# 4 Úplnost výrokové logiky

V této přednášce dokážeme větu o korektnosti a větu o úplnosti výrokové logiky, které spolu vyjadřují následující fakt: formule logicky vyplývá z nějaké teorie právě tehdy, když v ní je odvoditelná (formálním důkazem). Jeden směr této ekvivalence je snadný.

**Věta 4.1 (Věta o korektnosti)** *Nechť $\Sigma$ je množina formulí a $\varphi$ formule. Platí:*

$$\textit{pokud} \quad \Sigma \vdash \varphi, \quad \textit{pak} \quad \Sigma \models \varphi.$$

**Důkaz.** Uvažme nějaký důkaz formule $\varphi$ v teorii $\Sigma$. Pro všechny jeho členy $\tau$, které jsou premisy nebo axiomy, zjevně platí $\Sigma \models \tau$. Již víme, že se tento vztah zachová i při použití MP. (Jinými slovy, pokud $\Sigma \models \{ \alpha \to \beta, \alpha \}$, pak také $\Sigma \models \beta$.) Odtud nutně $\Sigma \models \varphi$. $\square$

Nyní se budeme věnovat důkazu obrácené implikace.

**Definice 4.2** Množina formulí (teorie) $\Sigma$ je *konzistentní*, pokud platí

$$\Sigma \nvdash \chi,$$

kde $\chi$ označuje formuli $\neg(A_0 \to A_0)$.

V nekonzistentní teorii je možné odvodit libovolnou formuli (viz cvičení 4.1).

**Tvrzení 4.3** *Pokud $\Sigma \nvdash \neg\alpha$, pak teorie $\Sigma \cup \{ \alpha \}$ je konzistentní.*

**Důkaz.** Předpokládejme, že $\Sigma \cup \{ \alpha \} \vdash \chi$, tedy podle věty o dedukci $\Sigma \vdash (\alpha \to \chi)$. Víme, že pak $\Sigma \vdash (\neg\chi \to \neg\alpha)$ (jeden z problémů v minulé přednášce) a také že $\Sigma \vdash \neg\chi$. Podle MP je $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Tím je důkaz proveden. $\square$

**Definice 4.4** Konzistentní teorie $\Gamma$ je *maximálně konzistentní*, pokud je pro každou formuli $\alpha \notin \Gamma$ teorie $\Gamma \cup \{ \alpha \}$ nekonzistentní.

**Lemma 4.5** *Všechny formule jazyka výrokové logiky je možné seřadit do posloupnosti $\varphi_1, \varphi_2, \dots$.*

**Důkaz.** Uspořádejme symboly abecedy v tomto pořadí:

$$\neg \qquad \to \qquad ( \qquad ) \qquad A_0 \qquad A_1 \qquad A_2 \qquad \dots$$

Toto uspořádání určuje lexikografické uspořádání $<_\ell$ na množině formulí (uspořádání podle prvního symbolu formule, pak podle druhého, atd.) Potíž je v tom, že při seřazení formulí podle uspořádání $<_\ell$ budeme například posloupnost formulí $A_1, A_2, A_3, \ldots$ probírat nekonečně dlouho a k delším formulím se vůbec nedostaneme.

Definujme proto *výšku* $\ell(\varphi)$ formule $\varphi$ jako součet indexů všech atomických formulí s výskytem ve $\varphi$ (násobné výskyty počítáme vícekrát). Formule primárně uspořádejme podle výšky, až pak lexikograficky. Nejdříve v naší výsledné posloupnosti tedy budou formule s výškou 1 (uspořádané lexikograficky), pak s výškou 2, atd. Vzhledem k tomu, že formulí s omezenou výškou je konečně mnoho (proč?), nakonec se v naší posloupnosti na každou formuli dostane. $\square$

**Tvrzení 4.6** *Každou konzistentní teorii $\Sigma$ je možné rozšířit na maximálně konzistentní teorii $\Gamma \supseteq \Sigma$.*

**Důkaz.** Myšlenka důkazu je jednoduchá[1]: probírat jednu formuli $\varphi$ po druhé a vždy přidat tu z formulí $\varphi, \neg\varphi$, pro kterou se neporuší konzistentnost.

Uvažme všechny formule v pořadí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ daném lemmatem 4.5. Budeme definovat posloupnost teorií $\Sigma = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots$, a to následovně:

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\, \varphi_i \,\} & \text{pokud } \Gamma \nvdash \neg\varphi_i, \\ \Gamma_i & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

Konečně položíme

$$\Gamma = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i.$$

Tvrdíme především, že $\Gamma$ je konzistentní teorie. Kdyby nebyla, bylo by možné v $\Gamma$ odvodit spornou formuli. Odvození je ale konečné, a tak všechny jeho premisy musí být obsaženy již v některé teorii $\Gamma_i$. Ta je však konzistentní, což plyne z opakovaného použití tvrzení 4.3. To je spor.

Dále musíme dokázat, že $\Gamma$ je maximálně konzistentní. Dejme tomu, že pro nějakou formuli $\varphi_i \notin \Gamma$ je $\Gamma \cup \{\, \varphi_i \,\}$ konzistentní. Pak jistě $\neg\varphi_i \notin \Gamma$. Formule $\neg\varphi_i$ se rovněž vyskytuje v naší posloupnosti, dejme tomu jako formule $\varphi_j$. Jediným důvodem pro $\varphi_j \notin \Gamma_{j+1}$ může být, že $\Gamma_j \vdash \neg\varphi_j$. Pak ale $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi_i$ a tím pádem $\Gamma \vdash \varphi_i$. Na druhou stranu z $\varphi_i \notin \Gamma_{i+1}$ plyne $\Gamma_i \vdash \neg\varphi_i$, a tedy $\Gamma \vdash \neg\varphi_i$. Teorie $\Gamma$ by tedy musela být sporná, což jsme vyloučili. Důkaz je hotov. $\square$

V cvičení 4.2 ukážeme, že v maximálně konzistentní teorii $\Gamma$ lze odvodit pouze formule, které do $\Gamma$ patří (premisy).

**Tvrzení 4.7** *Nechť $\Gamma$ je maximálně konzistentní teorie. Pak funkce $v_\Gamma$, která každé formuli přiřazuje hodnotu 0 nebo 1 podle předpisu*

$$v_\Gamma(\alpha) = 1 \quad \textit{právě když} \quad \alpha \in \Gamma,$$

*je ohodnocení.*

[1] V textu [?] je uveden podstatně složitější důkaz používající tzv. axiom výběru. Tento axiom však v daném případě není nutný.

**Důkaz.** Musíme ověřit, že $\neg\alpha \in \Gamma$ právě když $\alpha \notin \Gamma$, a obdobné tvrzení pro implikaci $\alpha \to \beta$. Snadný důkaz ponecháváme na cvičení 4.3. $\square$

Nyní již můžeme přikročit k důkazu věty o úplnosti.

**Věta 4.8 (Věta o úplnosti)** *Nechť $\Sigma$ je teorie a $\varphi$ formule. Platí:*

$$\textit{je-li} \quad \Sigma \models \varphi, \quad \textit{pak} \quad \Sigma \vdash \varphi.$$

**Důkaz.** Stačí uvažovat případ, že $\Sigma$ je konzistentní teorie. Dokážeme obrácenou implikaci. Nechť $\Sigma \nvdash \varphi$. Podle tvrzení 4.3 můžeme k teorii $\Sigma$ konzistentně přidat formuli $\neg\varphi$. Vzniklou teorii $\Sigma'$ můžeme podle tvrzení 4.6 rozšířit na maximálně konzistentní teorii $\Gamma$. Ta určuje ohodnocení $v_\Gamma$, při němž je splněna teorie $\Sigma'$. Jinými slovy, $v_\Gamma$ splňuje teorii $\Sigma$, ale nesplňuje formuli $\varphi$. Je tedy 'svědkem', že platí $\Sigma \not\models \varphi$, což jsme právě chtěli dokázat. $\square$

Zajímavým bezprostředním důsledkem věty o úplnosti je věta o kompaktnosti. O kompaktnosti obecně hovoříme v situacích, kdy lze na určitou vlastnost nekonečného objektu usoudit z toho, zda ji mají jeho konečné podobjekty.

**Věta 4.9 (Věta o kompaktnosti)** *Teorie je splnitelná, právě když je každá její konečná podmnožina splnitelná.*

**Důkaz.** Netriviální implikace směřuje zprava doleva a dá se přeformulovat takto: Každá nesplnitelná teorie $\Sigma$ obsahuje nějakou konečnou nesplnitelnou podteorii $\Sigma'$.

Je-li $\Sigma$ nesplnitelná, pak $\Sigma \models \chi$, kde $\chi$ je jako výše. Podle věty o úplnosti je také $\Sigma \vdash \chi$. Odvození formule $\chi$ obsahuje konečný počet premis; nechť množina $\Sigma'$ je právě množina těchto premis. Potom $\Sigma'$ rovněž dokazuje formuli $\chi$ a podle věty o korektnosti $\Sigma' \models \chi$, takže i konečná teorie $\Sigma'$ je nesplnitelná. $\square$

## Cvičení

▶ **4.1** Ukažte, že pro nekonzistentní teorii $\Delta$ platí

$$\Delta \vdash \varepsilon,$$

kde $\varepsilon$ je libovolná formule.

▶ **4.2** Ukažte, že pro maximálně konzistentní teorii $\Gamma$ je

$$\Gamma \vdash \alpha \quad \text{právě když} \quad \alpha \in \Gamma.$$

▶ **4.3** Ukažte, že pro maximálně konzistentní teorii $\Gamma$ platí

(a) $\neg\alpha \in \Gamma$ právě když $\alpha \notin \Gamma$,

(b) $\alpha \to \beta \in \Gamma$ právě když $\alpha \notin \Gamma$ nebo $\beta \in \Gamma$.