5 Jazyk predikátové logiky

V tomto textu uvedeme základní definice se vztahem k jazyku predikátové logiky. Na přednášce se seznámíme i s několika ilustračními příklady. Pro jazyk vymezíme především následující pojmy:

- symboly,
- termy,
- formule

a dále pojem volné a vázané proměnné a podmínky pro dosazení termu do formule.

5.1 Symboly

Definice 5.1 *Symboly* jazyka predikátové logiky prvního řádu $\mathcal{L}$ jsou:

1. Proměnné pro objekty: $x_0, x_1, \ldots$
2. Logické spojky: $\neg$ a $\rightarrow$.
3. Obecný kvantifikátor: $\forall$.
4. Pomocné symboly: $(,)$.
5. Symbol pro rovnost: $=$.
6. Symboly pro konstanty.
7. Funkční symboly.
8. Predikátové symboly.

Poslední tři množiny symbolů mohou být i prázdné. Pro každý funkční a predikátový symbol je dáno přirozené číslo $n \geq 1$: jeho *četnost*. Říkáme, že jde o n-ární symbol.

Symboly v posledních třech skupinách nazýváme *mimologické* a budeme předpokládat, že je jich spočetně mnoho. Ostatní symboly jsou *logické*.

5.2 Termy

Definice 5.2 *Termy* jazyka $\mathcal{L}$ jsou definovány následovně:

1. Každá proměnná x_n je term.
2. Každý symbol c pro konstantu je term.
3. Pokud f je n-ární funkční symbol a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak

   $$f(t_1, \ldots, t_n)$$

   je term.

5.3 Formule

Definice 5.3 *Formule* jazyka $\mathcal{L}$ jsou definovány následovně:

1. Pokud P je n-ární predikátový symbol a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak

   $$P(t_1, \ldots, t_n)$$

   je (*atomická*) formule.
2. Jsou-li t_1, t_2 termy, pak $t_1 = t_2$ je (*atomická*) formule.
3. Jsou-li φ, ψ formule, pak

   $$\neg\varphi \quad \text{a} \quad \varphi \to \psi$$

   jsou formule.
4. Je-li φ formule a x_n proměnná, pak

   $$(\forall x_n)\ \varphi$$

   je formule.

5.4 Zkratky

Stejným způsobem jako ve výrokové logice zavedeme logické spojky $\wedge, \vee$ a $\leftrightarrow$. Kromě toho zavedeme ještě *existenční kvantifikátor* $\exists$, přičemž

$$\text{zápis} \quad (\exists x_n)\ \varphi \quad \text{chápeme jako} \quad \neg(\forall x_n)\ (\neg\varphi).$$

5.5 Volné a vázané proměnné

Pojem *podformule* je definován analogicky jako ve výrokové logice, speciálně atomická formule nemá žádné podformule kromě sebe samé. Jediným rozdílem jsou neatomické formule ψ tvaru $(\forall x_n)\ \psi'$. Množina podformulí $S(\psi)$ je samozřejmě $\{\,\psi\,\} \cup S(\psi')$.

Definice 5.4 Nechť φ je formule jazyka $\mathcal{L}$. Konkrétní výskyt proměnné x_n ve formuli φ je *vázaný*, je-li součástí nějaké podformule tvaru

$$(\forall x_n)\ \psi. \tag{1}$$

V opačném případě je tento výskyt *volný*. Proměnná x_n je *volná* ve formuli φ, má-li v ní volný výskyt. Je v ní *vázaná*, má-li v ní vázaný výskyt.

Poznamenejme, že z definice existenčního kvantifikátoru podmínka 1 zahrnuje i podformule tvaru $(\exists x_n)\ \psi$.

Vhodným přeznačením vyloučíme formule, v nichž je některá proměnná zároveň volná i vázaná. To lze vždy zařídit.

Definice 5.5 Formule, ve které žádná proměnná nemá volný výskyt, se nazývá *uzavřená* formule nebo *sentence*. Formule bez vázaných výskytů proměnných je *otevřená*.

5.6 Substituovatelnost

Definice 5.6 Term t je *substituovatelný* za proměnnou x_n do formule φ, pokud φ nemá podformuli tvaru $(\forall x_i)\ \psi$ tak, že:

(a) x_i se vyskytuje v termu t,

(b) x_n má ve formuli ψ výskyt, který je *v rámci formule* φ volný.

Formuli, která vznikne z formule φ nahrazením všech volných výskytů proměnné x_n substituovatelným termem t, označíme $\varphi(x_n/t)$.