7 Odvozování v predikátové logice

V této přednášce se budeme zabývat syntaktickou stránkou predikátové logiky, tj. odvozováním z axiomů. Stejně jako u výrokové logiky se později ukáže, že tento přístup je co do výsledků ekvivalentní zkoumání pravdivosti formulí, tj. sémantického aspektu predikátové logiky, probraného v minulé přednášce.

Definice 7.1 Nechť φ je formule, x proměnná a t term substituovatelný do φ za x. Pak symbol

$$\varphi(x/t)$$

označuje formuli vzniklou nahrazením všech volných výskytů proměnné x ve formuli φ termem t.

Definice 7.2 Predikátová logika má následující *schémata axiomů*. Axiomy z nich vzniknou nahrazením symbolů α, β, γ libovolnými formulemi. Případná další nahrazení jsou popsána dále.

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

(A4) Axiom substituce:

$$(\forall x)\ \alpha \to \alpha(x/t)$$

za předpokladu, že t je term *substituovatelný* za proměnnou x do formule α.

(A5) Axiom distribuce:

$$(\forall x)\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\ \beta)$$

za předpokladu, že proměnná x *není* ve formuli α volná.

(A6)

$$t = t$$

(A7)

$$(t_1 = s_1 \wedge \dots t_n = s_n) \to (P(t_1, \dots, t_n) \to P(s_1, \dots, s_n))$$

(A8)

$$(t_1 = s_1 \wedge \dots t_n = s_n) \to (f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n))$$

V posledních třech schématech je P libovolný n-ární predikátový symbol (včetně symbolu $=$), f je libovolný n-ární funkční symbol a t, t_i, s_i jsou termy.

Definice 7.3 *Dedukční pravidla* predikátové logiky jsou dvě:

(MP) *Modus ponens.* Z formulí $\alpha \to \beta$ a α je odvoditelná formule β.

(GEN) *Generalizace.* Z formule γ je odvoditelná formule $(\forall x)\ \gamma$, kde x je libovolná proměnná.

Definice 7.4 *Teorie* $\mathbf{T}$ je určena svým jazykem a množinou *axiomů* (tj. formulí v tomto jazyce).

Definice 7.5 *Důkaz (odvození)* formule φ v teorii $\mathbf{T}$ je konečná posloupnost formulí v jazyce teorie $\mathbf{T}$ tak, že (1) poslední člen posloupnosti je φ, (2) každý člen posloupnosti je buď axiom predikátové logiky nebo axiom teorie $\mathbf{T}$ nebo vznikne z předchozích členů posloupnosti použitím některého odvozovacího pravidla.

Má-li formule φ důkaz v $\mathbf{T}$, je v $\mathbf{T}$ *dokazatelná* (psáno $\mathbf{T} \vdash \varphi$). Je-li v $\mathbf{T}$ dokazatelná každá formule jejího jazyka, je $\mathbf{T}$ *sporná*. V opačném případě je *bezesporná*.

Zápis $\vdash \varphi$ znamená, že φ je dokazatelná v teorii bez mimologických axiomů a s minimálním jazykem, který zahrnuje všechny symboly obsažené ve formuli φ.

Problém 7.6 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk a nechť θ je tautologie *výrokového* počtu. Pro každou výrokovou proměnnou A_i, která se v θ vyskytuje, zaměňme všechny výskyty A_i v θ nějakou formulí ε_i v jazyce $\mathcal{L}$. Dokažte, že pro výslednou formuli θ' platí

$$\vdash \theta'.$$

Problém 7.7 Dokažte:

(i) $\vdash x = y \to y = x$

(ii) $\{\, \alpha \,\} \vdash (\exists x)\ \alpha$

(iii) $\{\, (\exists x)\ \alpha \,\} \vdash \alpha$, pokud x není volné ve formuli α

(iv) $\vdash (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x = y \to (y = z \to x = z))$

(v) $\vdash (\forall x)\ \alpha \to (\exists x)\ \alpha$

(vi) $\vdash (\exists x)\ \alpha \to (\forall x)\ \alpha$, pokud x není volné ve formuli α.

Problém 7.8 [Věta o uzávěru] Nechť $\mathbf{T}$ je teorie, φ formule a x proměnná. Pak

$$\mathbf{T} \vdash \varphi \quad \text{právě kdy«} \quad \mathbf{T} \vdash (\forall \mathbf{x})\ \varphi.$$

Dokažte.

I v predikátové logice platí věta o dedukci, ale s dodatečným předpokladem uzavřenosti formule. Následující příklad ukazuje, proč je tento předpoklad nutný.

Nechť $\mathcal{L}_Z$ je jazyk s jediným mimologickým symbolem, kterým je konstanta 0, a nechť $\mathcal{M}_Z$ je některá jeho dvouprvková realizace. Pak platí

$$\mathcal{M}_Z \not\models (x = 0 \to (\forall x)\ (x = 0)).$$

Intuice říká, že by pak mělo být rovněž

$$\not\vdash (x = 0 \to (\forall x)\ (x = 0)).$$

To je pravda a plyne to z věty o korektnosti, kterou dokážeme příště. Na druhou stranu je triviálně

$$\{\, x = 0 \,\} \vdash (\forall x)\ (x = 0)$$

jedním použitím pravidla generalizace.

Věta 7.9 (Věta o dedukci) *Pro* uzavřenou *formuli* φ *platí*

$$T \cup \{\, \varphi \,\} \vdash \psi \quad \textit{právě když} \quad T \vdash (\varphi \to \psi).$$

Důkaz. Jako cvičení. $\square$

Problém 7.10 Nechť φ je uzavřená formule. Dokažte, že platí

$$\mathbf{T} \vdash \varphi \quad \text{právě kdy«} \quad \mathbf{T} \cup \{\, \neg\varphi \,\} \vdash \neg(\psi \to \psi),$$

kde ψ je libovolná.

Pozor: ani toto tvrzení neplatí bez předpokladu uzavřenosti. Nechť teorie $\mathbf{T}$ v jazyce $\mathcal{L}_Z$ má jediný axiom

$$(\exists x)\ x = 0.$$

Pak teorie $\mathbf{T} \cup \{\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \,\}$ je sporná, protože použitím generalizace dostaneme

$$\{\, x \neq 0 \,\} \vdash (\forall x)\ x \neq 0$$

a negace formule vpravo je axiom teorie $\mathbf{T}$. Nicméně *neplatí* $\mathbf{T} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (zde se opět odvoláváme na větu o korektnosti a model $\mathcal{M}_Z$ teorie $\mathbf{T}$).

Definice 7.11 Teorie $\mathbf{S}$ je *rozšířením* teorie $\mathbf{T}$, pokud jazyk teorie $\mathbf{T}$ je obsažen v jazyce teorie $\mathbf{S}$ a pro každý axiom α teorie $\mathbf{T}$ je $\mathbf{S} \vdash \alpha$.

Rozšíření $\mathbf{S}$ teorie $\mathbf{T}$ je *konzervativní*, pokud pro každou formuli φ jazyka teorie $\mathbf{T}$ platí

$$\text{pokud} \quad \mathbf{S} \vdash \varphi \quad \text{pak} \quad \mathbf{T} \vdash \varphi.$$