud $v(\varphi) = 1$. Množina formulí Σ je při ohodnocení v splněna, pokud je splněna každá formule $\psi \in \Sigma$. Formule φ (resp. množina Σ je *splnitelná*, pokud existuje nějaké ohodnocení, které ji splňuje.

Definice 2.7 Formule je *tautologií*, je-li splněna při každém ohodnocení. Formule je *sporná*, není-li splněna při žádném ohodnocení.

Problém 2.8 Jsou následující formule tautologie, případně sporné formule?

1. $(A_0 \to \neg A_1) \to A_0$
2. $A_0 \to \neg A_0$

Problém 2.9 Ukažte, že pro libovolnou formuli φ je:

formule $\varphi \wedge \neg\varphi$ sporná,

formule $\varphi \vee \neg\varphi$ tautologie,

formule $\neg\varphi$ sporná, právě když φ je tautologie.

Definice 2.10 Formule φ (logicky) *vyplývá* z množiny formulí Σ (píšeme $\Sigma \models \varphi$), pokud každé ohodnocení, splňující množinu Σ, splňuje také formuli φ. Není-li $\Sigma \models \varphi$, píšeme $\Sigma \not\models \varphi$.

Obecněji z množiny Σ vyplývá množina formulí Δ (psáno $\Sigma \models \Delta$), pokud je Δ splněna při každém ohodnocení splňujícím množinu Σ.

Vyplývá-li φ z prázdné množiny formulí, píšeme místo $\emptyset \models \varphi$ zkráceně $\models \varphi$. Všimněte si, že $\models \varphi$ právě když φ je tautologie, a $\not\models \varphi$ právě když je sporná.

Problém 2.11 Ukažte:

$\{ A_0, (A_0 \to \neg A_1) \} \models \{ \neg A_1 \}$,

$\{ A_3, A_2 \to A_3 \} \not\models \{ A_2 \}$.

Problém 2.12 Nechť Σ je množina formulí. Dokažte následující tvrzení:

1. Je-li $\Delta \subseteq \Sigma$, pak $\Sigma \models \Delta$.
2. Pro formule φ, ψ je
$$\Sigma \cup \{ \varphi \} \models \psi \quad \text{právě když} \quad \Sigma \models (\varphi \to \psi).$$
3. Σ je splnitelná, právě když neexistuje sporná formule χ taková, že $\Sigma \models \chi$.